FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL.

CORRESPONDENCIA.

Se llama CORRESPONDENCIA entre dos conjuntos A y B a toda ley que asocia elementos del conjunto A con elementos del conjunto B.

Se denota por $\boldsymbol{f : A \to B}$

A es el conjunto inicial de la correspondencia.

B es el conjunto final de la correspondencia.

Los elementos de A que se transforman mediante la correspondencia forman el CONJUNTO ORIGINAL: **Or(*f*)**

Los elementos de B que son transformados de los de A forman el CONJUNTO IMAGEN: $\mathrm{Im}(f)$

Se llama GRAFO de una correspondencia a un subconjunto G del producto cartesiano $A \times B$ formado por los pares (a, b) tal que $b = f(a)$.

APLICACION.

Se llama APLICACION entre dos conjuntos A y B a toda correspondencia que verifica las siguientes condiciones:

- Todos los elementos del conjunto A se transforman en elementos del conjunto B: $\boldsymbol{A \equiv \mathrm{Or}(f)}$
- La imagen de cada elemento es única.

Tipos de aplicaciones.

Si a la aplicación le exigimos algunas cosas más, tendremos distintos tipos de aplicaciones:

- **INYECTIVA:** cada imagen lo es de un sólo original, es decir, si

$$f(x) = f(x') \quad \Rightarrow \quad x = x'$$

- **SOBREYECTIVA, SOBRE o EXHAUSTIVA:** todo elemento del conjunto final tiene un original: $B \equiv \mathrm{Im}(f)$ es decir, $\forall\, y \in B \ \ \exists x \in A \ / \ f(x) = y$.
- **BIYECTIVA:** cuando es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo, es decir, es una aplicación uno a uno, por lo que los conjuntos inicial y final tienen el mismo número de elementos.

FUNCIONES.

Se llama FUNCION a toda aplicación entre conjuntos numéricos.

Nuestro objetivo es estudiar funciones reales de variable real, es decir, funciones donde el conjunto final es el conjunto de números reales $\mathbb{R}$ (funciones reales) y el conjunto inicial también es $\mathbb{R}$ o un subconjunto D de (variable real).

Se representan por: $f : D \to \mathbb{R} \;/\; x \in D \to y = f(x) \in \mathbb{R}$

"x" representa la variable independiente y toma valores en el conjunto original D

"y" representa la variable dependiente y toma valores en el conjunto imagen $\mathbb{R}$

Una función se puede definir de varias maneras:

- Por medio de un cuadro de valores: FUNCIONES TABULADAS.
- Por medio de una expresión o fórmula matemática.
- Por medio de su gráfica.

En toda función debemos distinguir:

- DOMINIO: Se llama **dominio o campo de existencia** de una función al conjunto de valores x para los cuales está definida la ecuación $y = f(x)$, es decir, al conjunto de valores que tienen imagen; se representa por $D = Dom(f)$.

$$Dom(f) = D_f = \{\, x \in \mathbb{R} \;/\; f(x) = y \in \mathbb{R} \,\}$$

- RECORRIDO: Se llama "recorrido" de una función al conjunto de valores reales que son imagen de algún original, es decir, al conjunto de valores de la variable y.

  Se representa por $\operatorname{Im}(f)$.

$$\operatorname{Im}(f) = \{\, y \in \mathbb{R} \;/\; y = f(x) \text{ siendo } x \in D_f \,\}$$

Ejemplos:

➜ La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida de la forma $f(x) = x^2$ (función cuadrática) tiene por dominio $\mathbb{R}$ puesto que cualquier número real tiene cuadrado y su recorrido es $\mathbb{R}_+$ ya que el cuadrado de cualquier número real es positivo.

➜ La función $f : D \to \mathbb{R}$ definida de la forma $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ tiene sentido para todos los valores que no anulan el denominador, es decir, todos los valores x tales que $x^2 - 1 \neq 0$. Como los únicos valores que anulan el denominador son $x = -1$ y $x = 1$, el dominio máximo de la función será $D = \mathbb{R} - \{ -1, 1 \}$.

➜ La función $f : D \to \mathbb{R}$ definida de la forma $f(x) = +\sqrt{1 - x^2}$ tiene sentido para todos los valores que hagan que el radicando sea mayor o igual que cero, es decir, $1 - x^2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; 1 \geq x^2$ de donde $|x| \leq 1$. En consecuencia, el dominio máximo de nuestra función será $D = [-1, 1]$.

- Puesto que una función es una aplicación f de D en $\mathbb{R}$, podemos decir que una función es **inyectiva, sobreyectiva o biyectiva**, cuando lo sea la aplicación que la define.
  - La función lineal $f(x)=ax+b$ es una función biyectiva ya que es

    Inyectiva: Si $f(x)=f(x') \iff ax+b=ax'+b \iff x=x'$

    Sobreyectiva ya que para cualquier valor real y podemos encontrar el original correspondiente que tenga a y por imagen: $y=ax+b \Rightarrow x=\dfrac{y-b}{a}$

    En consecuencia, puesto que es inyectiva y sobreyectiva, es biyectiva.
  - La función $f(x)=x^2$ no es inyectiva ya que si

$$f(x)=f(x') \iff x^2=(x')^2 \iff \begin{cases} x=x' \\ x=-x' \end{cases}$$

  - La correspondencia $f:D\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\sqrt{x}$ no es una función para ningún dominio D ya que cualquier valor real positivo de x tendrá dos imágenes, una positiva y otra negativa. Si $\sqrt{x}$ la entendemos como $+\sqrt{x}$, entonces si es función.

- El dominio D puede ser un subconjunto no vacío cualquiera del conjunto de números reales $\mathbb{R}$.
  - Si $D=\mathbb{N}$ la funciones reciben el nombre de sucesiones de números reales.
  - Si $D=\mathbb{Z}$ las funciones se llaman funciones reales de variable entera.
  - Si $D=\mathbb{Q}$ las funciones se llaman funciones reales de variable racional.

IGUALDAD DE FUNCIONES.

Sean $f:D_1\to\mathbb{R}$ y $g:D_2\to\mathbb{R}$ dos funciones. Se dice que f es igual a g , y se escribe $f=g$, cuando se verifican las dos condiciones siguientes:

a) Tienen el mismo dominio: $D_1=D_2$

b) $f(x)=g(x)$ para cualquier x del dominio $D_1=D_2$.

Ejemplos:

- Las funciones $f(x)=(x-1)^2$ y $g(x)=x^2-2x+1$ son iguales ya que tienen el mismo dominio máximo $\mathbb{R}$ y además se verifica que $f(x)=g(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$.
- Las funciones $f(x)=x-1$ y $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ no son iguales ya que no tienen el mismo dominio máximo: la función f tiene por dominio $\mathbb{R}$ y la función g tiene por dominio máximo $\mathbb{R}-\{-1\}$.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN.

La representación gráfica de una función pretende visualizar la correspondencia entre las variables x e y de forma que se vean fácilmente sus propiedades. De aquí la gran importancia de la gráfica de una función: da una información rápida y amplia de la función.

GRAFO DE UNA FUNCIÓN

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. A cada $x \in D$ le hace corresponder un valor numérico $y = f(x)$ que es la imagen de x por f.

Se llama GRAFO de la función a un subconjunto G_f del producto cartesiano $D \times \mathbb{R}$ formado por los pares (x, y) tal que $y = f(x)$.

$$G_f = \left\{ (x, f(x)) \,/\, x \in D \right\}$$

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN:

Si consideramos un sistema de referencia afín, p.e. $R = \left\{ O\,;\, \vec{i},\ \vec{j} \right\}$, podemos representar los puntos del grafo G_f en el plano afín.

La figura del plano afín determinada por los puntos correspondientes a los elementos del grafo, recibe el nombre de GRÁFICA de la función. Es decir, es el lugar geométrico de los puntos del plano cuyas coordenadas verifican la ecuación $\boldsymbol{y = f(x)}$.

- Si el dominio de la función f es finito podemos representar todos los pares del grafo y obtener la gráfica completa.
- Si el dominio de la función f es infinito es imposible representar todos los pares del grafo. En la práctica, se representan los puntos necesarios de forma que al unirlos por un trazo continuo, se obtenga una gráfica que se aproxime a la real.

Para comprobar si un punto $P(a,b)$ pertenece o no a la gráfica de la función f, basta comprobar si se verifica la igualdad $b = f(a)$. Si se verifica pertenece y si no se verifica, no pertenece.

Dada la abscisa $\boldsymbol{x = a}$ de un punto de la gráfica de una función, para hallar la ordenada correspondiente, sólo tendremos que sustituir $\boldsymbol{x}$ por $\boldsymbol{a}$ en la definición de la función y así obtener $\boldsymbol{y = f(a)}$. La solución es única y existe, por tanto, un único punto de la gráfica con esa abscisa.

El problema inverso sería: Dada la ordenada $\boldsymbol{y = b}$ de un punto de la gráfica, obtener la abscisa correspondiente.

Para ello, se resuelve la ecuación $\boldsymbol{b = f(x)}$ que puede tener una, varias o infinitas soluciones que corresponderán con uno, varios o infinitos puntos de la gráfica de la función.

Para representar una función utilizamos unos ejes cartesianos que no son más que dos rectas que se cortan perpendicularmente en un punto que llamaremos ORIGEN de coordenadas y sus coordenadas serán $(0, 0)$. La recta horizontal recibe el nombre de EJE DE ABSCISAS y la vertical, EJE DE ORDENADAS.

En el eje de abscisas representaremos los originales (variable independiente): desde el origen hacia la derecha, los positivos y hacia la izquierda, los negativos.

En el eje de ordenadas representaremos las imágenes (variable dependiente): desde el origen hacia arriba, las positivas y hacia abajo, las negativas.

Los cortes de la gráfica de la función con el eje OX de abscisas reciben el nombre de CEROS DE UNA FUNCION. Son los originales que tienen por imagen el cero.

$$C(f) = \{\ x \in Dom(f)\ \ /\ f(x) = 0\ \}$$

Para calcular los ceros de una función no tendremos más que tomar la propia definición de la función y después de igualar a cero, resolver la ecuación que nos resulta.

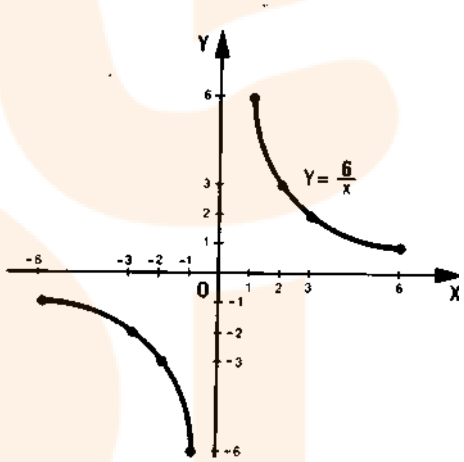
Ejemplos:

1. Representar la función $f : D \to \mathbb{R}$ donde $D = [-6, -1] \cup [1, 6]$ definida por $f(x) = \dfrac{6}{x}$.

   Calculamos la tabla de valores correspondientes:

x	$y = f(x)$	$P(x, f(x))$
–6	–1	$(-6, -1)$
–3	–2	$(-3, -2)$
–2	–3	$(-2, -3)$
–1	–6	$(-1, -6)$
-	-	-
1	6	$(1, 6)$
2	3	$(2, 3)$
3	2	$(3, 2)$
6	1	$(6, 1)$

y su gráfica nos quedaría de la forma:



2. Representar la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 2 \\ 3 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$

   La gráfica de esta función se compone de dos semirrectas: una para valores menores que 2, donde representaremos la función $f(x) = x$ que corresponde a la bisectriz del tercer cuadrante y del primero hasta el 2; otra, la $f(x) = 3$, función constante, que son los puntos de la forma $(x, 3)$. Con ello, la gráfica nos quedaría de la forma: