SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ***m*** ecuaciones con ***n*** incógnitas de la forma:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n &= b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + \cdots + a_{2n}\cdot x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}\cdot x_1 + a_{i2}\cdot x_2 + a_{i3}\cdot x_3 + \cdots + a_{in}\cdot x_n &= b_i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + a_{m3}\cdot x_3 + \cdots + a_{mn}\cdot x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \qquad (📖)$$

donde:

los a_{ij} son los **COEFICIENTES** (números o parámetros reales conocidos)

$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ son las **INCOGNITAS** o valores que hay que determinar

$b_1, b_2, \cdots, b_i, \cdots, b_m$ son los **TÉRMINOS INDEPENDIENTES** del sistema. Son números o parámetros conocidos.

En el caso particular de que todos los términos independientes sean nulos, el sistema recibe el nombre de **SISTEMA HOMOGÉNEO**.

Cuando el número de incógnitas es pequeño se suelen utilizar nombres distintos para cada una: *x*,*y*,*z*,*t*,...

EJEMPLO.

Un sistema de ecuaciones lineales es de la forma:

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 2 \\ x - 2y + z &= 0 \\ 3x \quad + 2z &= 5 \end{aligned}$$

SOLUCION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES.

Un conjunto de n valores $(s_1, s_2, s_3, \cdots, s_n)$ es solución del sistema (📖) cuando al sustituir dichos valores en lugar de las incógnitas las ecuaciones se transforman en identidades.

Ejemplo: En el sistema del ejemplo anterior, la terna (1,1,1) es decir *x*=1, *y*=1, *z*=1, es solución ya que

$$\begin{aligned} 2\cdot 1 + 1 - 1 &= 2 \\ 1 - 2\cdot 1 + 1 &= 0 \\ 3\cdot 1 \quad + 2\cdot 1 &= 5 \end{aligned}$$

RESOLVER un sistema de ecuaciones es hallar el conjunto de todas las soluciones del sistema.

EXPRESION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES EN FORMA MATRICIAL.

Sea un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas de la forma:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + \cdots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}\cdot x_1 + a_{i2}\cdot x_2 + a_{i3}\cdot x_3 + \cdots + a_{in}\cdot x_n = b_i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + a_{m3}\cdot x_3 + \cdots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{array}\right\}$$

En este sistema podemos considerar las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = A_{m\times n}$$ llamada **MATRIZ DE COEFICIENTES**

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$ $\equiv$ **MATRIZ COLUMNA DE COEFICIENTES**

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X_{n\times 1}$$ $\equiv$ **MATRIZ DE INCÓGNITAS**

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = B_{m\times 1}$$ $\equiv$ **MATRIZ DE TERMINOS INDEPENDIENTES**

Como las matrices A y X se pueden multiplicar (el número de columnas de A coincide con el número de filas de X), el sistema anterior podemos expresarlo en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

o de forma abreviada: $A \cdot X = B$.

También podríamos expresarlo como combinación lineal de las matrices columna de los coeficientes, de la forma:

$$A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3 + \cdots + A_n \cdot x_n = B$$

EJEMPLO:

El sistema

$$\left.\begin{aligned} 2x - \ y + 2z &= 5 \\ x + 2y \quad &= 5 \\ 3x + \ y + \ z &= 10 \end{aligned}\right\}$$

se expresaría en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

o también

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot y + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot z = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

CLASIFICACION DE LOS SISTEMAS.

Cuando resolvemos un sistema de ecuaciones lineales nos podemos encontrar ante las siguientes situaciones:

a) El sistema no tiene solución. En este caso recibe el nombre de **SISTEMA INCOMPATIBLE**.

b) El sistema tiene solución y se llama **SISTEMA COMPATIBLE**

Dentro de los sistemas compatibles se distinguen dos casos:

DETERMINADOS: si tienen solución única.

INDETERMINADOS: si tienen infinitas soluciones dependiendo de uno o más parámetros.

Para resolver sistemas hasta ahora se han utilizado los métodos de **SUSTITUCION, IGUALACION y REDUCCION**. *Veremos este curso otro método de resolución, el método de* **GAUSS**, *que nos viene a generalizar el método de reducción.*

SISTEMAS EQUIVALENTES.

Dos sistemas de ecuaciones se dice que son EQUIVALENTES si tienen el mismo conjunto solución, es decir, toda solución del primer sistema también lo es del segundo sistema y viceversa.

Evidentemente, dos sistemas equivalentes deben tener el mismo número de incógnitas, pero no es necesario que tengan el mismo número de ecuaciones.

Criterios de equivalencia.

1. Si en un sistema se cambia el orden de las ecuaciones o el de las incógnitas, el sistema que se obtiene es equivalente al primero (esencialmente es el mismo).
2. Si se multiplican o se dividen los dos miembros de una ecuación de un sistema por un número distinto de cero, resulta otro sistema equivalente al primero.
3. Si a una ecuación de un sistema se le suma o resta otra ecuación del mismo sistema, se obtiene otro sistema equivalente al primero.

   Si al sumar o restar ecuaciones resulta una ecuación incompatible del tipo $0 = k$, siendo $k \neq 0$, el sistema completo también lo es.

La utilización conjunta de los criterios 2 y 3 nos permitir eliminar incógnitas en las ecuaciones y pasar a otros sistemas equivalentes más fáciles de resolver.

EJEMPLOS.

a) Dado el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} -x+y+z=3 \\ x-y+z=4 \\ x+y-z=2 \end{array}\right\}$$

eliminar una incógnita en dos de las tres ecuaciones.

Si sumamos la primera ecuación a la segunda y tercera se obtiene el sistema

$$\left.\begin{array}{r} -x+y+z=3 \\ 2z=7 \\ 2y \quad\quad =5 \end{array}\right\}$$

que es equivalente al dado. La resolución del nuevo sistema es inmediata.

b) Dado el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x+\ \ y+\ \ z=2 \\ 2x+3y+5z=11 \\ x-5y+6z=29 \end{array}\right\}$$

eliminar la incógnita x en las dos últimas ecuaciones. En el sistema resultante, eliminar la y en el sistema parcial con dos incógnitas y, z formado por las dos últimas ecuaciones.

Para eliminar la x en la segunda ecuación se le resta a ésta el doble de la primera, y para eliminarla de la tercera se le resta simplemente la primera. El sistema resultante es:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+\ \ z=2 \\ y+3z=7 \\ -6y+5z=27 \end{array}\right\}$$

Para eliminar y en la tercera ecuación basta sumar a ésta la segunda multiplicada por 6. El sistema final es:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+\ \ \ z=2 \\ y+\ \ 3z=7 \\ 23z=69 \end{array}\right\}$$

Hemos obtenido un sistema triangular que es fácil de resolver.

4. Si en un sistema de ecuaciones lineales, una ecuación se expresa en función de otras ecuaciones del sistema, dicha ecuación se puede suprimir y el sistema resultante es equivalente al primero.

   En el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 2x-\ \ y=3 \\ x+\ \ y=0 \\ 5x-4y=9 \end{array}\right\}$$

   la tercera ecuación es tres veces la primera menos la segunda, y se dice que la tercera es función de las dos primeras. Por tanto, podemos suprimirla y el sistema que nos queda es

$$\left.\begin{array}{r} 2x-\ \ y=3 \\ x+\ \ y=0 \end{array}\right\}$$

METODO DE REDUCCIÓN O DE GAUSS.

El método de Gauss para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales consiste en *transformar el sistema dado en otro* ***de forma triangular*** *equivalente.*

Para conseguir esta triangulación del sistema dado, se aplican los criterios de equivalencia de la siguiente forma:

1. Se fija una primera ecuación y se elimina una incógnita de todas las demás menos de la primera.
2. A continuación se mantienen invariables las dos primeras ecuaciones y se sustituyen las demás por las que resultan de eliminar una segunda incógnita.
3. El proceso se continua hasta obtener un sistema en forma triangular cuya resolución es cómoda y fácil.

EJEMPLO 1.

- Resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} -x-\ \ y+\ \ z=1 \\ x+2y+3z=2 \\ 2x+3y+\ \ z=0 \end{array}\right\}$$

RESOLUCIÓN

Eliminamos la incógnita x en la segunda y tercera ecuaciones, sumando a la segunda, la primera y a la tercera, la primera multiplicada por 2. El sistema equivalente que nos quedaría sería el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} -x-y+z=1 \\ y+4z=3 \\ y+3z=2 \end{array}\right\}$$

Restando a la tercera ecuación la segunda, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} -x-y+z=1 \\ y+4z=3 \\ -z=-1 \end{array}\right\}$$

A partir de la tercera ecuación obtenemos: $z = 1$.

Sustituyendo este valor en la segunda ecuación y despejando y se obtiene: $y = -1$

Llevando estos valores a la primera ecuación, tenemos: $x = 1$.

En consecuencia, la solución del sistema es:

$$\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=-1 \\ z=1 \end{array}\right.$$

y el sistema sería **COMPATIBLE Y DETERMINADO**.

EJEMPLO 2.

- Resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 8x+y+4z=9 \\ 5x-2y+4z=6 \\ x+y\qquad=1 \end{array}\right\}$$

RESOLUCIÓN:

Aplicando el método de Gauss pasamos este sistema a uno que sea triangular:

$$\left.\begin{array}{r} 8x+y+4z=9 \\ 5x-2y+4z=6 \\ x+y\qquad=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Sustituimos:} \\ 2^{a}\,\text{E} \leftarrow 2^{a}\,\text{E} - 1^{a}\,\text{E} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 8x+y+4z=9 \\ -3x-3y\qquad=-3 \\ x+y\qquad=1 \end{array}\right.$$

Dividimos la segunda ecuación por -3, quedándonos:

$$\left.\begin{array}{r} 8x+y+4z=9 \\ x+y\qquad=1 \\ x+y\qquad=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Al haber dos ecuaciones iguales} \\ \text{suprimimos una de ellas} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 8x+y+4z=9 \\ x+y\qquad=1 \end{array}\right.$$

Llegada esta situación damos por terminada la triangulización del sistema por no tener más ecuaciones para eliminar las incógnitas. Como no aparece ninguna ecuación del tipo $0 = k$ con $k \neq 0$, el sistema será COMPATIBLE.

Por otra parte, no nos queda ninguna ecuación final en la que podamos despejar una incógnita (nos quedan más incógnitas que ecuaciones). Para obtener la solución del sistema hacemos lo siguiente:

Si asignamos a la incógnita z el valor de un parámetro λ cualquiera y lo pasamos al segundo miembro, podemos continuar la resolución del sistema quedando las posibles soluciones en función de dicho parámetro.

$$\left.\begin{array}{l} 8x+y=9-4\lambda \\ x+y=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Sustituimos:} \\ 2^{\text{a}}\,\text{E} \leftarrow 2^{\text{a}}\,\text{E} - 1^{\text{a}}\,\text{E} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 8x+y=9-4\lambda \\ -7x & =-8+4\lambda \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 8x+y=9-4\lambda \\ x=\dfrac{8-4\lambda}{7} \end{array}\right.$$

Sustituyendo el valor de x en la otra ecuación, nos queda:

$$\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{8-4\lambda}{7} \\ y=\dfrac{-1+4\lambda}{7} \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Para cada valor que le demos al parámetro, obtendremos una solución para el sistema, es decir el sistema tiene infinitas soluciones dependiendo de un parámetro.

En consecuencia, podemos decir que es un sistema **COMPATIBLE E INDETERMINADO.**

Si nos fijamos en los ejemplos desarrollados anteriormente, podemos observar que lo único que cambia mediante las transformaciones elementales son los coeficientes del sistema. Por tanto, podemos introducir éstos en una matriz y, en ella, efectuar tranformaciones elementales sobre las filas y, de esta manera, trabajaremos más cómodamente.

Veamos cómo quedarían los ejemplos anteriores trabajando con la matriz del sistema:

EJEMPLO 1.

- Resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} -x-\ \ y+\ \ z=1 \\ x+2y+3z=2 \\ 2x+3y+\ \ z=0 \end{array}\right\}$$

RESOLUCIÓN

Escribimos la matriz del sistema ampliándola con la columna de términos independientes:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Sobre esta matriz vamos a efectuar las misma transformaciones que antes hicimos con las ecuaciones del sistema, únicamente que ahora trabajaremos con las filas de la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \approx \left\{\begin{array}{l} \text{Sustituimos:} \\ 2^{\text{a}}\,\text{F} \leftarrow 2^{\text{a}}\,\text{F} + 1^{\text{a}}\,\text{F} \\ 3^{\text{a}}\,\text{F} \leftarrow 3^{\text{a}}\,\text{F} + 2\cdot 1^{\text{a}}\,\text{F} \end{array}\right\} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \approx$$

$$\approx \left\{\begin{array}{l} \text{Sustituimos:} \\ 3^{\text{a}}\,\text{F} \leftarrow 3^{\text{a}}\,\text{F} - 2^{\text{a}}\,\text{F} \end{array}\right\} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Una vez terminada la triangulización de la matriz, el sistema equivalente sería:

$$\left.\begin{array}{r} -x-y+z=1 \\ y+4z=3 \\ z=1 \end{array}\right\}$$

que resolveríamos igual que hemos hecho anteriormente.

EJEMPLO 2.

- Resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 8x+\ \ y+4z=9 \\ 5x-2y+4z=6 \\ x+\ \ y\qquad\ =1 \end{array}\right\}$$

RESOLUCIÓN

Escribimos la matriz ampliada del sistema y pasamos a triangulizarla:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 1 & 4 & 9 \\ 5 & -2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \approx \left\{\begin{array}{l} \text{Sustituimos:} \\ 2^{\text{a}}\,\text{F} \leftarrow 2^{\text{a}}\,\text{F} - 1^{\text{a}}\,\text{F} \end{array}\right\} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 1 & 4 & 9 \\ -3 & -3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \approx \left\{\begin{array}{l} \text{Dividimos la} \\ 2^{\text{a}}\,\text{F por } -3 \end{array}\right\} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

con lo que habríamos terminado la triangulación del sistema, quedándonos:

$$\left.\begin{array}{r}8x+y+4z=9\\x+y\qquad=1\end{array}\right\}$$

donde operaríamos igual que antes.

DISCUSION DE UN SISTEMA LINEAL POR EL MÉTODO DE GAUSS.

Consideremos un sistema general de **m** ecuaciones lineales con **n** incógnitas. Mediante el método de Gauss podemos pasar a otro sistema equivalente triangular sobre el que podemos hacer las siguientes consideraciones:

a) Si aparece alguna ecuación de la forma 0 = K, siendo K ≠ 0, el sistema dado es **INCOMPATIBLE**, es decir, no tiene solución.

b) Si no aparecen ecuaciones del tipo anterior, el sistema es **COMPATIBLE**. En este caso podemos distinguir dos situaciones:

1.-Si el número de ecuaciones no triviales es igual al número de incógnitas, el sistema es **COMPATIBLE DETERMINADO**, es decir, el sistema tiene solución única.
2.-Si el número de ecuaciones no triviales es menor que el número de incógnitas, el sistema es **COMPATIBLE INDETERMINADO** es decir, el sistema tiene infinitas soluciones dependiendo de uno o más parámetros.

Ejercicios propuestos:

Discutir y resolver los siguientes sistemas:

$$\left.\begin{array}{r}x-\ y-\ z=0\\2x+4y-\ z=-4\\-x+3y+4z=4\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{r}x-z=7\\y+z=8\\x+2y+3z=19\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{r}2x-y+3z=3\\4x-y+5z=5\\x+\qquad z=1\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}x-2y\qquad=-3\\2x+\ y-5z=4\\2x+3y+\ z=4\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{r}x-3y+\ z=0\\2x+\ y+\ 4z=3\\4x-5y+\ 6z=3\\7x-7y+11z=1\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{r}-x+2y-\ 3z=-2\\-x+8y-27z=\ 0\\x-\ y-\ z=-1\end{array}\right\}$$

SISTEMAS DE CRAMER.

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales $A.X=B$ es un sistema de Cramer si el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas y además $|A|\neq 0$.

Ejemplos:

1.-Comprobar si es de Cramer el sistema:

$$\begin{aligned} 2x + \ \ y + z &= 7 \\ x \qquad + z &= 4 \\ 3x - 2y + z &= 2 \end{aligned}$$

En principio, el número de ecuaciones coincide con el número de incógnitas. Nos faltaría por comprobar si el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 3 - 2 - 0 - (-4) - 1 = 4 \neq 0$$

y, por tanto, el sistema es de Cramer.

2.-Idem el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

El número de ecuaciones vuelve a coincidir con el número de incógnitas y el determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix} = 66 + 150 + 126 - 162 - 70 - 110 = 0$$

Por tanto, este sistema no es de Cramer.

<u>RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE CRAMER.</u>

Consideremos que el sistema $A.X = B$ sea un sistema de Cramer. Por ser A una matriz regular, tiene inversa y, por tanto,

$$A \cdot X = B \quad \Rightarrow \quad A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B$$

Teniendo en cuenta la defición de la matriz inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (Adj\ A)^t$$

y operando, nos queda:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{|A|} \cdot (Adj\ A)^t \cdot B = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} \cdot b_1 + A_{21} \cdot b_2 + \cdots + A_{n1} \cdot b_n \\ A_{12} \cdot b_1 + A_{22} \cdot b_2 + \cdots + A_{n2} \cdot b_n \\ \vdots \\ A_{1n} \cdot b_1 + A_{2n} \cdot b_2 + \cdots + A_{nn} \cdot b_n \end{pmatrix}$$

Identificando término a término, obtenemos:

$$x_1 = \frac{A_{11} \cdot b_1 + A_{21} \cdot b_2 + \cdots + A_{n1} \cdot b_n}{|A|}$$

$$x_2 = \frac{A_{12} \cdot b_1 + A_{22} \cdot b_2 + \cdots + A_{n2} \cdot b_n}{|A|}$$

....

$$x_j = \frac{A_{1j} \cdot b_1 + A_{2j} \cdot b_2 + \cdots + A_{nj} \cdot b_n}{|A|}$$

....

$$x_n = \frac{A_{1n} \cdot b_1 + A_{2n} \cdot b_2 + \cdots + A_{nn} \cdot b_n}{|A|}$$

Ahora bien, podemos observar que el numerador de cada fracción que nos da el valor de cada una de las incógnitas es la suma de los productos de los adjuntos de los elementos correspondientes a la columna que nos indica el subíndice de la incógnita por los términos independientes. Esto sería el desarrollo del determinante de la matriz de coeficientes *A* en la que habríamos sustituido la columna correspondiente al subíndice de la incógnita por la columna formada por los términos independientes. De esta forma, la resolución del sistema de Cramer nos quedaría:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

....

$$x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

<u>EJEMPLOS:</u>

Resolver:

π

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 4 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right\}$$

Debemos de comprobar, primeramente, que es un sistema de Cramer: el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas y el determinante de la matriz de coeficientes es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1+1+1-(-1)-1-(-1) = 4 \neq 0$$

Por tanto, es un sistema de Cramer.

Para resolverlo utilizamos el método que acabamos de obtener:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{6+0+4-0-6+4}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-4+6+0-4-0+6}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{4} = \frac{0+4+6+6-4-0}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

En consecuencia, la solución de nuestro sistema es: $x = 2$, $y = 1$, $z = 3$.

π

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 1 \\ 2x + y - 4z &= 2 \\ 3x + 4y - z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

El número de ecuaciones coincide con el número de incógnitas y el determinante de la matriz de coeficientes es

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -1+24+24-9+16-4 = 50 \neq 0$$

y nuestro sistema es de Cramer.

Resolvemos calculando, previamente, los determinantes correspondientes a cada una de las incógnitas:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -1+24+24-9+16-4 = 50$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

En consecuencia, la solución de nuestro sistema será:

$$x = \frac{50}{50} = 1, \qquad y = \frac{0}{50} = 0, \qquad z = \frac{0}{50} = 0$$

π Resolver:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + z &= -3 \\ 2x + 3y - 7z &= -7 \\ 3x + 2y - z &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} -2x - 4y + z &= 1 \\ 9x - y + 3z &= 0 \\ -5x + 3y - 2z &= -1 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x + z &= 6 \\ y + z &= 7 \end{aligned}\right\}$$

π Determinar los valores de a que hacen que el siguiente sistema sea un sistema de Cramer y resolverlo para esos valores:

$$\left.\begin{aligned} x + ay + z &= a + 1 \\ (a+1)x + y - az &= 0 \\ 2x + y - z &= 11 - a \end{aligned}\right\}$$

CRITERIO DE COMPATIBILIDAD. TEOREMA DE ROUCHÉ-FRÖBENIUS.

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales tenga solución (sea compatible) es que el rango de la matriz de coeficientes sea igual al rango de la matriz que se obtiene ampliando la matriz de coeficientes con la columna formada por los términos independientes.

SISTEMA COMPATIBLE ⇔ $r(A) = r(A^*)$

siendo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

DEMOSTRACION:

1.-Consideremos que el sistema sea compatible y supongamos que $s(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ es una solución del sistema. Utilizando la notación $A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + \cdots + A_n \cdot x_n = B$ se verificará

$$A_1 \cdot s_1 + A_2 \cdot s_2 + \cdots + A_n \cdot s_n = B$$

por lo que la columna B es combinación lineal de las columnas $A_1, A_2, \cdots, A_n$ y, en consecuencia,

$$r(A_1, A_2, \cdots, A_n) = r(A_1, A_2, \cdots, A_n, B) \qquad \Rightarrow \qquad r(A) = r(A^*)$$

2.-Supongamos ahora que $r(A) = r(A^*)$. Esto significa que

$$r(A_1, A_2, \cdots, A_n) = r(A_1, A_2, \cdots, A_n, B)$$

y, por tanto, B es combinación lineal de las restantes columnas; es decir que existen unos números $s_1, s_2, \cdots, s_n$ tales que

$$A_1 \cdot s_1 + A_2 \cdot s_2 + \cdots + A_n \cdot s_n = B$$

En consecuencia, $s(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ es una solución del sistema y, entonces, éste será compatible.

OBSERVACIONES:

Teniendo en cuenta la clasificación de los sistemas por el número de soluciones y el teorema de Rouché-Fröbenius, llegamos a las siguientes conclusiones:

1.-Si $r(A) \neq r(A^*)$ $\Rightarrow$ el sistema es incompatible y no tiene solución.

2.-Si $r(A) = r(A^*) = r$, tenemos dos posibilidades:

2.1 $r = n$ (número de incógnitas), el sistema es compatible y determinado y tiene solución única. El sistema se resuelve por el método de Cramer.

2.2 $r < n$, el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones, dependiendo de $n - r$ parámetros.
Para resolver este tipo de sistemas se procede de la siguiente manera:

Sea r el rango de la matriz del sistema que coincide con el de la ampliada por ser el sistema compatible. Se eligen r ecuaciones independientes (las correspondientes a las filas que nos dan el rango) y se pasan al segundo miembro las incógnitas que no intervienen en el rango, quedando un sistema de **r** ecuaciones con **r** incógnitas (sistema de Cramer). A las incógnitas que se pasan al segundo miembro se le asignan los valores de unos parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ que pueden tomar cualquier valor real. De este modo, todas las incógnitas se pueden expresar en función de estos parámetros.

4 Si la solución depende de un sólo parámetro, se dice que el sistema es uniparamétrico.
4 Si la solución depende de dos parámetros, el sistema es biparamétrico.

EJEMPLOS.

1.-Resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ 2x + y + 2z &= 2 \\ 3x + 3y + 3z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Podemos observar que la tercera ecuación es suma de las dos primeras, con lo que el sistema queda reducido a

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ 2x + y + 2z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Las matrices de coeficientes A y ampliada A correspondientes son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

El $r(A) = r(A^*)$ puesto que el menor formado por las dos primeras filas y columnas es $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow$ el sistema es compatible.

Como el rango es menor que el número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado.

La incógnita que no interviene en el menor que nos da el rango es la z y, a ésta, le asignamos el valor de un parámetro λ pasándola al segundo miembro. El sistema nos queda de la forma:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 1 - \lambda \\ 2x + \ \ y &= 2 - 2\lambda \end{aligned}\right\}$$

que es un sistema de Cramer.

Resolviendo:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2-2\lambda & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(1-\lambda) - 2(2-2\lambda)}{-3} = \frac{-3+3\lambda}{-3} = 1 - \lambda$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 2 & 2-2\lambda \end{vmatrix}}{-3} = \frac{(2-2\lambda) - 2(1-\lambda)}{-3} = 0$$

En consecuencia, la solución del sistema será:

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \quad \lambda \end{cases}$$

y las infinitas soluciones del sistema depende de un parámetro.

2.-Resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} x - y + 3z &= 1 \\ 3x - y + 2z &= 3 \\ -2y + 7z &= 10 \end{aligned}\right\}$$

Las matrices de coeficientes y ampliada del sistema serán:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

Calculamos los rangos de ambas matrices:

Rango(A):

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1+3=2\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{por lo menos} \quad r(A)=2$$

Veamos si puede ser 3: Tomamos un menor de orden tres que coincide con la propia matriz y calculamos su valor

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix} = -7+0-18-0+4+21=0$$

Por tanto, el $r(A)=2$.

Rango (A^*):

Puesto que al calcular el rango de A ya tenemos un menor de orden 2 distinto de cero, ampliamos al de orden 3. El que coincide con el determinante de la matriz A podemos evitarlo ya que sabemos que es nulo; entonces sustituimos la tercera columna por la de los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} = -10+0-6-0+6+30=20\neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(A^*)=3$$

En consecuencia, $r(A)\neq r(A^*)$ $\Rightarrow$ el sistema es incompatible y no tiene solución.

3.-Resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} x-3y+5z &= -24 \\ 2x-\ y+4z &= -8 \\ x+\ y \qquad &= 9 \end{aligned}\right\}$$

Las matrices del sistema serán:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -24 \\ 2 & -1 & 4 & -8 \\ 1 & 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Estudiamos los rangos de las matrices asociadas al sistema:

A simple vista podemos observar que el rango de la matriz A es, por lo menos, 2 ya que el menor principal de orden 2 es distinto de cero. Comprobamos el rango 3 calculando el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0-12+10+5-4-0=-1 \neq 0$$

En consecuencia, el $r(A) = 3$.

El rango de la matriz ampliada también sería tres, puesto que no podemos formar en ella menores de orden superior.

En consecuencia, $r(A) = r(A^*) = 3 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible y determinado y tiene solución única. Por tanto, es un sistema de Cramer que resolvemos directamente:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -24 & -3 & 5 \\ -8 & -1 & 4 \\ 9 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -7 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & -24 & 5 \\ 2 & -8 & 4 \\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -2 \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -24 \\ 2 & -1 & -8 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 5$$

Entonces:

$$x = \frac{-7}{-1} = 7 \qquad y = \frac{-2}{-1} = 2 \qquad z = \frac{5}{-1} = -5$$

Ejercicios propuestos:

Discutir y resolver los siguientes sistemas:

$$\left.\begin{aligned} x - y - z &= 0 \\ 2x + 4y - z &= -4 \\ -x + 3y + 4z &= 4 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x - z &= 7 \\ y + z &= 8 \\ x + 2y + 3z &= 19 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 3 \\ 4x - y + 5z &= 5 \\ x + z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x - 2y &= -3 \\ 2x + y - 5z &= 4 \\ 2x + 3y + z &= 4 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x - 3y + z &= 0 \\ 2x + y + 4z &= 3 \\ 4x - 5y + 6z &= 3 \\ 7x - 7y + 11z &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} -x + 2y - 3z &= -2 \\ -x + 8y - 27z &= 0 \\ x - y - z &= -1 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= 1 \\ x - 2y + z &= 0 \\ 3x - y + 2z &= 4 \\ 2x + 5y - 9z &= 7 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 3x - 2y &= 4 \\ 2x + y &= 5 \\ -x + 3y &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x - 2y + 3x &= 2 \\ 2x + y - z &= 2 \\ 3x - y + 2z &= 4 \end{aligned}\right\}$$

SISTEMAS DEPENDIENTES DE UNO O MAS PARÁMETROS

En determinadas ocasiones alguno de los coeficiente puede ser un parámetro **“m”** que toma valores en el conjunto de números reales. Según los valores que tome dicho parámetro el sistema puede ser compatible o no.

La discusión de este tipo de sistemas está en determinar como es el sistema para cada valor del parámetro y podemos hacerla por cualquiera de los métodos de resolución vistos. Veamos algún ejemplo:

π **Discutir y resolver el sistema:**

$$\left.\begin{aligned} x+\ 2y&=3\\ 2x-\ \ y&=1\\ 4x+my&=7\end{aligned}\right\}$$

según los valores del parámetro *m*.

Aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius:

Consideremos las matrices del sistema:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\\ 4 & m\end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 4 & m & 7\end{pmatrix}$$

Puesto que la matriz A es de dimensión 3×2, su mayor rango podrá ser 2. La matriz A^* es de dimensión 3×3 y su rango podrá ser 3. Los valores del parámetro "***m***" para los cuales el $|A^*|$ sea distinto de cero, harán que el sistema sea incompatible puesto que tendríamos $r(A) = 2$ y $r(A^*) = 3$.

Para estudiar los valores que hacen $|A^*|\neq 0$, es más cómodo ver cuales lo anulan:

$$|A^*|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 4 & m & 7\end{vmatrix}=-7+8+6m+12-28-m=5m-15$$

Anulamos: $5m - 15 = 0 \quad\Rightarrow\quad m = 3$.

¬ Si $m\neq 3 \Rightarrow r(A) = 2$ y $r(A^*) = 3 \Rightarrow$ el sistema será incompatible.
¬ Si $m = 3 \Rightarrow r(A) = r(A^*) = 2 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible y determinado.

Nos quedamos con las dos primeras ecuaciones que nos dan el rango 2 y resolvemos el sistema resultante que será de Cramer:

$$\left.\begin{aligned} x+2y&=3\\ 2x-y&=1\end{aligned}\right\}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}}=\frac{-5}{-5}=1 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}}{-5}=\frac{-5}{-5}=1$$

y la solución sería $x = 1$ e $y = 1$.

Aplicando el método de Gauss, triangulizamos es sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=3 \\ 2x-\ \ y=1 \\ 4x+my=7 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Sustituimos:} \\ 2^{\text{a}}\text{E} \leftarrow 2^{\text{a}}\text{E}-2\cdot 1^{\text{a}}\text{E} \\ 3^{\text{a}}\text{E} \leftarrow 3^{\text{a}}\text{E}-4\cdot 1^{\text{a}}\text{E} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+2y=3 \\ -5y=-5 \\ (m-8)y=-5 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+2y=3 \\ y=1 \\ (m-8)y=-5 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Sustituimos:} \\ 3^{\text{a}}\text{E} \leftarrow 3^{\text{a}}\text{E} - (m-8)\cdot 2^{\text{a}}E \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+2y=3 \\ y=1 \\ 0\cdot y=-m+3 \end{array}\right.$$

Discusión:

Observando el sistema triangulizado podemos ver que si (-m+3) es distinto de cero, tenemos una ecuación del tipo 0 = k, con k ≠ 0, y, por tanto, el sistema sería incompatible.

- Si $-m+3\neq 0 \Rightarrow$ m ≠ 3 ⇒ Sistema incompatible.
- Si m = 3, no aparece ninguna ecuación del tipo anterior y el sistema es COMPATIBLE; el sistema nos queda de la forma:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=3 \\ y=1 \end{array}\right\}$$

sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que es determinado y la solución única es $x = 1$; $y = 1$.

En resumen:

- Si m ≠ 3 ⇒ Sistema incompatible
- Si m = 3 ⇒ Sistema compatible y determinado
  Solución única: $x = 1$; $y = 1$

<u>**Ejercicios.**</u>

π **Discutir los siguientes sistemas según los valores de los parámetros:**

$$\left.\begin{array}{r} mx+\ \ y+3z=3 \\ x-\ \ y-\ \ z=0 \\ 5x-3y-2z=6 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 3x-2y+\ \ z=1 \\ 4x+\ \ y-\ 2z=2 \\ x+5y-mz=1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x+\ \ y+2z=\ \ 0 \\ mx+\ \ y-\ \ z=m-2 \\ 3x+my+\ \ z=m-2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x+\ \ y+\qquad z=a-1 \\ ax+\ \ y+(a-1)z=\ a \\ x+ay+\qquad z=\ 1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} (a+2)x+\qquad y+\qquad z=a-1 \\ ax+(a-1)y+\qquad z=a-1 \\ (a+1)x+\qquad (a-1)z=a-1 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+\ y+\ z=\ 2 \\ x+2y-3z=\ 8 \\ mx-\ y-\ z=\ 1 \\ x-\ y+\ z=-2 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x+\ y-\ z=\ 3 \\ 3x+4y-\ z=\ 5 \\ x+\ y-\ mz=\ 3 \\ mx+2y+(m+2)z=m^2-2 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 2x+y=1 \\ x+y-2z=1 \\ 3x+y+mz=n \end{array}\right\}$$

SISTEMAS HOMOGÉNEOS. PROPIEDADES MÁS IMPORTANTES.

Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es **HOMOGÉNEO** si todos sus términos independientes son nulos, es decir, tiene la forma:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+a_{13}\cdot x_3+\ \cdots\ +a_{1n}\cdot x_n=0 \\ a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+a_{23}\cdot x_3+\ \cdots\ +a_{2n}\cdot x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}\cdot x_1+a_{i2}\cdot x_2+a_{i3}\cdot x_3+\ \cdots\ +a_{in}\cdot x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\cdot x_1+a_{m2}\cdot x_2+a_{m3}\cdot x_3+\ \cdots\ +a_{mn}\cdot x_n=0 \end{array}\right\}$$

En notación matricial nos queda $A\cdot X=0$ y en forma vectorial

$$A_1\cdot x_1+A_2\cdot x_2+\ \cdots\ +A_n\cdot x_n=0$$

PROPIEDADES.

∂ Los sistemas lineales homogéneos siempre tienen solución ya que siempre admiten la solución $(0,0,\ \cdots\ ,0)\in \mathbb{R}^n$ llamada **SOLUCION TRIVIAL o NULA** porque es solución de todo sistema homogéneo.

- De acuerdo con la discusión general de sistemas, un sistema homogéneo es siempre compatible, ya que si aplicamos el teorema de Rouché-Fröbenius siempre se verifica que $r(A)=r(A^*)$ puesto que los términos independientes son todos nulos. Sin embargo, se suelen considerar compatibles, solamente, los sistemas homogéneos que tienen soluciones distintas de la trivial.

  Según esto, la discusión de un sistema homogéneo nos quedará de la siguiente forma:

  ¬ Si r(A) = n, el sistema será incompatible y sólo admite la solución trivial.

  ¬ Si r(A) < n, el sistema será compatible e indeterminado y, por tanto, admite infinitas soluciones distintas de la trivial.

Como consecuencia de esta discusión se deduce que:

÷ La condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales homogéneo tenga solución distinta de la trivial es que el rango de la matriz de coeficientes A sea menor que el número de incógnitas.

La condición necesaria y suficiente para que un sistema lineal homogéneo, de igual número de ecuaciones que de incógnitas, tenga soluciones distintas de la trivial es que el determinante de la matriz de coeficientes sea nulo.

≠ Si "*s*" y "*t*" son soluciones del sistema homogéneo, entonces "*s* + *t*" también es solución del mismo sistema.

≡ Si "*s*" es una solución del sistema homogéneo y k es un número real no nulo, entonces "k.*s*" también es solución del sistema homogéneo.

Ejemplo 1.

Resolver el siguiente sistema homogéneo

$$\left.\begin{array}{r} x+y-2z=0 \\ 2x-y-3z=0 \\ 3x-2y-z=0 \end{array}\right\}$$

POR GAUSS: Triangulizamos el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x+y-2z=0 \\ 2x-y-3z=0 \\ 3x-2y-z=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Sustituimos:} \\ 2^{\text{a}}\,\text{E} \leftarrow 2^{\text{a}}\,\text{E}-2\cdot 1^{\text{a}}\,\text{E} \\ 3^{\text{a}}\,\text{E} \leftarrow 3^{\text{a}}\,\text{E}-3\cdot 1^{\text{a}}\,\text{E} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+\;\;y-2z=0 \\ -3y+\;\;z=0 \\ -5y+5z=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Sustituimos:} \\ 2^{\text{a}}\,\text{E} \leftarrow 5\cdot 2^{\text{a}}\,\text{E} \\ 3^{\text{a}}\,\text{E} \leftarrow 3\cdot 3^{\text{a}}\,\text{E} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+\;\;\;y-\;\;2z=0 \\ -15y+\;\;5z=0 \\ -15y+15z=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Sustituimos:} \\ 3^{\text{a}}\,\text{E} \leftarrow 3^{\text{a}}\,\text{E}-2^{\text{a}}\,\text{E} \\ \text{y simplificamos la } 2^{\text{a}}\,\text{E} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+y-2z=0 \\ -3y+\;\;z=0 \\ 10z=0 \end{array}\right.$$

Nos quedan 3 ecuaciones no triviales y 3 incógnitas ⇒ el sistema es compatible y determinado y tiene solución única:

$$x=0 \qquad y=0 \qquad z=0$$

POR ROUCHÉ-FRÖBENIUS: Escribimos la matriz de coeficientes del sistema

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

A simple vista podemos observar que existen menores de orden dos distintos de cero, por lo que probamos el menor de orden tres:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 9 + 8 - 6 - 6 + 2 = -10 \neq 0$$

Por tanto, el $r(A)$ = 3 = número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible y determinado: sólo tenemos la solución trivial:

$$x = 0 \qquad y = 0 \qquad z = 0$$

Ejemplo 2. Resolver el siguiente sistema homogéneo:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \end{array}\right\}$$

POR GAUSS: Triangulizamos el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Sustituimos:} \\ 2^{a}\,\mathrm{E} \leftarrow 2^{a}\,\mathrm{E} - 1^{a}\,\mathrm{E} \\ 3^{a}\,\mathrm{E} \leftarrow 3^{a}\,\mathrm{E} - 2 \cdot 1^{a}\,\mathrm{E} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{array}\right.$$

Nos quedan dos ecuaciones no triviales con tres incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible e indeterminado. Para obtener la solución hacemos $z = \lambda$ (un parámetro real) y nos queda:

$$\left.\begin{array}{r} y + 2\lambda = 0 \\ x + y + \lambda = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -2\lambda \\ x - 2\lambda + \lambda = 0 \end{array}\right. \Rightarrow x - \lambda = 0 \Rightarrow x = \lambda$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$\left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \text{ donde } \lambda \in \mathrm{R}$$

POR ROUCHÉ-FRÖBENIUS: Matriz del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Rango de la matriz: el menor de orden dos formado por las dos primeras filas y las dos primeras columnas es distinto de cero, por lo que el rango de A por lo menos es dos. Probamos si puede ser tres:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 6 + 3 - 4 - 9 - 4 = 0 \Rightarrow r(A) = 2$$

En consecuencia nos quedamos con las dos primeras ecuaciones y pasamos la tercera incógnita al segundo miembro, quedándonos:

$$\left.\begin{array}{r} x + \ \ y = - \ z \\ x + 2y = -3z \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{ \text{Haciendo} \quad z = \lambda \right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + \ \ y = - \ \lambda \\ x + 2y = -3\lambda \end{array}\right.$$

que resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -3\lambda & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-2\lambda + 3\lambda}{1} = \lambda \qquad\qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & -3\lambda \end{vmatrix}}{1} = -3\lambda + \lambda = -2\lambda$$

Por tanto, la solución del sistema será:

$$\left.\begin{array}{l} x = \ \ \ \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \ \ \ \lambda \end{array}\right\} \quad \text{donde} \quad \lambda \in \mathrm{R}$$

<u>Observaciones sobre el conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo.</u>

(Método de Gauss).

∂ Si al triangulizar un sistema lineal homogéneo por el método de Gauss obtenemos el mismo número de ecuaciones que de incógnitas el sistema es imcompatible y sólo tiene la solución trivial.

• Si el número de ecuaciones es una unidad inferior al de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado. El conjunto de soluciones depende de un parámetro.

÷ Si el número de incógnitas es n y r el número de ecuaciones no triviales que nos quedan, el sistema es compatible e indeterminado y el conjunto de soluciones depende de "n – r" parámetros.

<u>EJERCICIOS</u>

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 5y + 3z = 0 \\ 2x - \ \ y \qquad = 0 \\ -x + \ \ y - \ \ z = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - \ \ y + 2z = 0 \\ 3x + \ \ y - \ \ z = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} -2x - 14y + 6z = 0 \\ - \ x - \ 7y + 3z = 0 \\ 2x - \ 3y + \ \ z = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x + \ \ y - \ \ \ z = 0 \\ x \qquad + \ \ 3z = 0 \\ x + 2y - 11z = 0 \\ 2x + 3y - 15z = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x - \ \ y + \ \ z + 2t = 0 \\ 3x - \ \ y - \ \ z \qquad = 0 \\ 4x + 2y - 2z - \ \ t = 0 \\ x + \ \ y - \ \ z - \ \ t = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x + 2y - 3z - \ \ t = 0 \\ 2x + 3y + 4z + 5t = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}2x-ky+\ 4z=0\\ x+\ \ y+\ \ kz=0\\ kx-\ \ y+13z=0\end{array}\right\}\qquad \left.\begin{array}{r}x+\qquad ky-kz=0\\ 12x-(k-2)y-2z=0\\ kx-\qquad 2y+\ \ z=0\end{array}\right\}\qquad \left.\begin{array}{r}6x+11y-2kz=0\\ 7x-\ 2y-\ 4z=0\\ 4x+10y-\ 6z=0\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}ax+\qquad y-\ \ z=0\\ (a+1)x+\qquad y-az=0\\ x+(a+1)y\qquad =0\end{array}\right\}\qquad \left.\begin{array}{r}x+\ \ y+\ \ az=0\\ 3x+2y+4az=0\\ 2x+\ \ y+\ \ 3z=0\end{array}\right\}\qquad \left.\begin{array}{r}(a-2)x-\qquad y+\ \ z=0\\ x+(2a-1)y-az=0\\ x+\qquad ay-\ \ z=0\end{array}\right\}$$

Veamos como podemos estudiar la dependencia e independencia lineal de un conjunto de vectores basándonos en los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos.

Sea V un espacio vectorial real de dimensión $\boldsymbol{n}$, $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ \cdots\ ,\vec{u}_n\}$ una base del mismo y $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ \cdots\ ,\vec{v}_m\}$ un conjunto de m vectores de los que tratamos de estudiar su dependencia lineal.

Consideremos que las coordenadas de los vectores $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ \cdots\ ,\vec{v}_m$ respecto de la base B sean:

$$\begin{array}{l}\vec{v}_1=(a_{11},a_{12},\ \cdots\ ,a_{1n})\\ \vec{v}_2=(a_{21},a_{22},\ \cdots\ ,a_{2n})\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \vec{v}_m=(a_{m1},a_{m2},\ \cdots\ ,a_{mn})\end{array}$$

Teniendo en cuenta las definiciones de dependencia e independencia lineal, si

$$\lambda_1\cdot\vec{v}_1+\lambda_2\cdot\vec{v}_2+\ \cdots\ +\lambda_m\cdot\vec{v}_m=0\quad\Rightarrow\quad\lambda_1=\lambda_2=\ \cdots\ =\lambda_m=0$$

entonces los vectores son linealmente independientes, y en caso contrario, si alguno de los λ_i es distinto de cero, los vectores serán linealmente dependientes.

Operando con las coordenadas de los vectores, tendremos:

$$\lambda_1\cdot(a_{11},a_{12},\ \cdots\ ,a_{1n})+\lambda_2\cdot(a_{21},a_{22},\ \cdots\ ,a_{2n})+\ \cdots\ +\lambda_m\cdot(a_{m1},a_{m2},\ \cdots\ ,a_{mn})=(0,0,\cdots,0)$$

de donde:

$$\left.\begin{array}{l}a_{11}\cdot\lambda_1+a_{21}\cdot\lambda_2+\ \cdots\ +a_{m1}\cdot\lambda_m=0\\ a_{12}\cdot\lambda_1+a_{22}\cdot\lambda_2+\ \cdots\ +a_{m2}\cdot\lambda_m=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{1n}\cdot\lambda_1+a_{2n}\cdot\lambda_2+\ \cdots\ +a_{mn}\cdot\lambda_m=0\end{array}\right\}$$

que es un sistema de ecuaciones lineales homogéneo de $\boldsymbol{n}$ ecuaciones con $\boldsymbol{m}$ incógnitas $\lambda_1,\lambda_2,\ \cdots\ ,\lambda_m$.

Aplicando la discusión de sistemas homogéneos, tendremos:

a) Si tenemos soluciones distinta de la trivial $(\lambda_1,\lambda_2,\ \cdots\ ,\lambda_m)\neq(0,0,\ \cdots\ ,0)$, el rango de la matriz de coeficientes tiene que ser menor que el número de incógnitas

$$rango\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} < m$$

y los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m$ serán linealmente dependientes.

b) Si

$$rango\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = m$$

entonces el sistema homogéneo será incompatible y sólo tendrá la solución trivial, es decir que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$ y, por tanto, los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m$ serán linealmente independientes.

Volvemos a llegar al mismo resultado del tema de matrices dónde el rango de una matriz nos daba el número de vectores linealmente independientes:

En consecuencia, para estudiar la dependencia e independencia lineal de un conjunto de vectores estudiamos el rango de la matriz formada con las coordenadas de los vectores:

¬ Si el rango es menor que el número de vectores, éstos serán linealmente dependientes.
¬ Si el rango es igual al número de vectores, éstos son linealmente independientes.

Con todo esto simplificamos el proceso visto en el tema de espacios vectoriales.

Ejemplo:

π Estudiar la dependencia e independencia lineal de los vectores:

$$(3,2,-1),\ (2,1,3),\ (1,1,-4),\ (1,0,7)$$

Resolución:

Formamos la matriz correspondiente con las coordenadas de los vectores y estudiamos su rango:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Vemos a simple vista que el menor principal de orden dos es distinto de cero y, por tanto, por lo menos el rango de la matriz es dos. Veamos si puede ser tres:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 2 + 6 + 1 - 9 + 16 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 21 + 0 + 6 + 1 - 0 + 28 = 0$$

Todos los menores de orden tres que hemos podido formar en la matriz son nulos y, por tanto, el rango de la matriz es dos y los vectores son linealmente dependientes.

El ser dos el rango de la matriz, significa que sólo tenemos dos vectores linealmente independientes en nuestro conjunto: nos quedaremos con los vectores que nos han dado el menor de orden dos distinto de cero.

$$(3,2,-1),\ (2,1,3)$$

ELIMINACIÓN DE PARÁMETROS.

Sabemos que un subespacio vectorial es un espacio vectorial dentro de otro espacio vectorial y como tal podrá tener su sistema generador, su base, etc.

Sea V un espacio vectorial real de dimensión ***n***, $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\}$ una base del mismo y W el subespacio vectorial generado por los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_m$ cuyas coordenadas respecto de la base B son:

$$\begin{aligned} &\vec{v}_1 = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}) \\ &\vec{v}_2 = (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\vec{v}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn}) \end{aligned}$$

Cualquier vector $\vec{x}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in W$ podrá escribirse como combinación lineal de los vectores del sistema generador de W de la forma:

$$\vec{x} = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + \lambda_m \cdot \vec{v}_m$$

Operando con las coordenadas de los vectores, tendremos:

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \lambda_1 \cdot (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}) + \lambda_2 \cdot (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}) + \cdots + \lambda_m \cdot (a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn})$$

de donde se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11} \cdot \lambda_1 + a_{21} \cdot \lambda_2 + \cdots + a_{m1} \cdot \lambda_m \\ x_2 = a_{12} \cdot \lambda_1 + a_{22} \cdot \lambda_2 + \cdots + a_{m2} \cdot \lambda_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = a_{1n} \cdot \lambda_1 + a_{2n} \cdot \lambda_2 + \cdots + a_{mn} \cdot \lambda_m \end{cases}$$

que recibe el nombre de ***ecuaciones paramétricas*** del subespacio vectorial *W*.

Si en estas ecuaciones fuésemos dando valores a los distintos parámetros, para cada uno de ellos obtendríamos en vector del subespacio *W*. El problema que se nos plantea en este momento es tratar de eliminar los parámetros del sistema anterior.

Consideremos las matrices del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} & x_1 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} & x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} & x_n \end{pmatrix}$$

Si el subespacio *W* es no vacio, habrá algún vector $\vec{x} \in W$, lo que nos indicaría que el sistema tendría que ser compatible y, por el teorema de Rouché-Fröbenius, se verificará que $rango(A) = rango(A^*)$

Si $rango(A) = r$ entonces, tiene que existir un menor no nulo de orden *r* en la matriz *A*

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{r1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{r2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1r} & a_{2r} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

y todos los de orden superior, $r + 1$, serán nulos.

Para que el sistema sea compatible (tenga solución) se tendrá que verificar que el $rango(A^*) = r$, lo que podemos conseguir anulando todos los menores de orden $r + 1$ que se puedan formar añadiendo al menor de orden *r* distinto de cero las sucesivas filas y la columna de las x_i:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{r1} & x_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1r} & \cdots & a_{rr} & x_r \\ a_{1,r+1} & \cdots & a_{r,r+1} & x_{r+1} \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{r1} & x_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1r} & \cdots & a_{rr} & x_r \\ a_{1n} & \cdots & a_{rn} & x_n \end{vmatrix} = 0$$

con lo que obtenemos un conjunto de $n - r$ ecuaciones que recibe el nombre de ***ecuaciones implícitas o cartesianas*** del subespacio vectorial *W*.

Desarrollando los determinantes anteriores, las ecuaciones pueden escribirse de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} b_{11} \cdot x_1 + b_{12} \cdot x_2 + \cdots + b_{1n} \cdot x_n = 0 \\ b_{21} \cdot x_1 + b_{22} \cdot x_2 + \cdots + b_{2n} \cdot x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n-r,1} \cdot x_1 + b_{n-r,2} \cdot x_2 + \cdots + b_{n-r,n} \cdot x_n = 0 \end{array}\right\}$$

Ejemplo:

- Eliminar los parámetros λ, μ y ν en el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 - \lambda + \mu \\ y = 2\lambda - \mu \\ z = 1 + \lambda + \mu + \nu \\ t = 3 - \mu - \nu \end{array}\right\}$$

Dejamos el sistema en función de las incógnitas que son los parámetros:

$$\left.\begin{array}{r} -\lambda + \mu = x - 2 \\ 2\lambda - \mu = y \\ \lambda + \mu + \nu = z - 1 \\ -\mu - \nu = t - 3 \end{array}\right\}$$

y escribimos las matrices del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & x-2 \\ 2 & -1 & 0 & y \\ 1 & 1 & 1 & z-1 \\ 0 & -1 & -1 & t-3 \end{pmatrix}$$

Para que el sistema sea compatible se tendrá que verificar que $rango(A) = rango(A^*)$, por lo que vamos a estudiar el rango de la matriz *A*:

Al ser $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ por lo menos el rango de *A* será 2, pasando a comprobar si puede ser 3:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Al ser distinto de cero, el *rango*(*A*) = 3 y no puede ser mayor puesto que no podemos formar menores de orden superior.

En consecuencia, $rango(A) = 3$

Para que $rango(A^*)$ sea 3, el único menor de orden cuatro que podemos formar en ella tiene que ser nulo. Por tanto:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & x-2 \\ 2 & -1 & 0 & y \\ 1 & 1 & 1 & z-1 \\ 0 & -1 & -1 & t-3 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando este determinante, obtenemos:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & x-2 \\ 2 & -1 & 0 & y \\ 1 & 1 & 1 & z-1 \\ 0 & -1 & -1 & t-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Sustituimos \\ 4^a F \leftarrow 4^a F + 3^a F \end{array}\right\} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & x-2 \\ 2 & -1 & 0 & y \\ 1 & 1 & 1 & z-1 \\ 1 & 0 & 0 & z+t-4 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & x-2 \\ 2 & -1 & 0 & y \\ 1 & 1 & 1 & z-1 \\ 1 & 0 & 0 & z+t-4 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 & x-2 \\ 2 & -1 & y \\ 1 & 0 & z+y-4 \end{vmatrix} = \left\{\begin{matrix} \textit{Sustituimos:} \\ 2^{a}F \leftarrow 2^{a}F + 1^{a}F \end{matrix}\right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & x-2 \\ 1 & 0 & x+y-2 \\ 1 & 0 & z+t-4 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} 1 & x+y-2 \\ 1 & z+t-4 \end{vmatrix} = -(z+t-4-x-y+2) = 0$$

En consecuencia la ecuación implícita resultante de la eliminación de los parámetros es: $x+y-z-t+2=0$