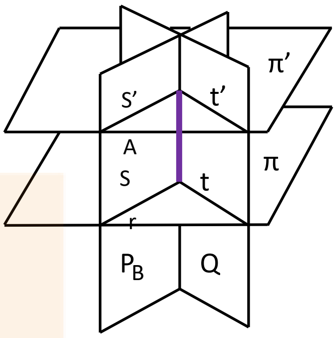
Tema 6. INTERSECCIONES, PARALELISMO, PERPENDICULARIDAD

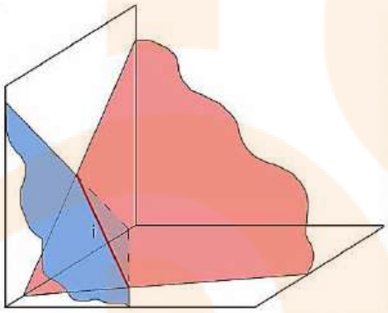
6.1. INTERSECCIONES

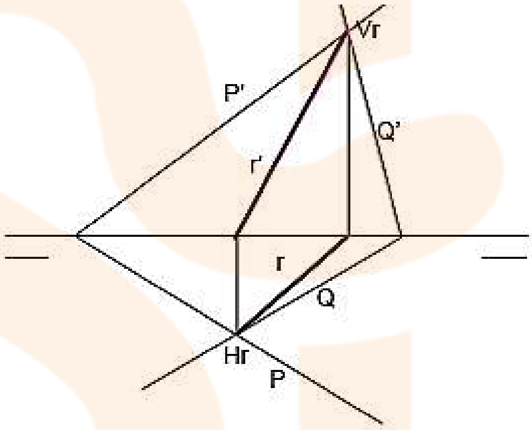
6.1.1 Intersección de planos



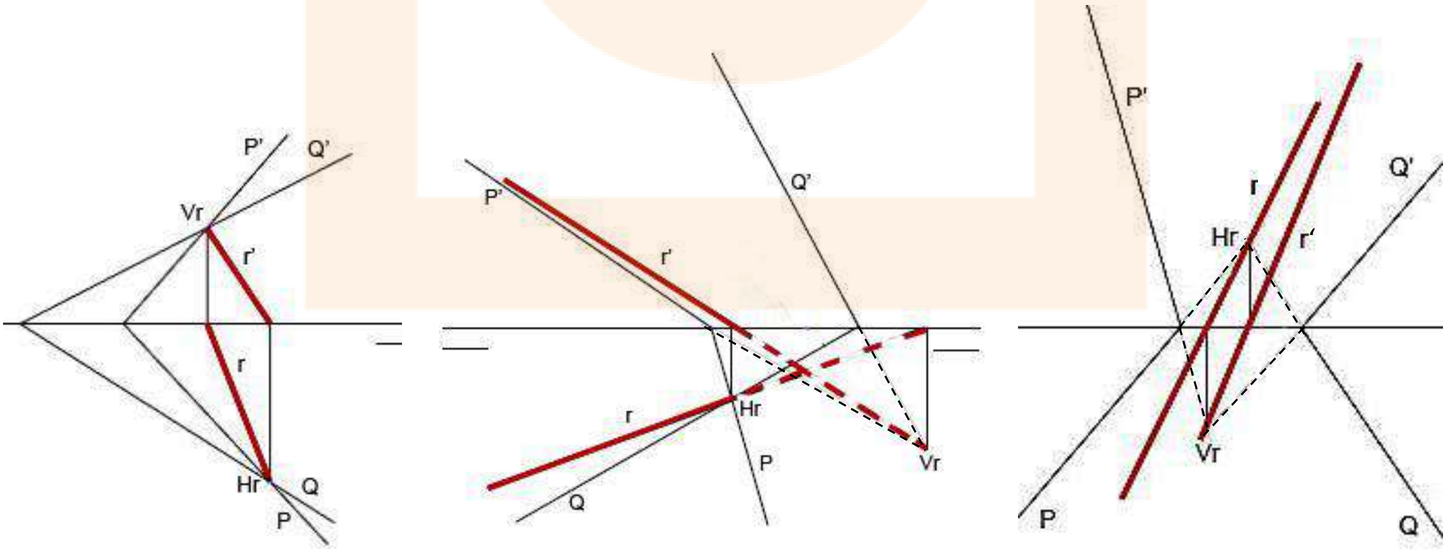
Procedimiento general: La intersección de dos planos es una recta. Para obtenerla, se utilizan otros dos planos auxiliares cualesquiera que corten a los dados (que pueden ser los de proyección). En la figura, P y Q son los planos dados, y se cortan por el plano π, cuyas intersecciones s' y t' nos dan el punto B. Uniendo A con B obtenemos la recta R de intersección.

Intersección de dos planos oblícuos: se eligen como planos auxiliares los de proyección, que cortan a los propuestos en sus propias trazas. La intersección de las trazas P y Q no da el punto Hr de la recta de intersección, y la intersección entre P' y Q' el punto Vr. Referenciando ambos a LT y uniendo con las trazas obtenemos la recta de intersección R.





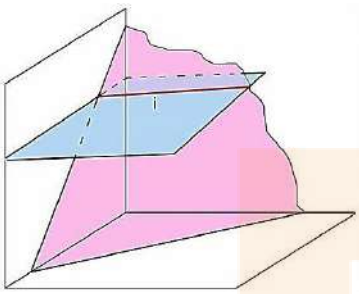
Otros ejemplos de intersección de planos oblicuos

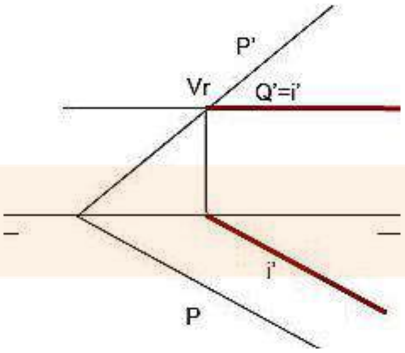


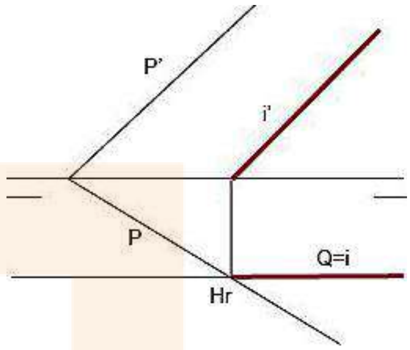
Nota al segundo caso: *se prolongan P y Q para encontrar el punto de corte de las dos trazas (Vr). Se referencian Hr y Vr a Lt, y se unen con Hr y Vr respectivamente.*

Otros casos:

<u>Intersección de un plano oblicuo con otro horizontal:</u> la recta de intersección del plano es una horizontal. La intersección de las trazas verticales P’ y Q’’ nos da el punto Vr, que se referencia a Lt, desde donde trazamos una paralela a P, con lo que hallamos la proyección horizontal de la recta de intersección, i. La proyección vertical i’ se confunde con Q’.

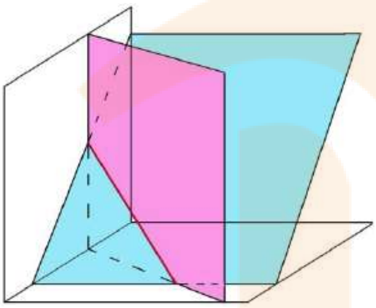


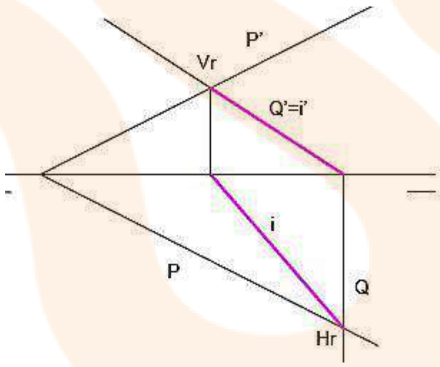


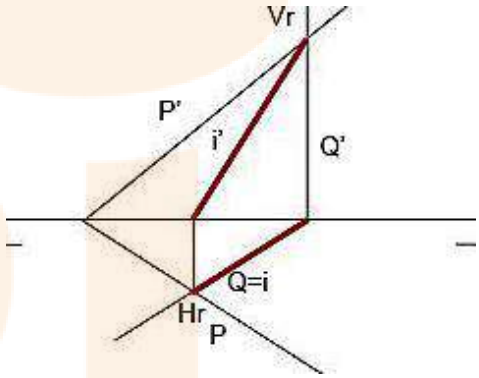


En el caso de **intersección de plano oblicuo con plano frontal**, se procede igual pero la recta de intersección sería una frontal.

<u>Intersección de un plano oblicuo con otro proyectante horizontal (plano de canto):</u> la proyección horizontal i se halla referenciando Vr a LT y uniéndola con Hr, punto de intersección entre las trazas horizontales P y Q. La proyección vertical i’ se confunde con la traza vertical del plano, Q’ (dado que éste es proyectante horizontal, todos los elementos en él contenidos tendrán su proyección vertical confundidos con la traza vertical).

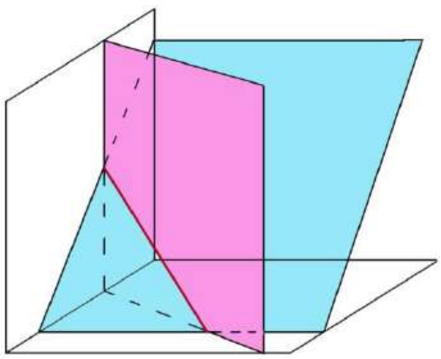


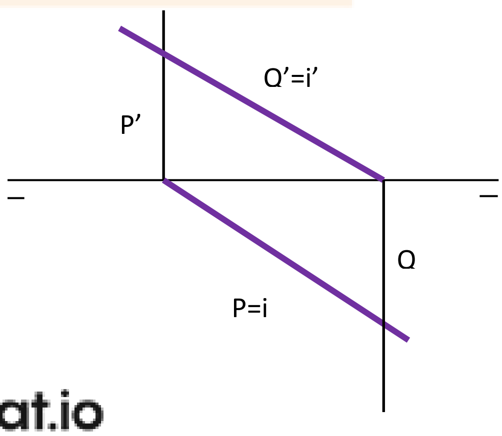




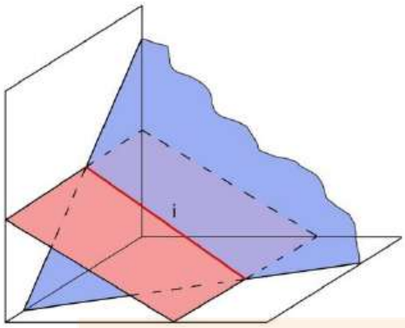
En el caso de un plano proyectante vertical, se procede igual.

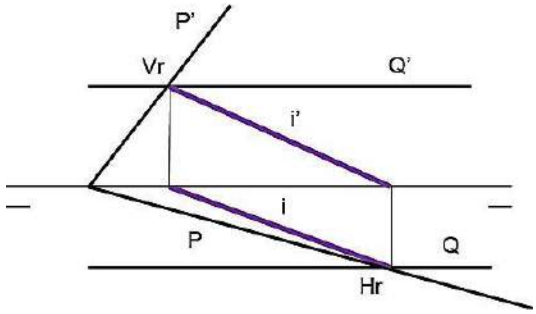
<u>Intersección de plano proyectante vertical con plano proyectante horizontal (plano de canto):</u> las proyecciones i e i’ se confunden con las trazas respectivas.



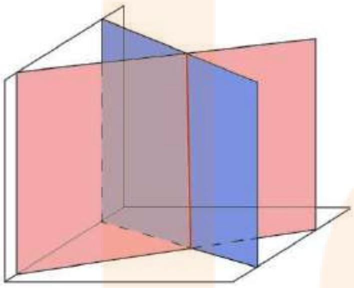


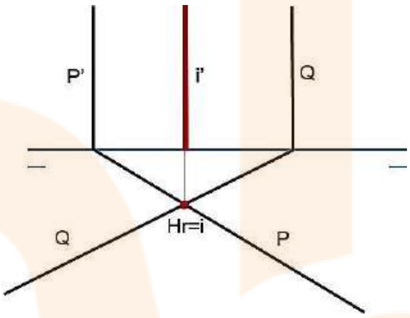
Intersección entre un plano paralelo a LT y otro oblicuo: se referencian Hr y Vr a LT y se unen a las trazas homónimas.



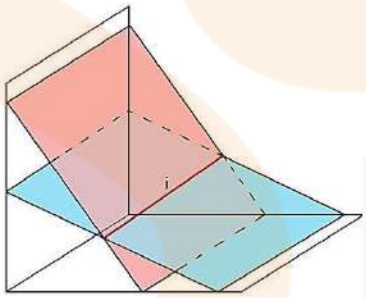


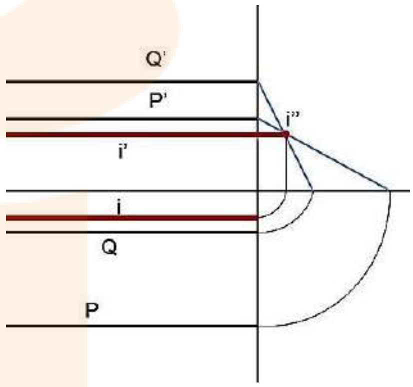
Intersección de planos proyectantes horizontales: la recta de intersección será una recta perpendicular al plano horizontal (recta de punta). Su proyección horizontal se con funde con el punto Hr y la vertical será una paralela a P' y a Q'. (En el caso de planos proyectantes verticales, se procede igual)



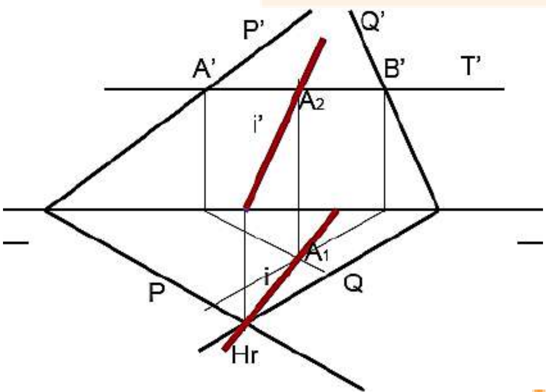


Intersección de dos planos paralelos a LT: dos planos paralelos a LT tienen sus trazas paralelas a ella, por lo que no se cortan, por lo que no puede aplicarse el método general. Para solucionarlo se acude a un tercer plano auxiliar, de perfil. La intersección de las trazas de perfil de esos planos nos da un punto que se desabate, obteniéndose la recta I de intersección.

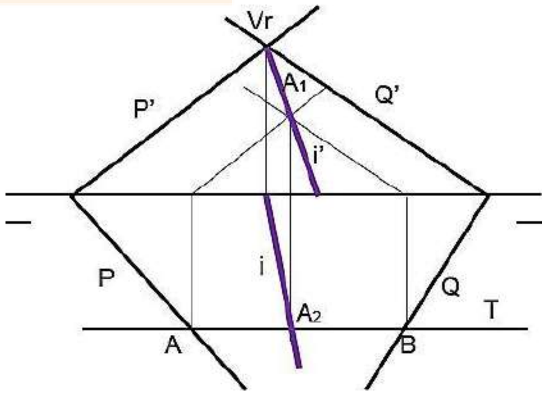




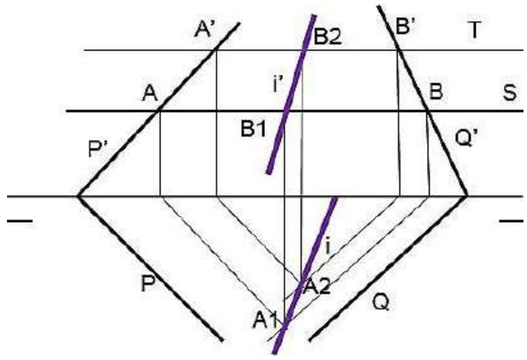
Intersección de planos cuando sus trazas se cortan fuera de los límites del dibujo: En este caso, solo se puede hallar un punto de la recta de intersección. Para obtener el otro, se utiliza un plano auxiliar paralelo a uno de los planos de proyección. Por ejemplo, en el caso de que sean las trazas verticales las que se corten fuera, para la proyección horizontal i no hay problema. Para la vertical, elegimos un plano auxiliar T' paralelo al horizontal, que al cortarse con P' y Q' nos da los puntos A y B, que se referencian a LT, desde donde trazamos paralelas a las trazas horizontales, que se cortan en A1. Desde A1 se traza una perpendicular que corte a T', obteniéndose A2. Se referencia Hr a LT, y se une con A2, obteniéndose i'. Finalmente, i se obtiene uniendo Hr con A1.



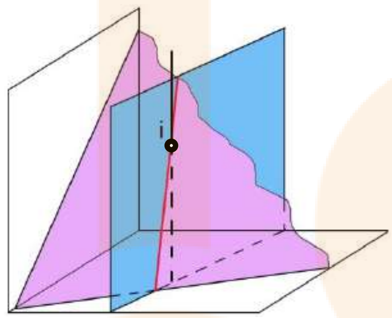
Si son **las trazas horizontales las que se cortan fuera**, se procede igual pero utilizando un plano auxiliar frontal.

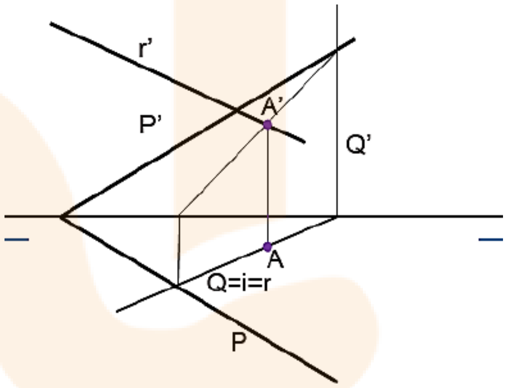


Si tanto **las trazas horizontales como verticales se cortan fuera**, habrá que utilizar dos planos auxiliares: se cortan simultáneamente los dos planos P y Q dados por medio de otros dos planos horizontales T y S que, al interseccionar con los propuestos mediante horizontales de los planos, determinan en el PH A1 y A2. Uniéndolos hallamos i, proyección horizontal de la recta de intersección. Se referencian A1 y A2 a los planos auxiliares, obteniéndose B1 y B2, cuya unión nos da i', proyección vertical de la recta de intersección.



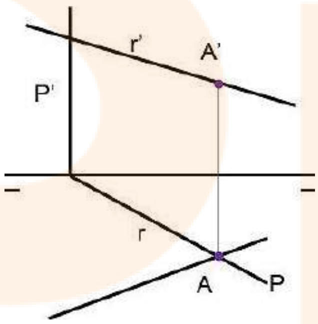
<u>6.1.2 Intersección de recta y plano:</u> la intersección de una recta con un plano es siempre un punto que pertenece a ambos. Para obtenerlo, se elige un plano auxiliar Q que contenga a la recta (que suele ser proyectante). La intersección de los dos planos nos dará una recta, cuya intersección con nuestra recta nos dará el punto buscado. A', que se pasa a i, obteniéndose A. Se suele elegir como plano auxiliar uno proyectante, cuya proyección horizontal coincide con la proyección horizontal de la recta de intersección, i.

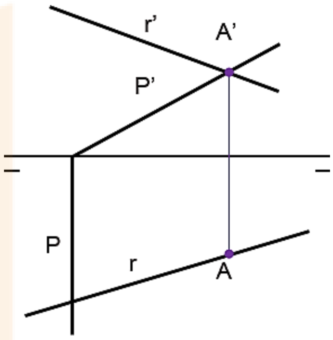




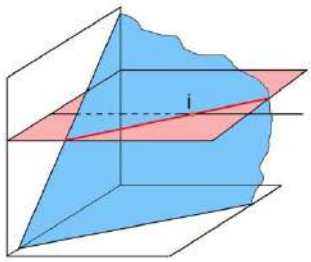
Otros casos:

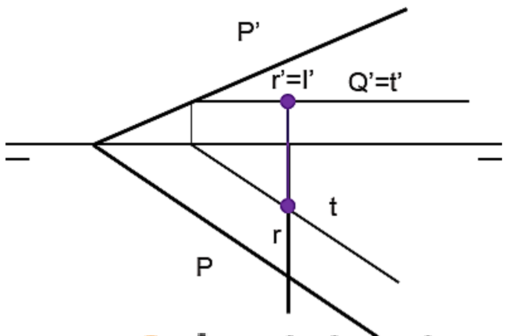
<u>Intersección de recta con plano proyectante horizontal:</u> En el corte de la traza horizontal del plano P y la proyección horizontal de la recta r, estará la proyección horizontal del punto de intersección (A). La proyección vertical se halla proyectando ortogonalmente éste hasta r'. En el caso de **plano proyectante vertical,** se procede igual.

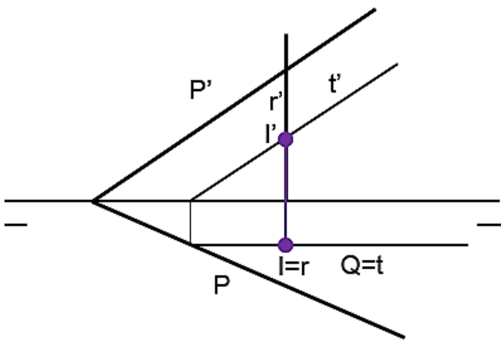




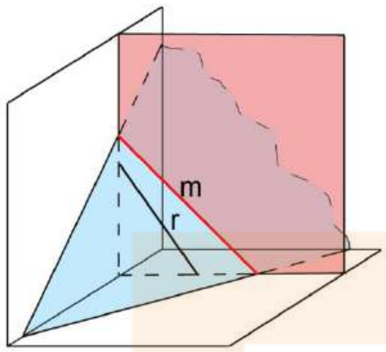
<u>Intersección de recta vertical con plano oblicuo:</u> se utiliza un plano auxiliar Q paralelo al vertical que contenga a la recta. Su traza horizontal π pasará por la proyección horizontal r de la recta. Se halla la recta de intersección t t'.t coincide con la traza horizontal del plano auxiliar y t' será paralela a P. Los puntos de corte entre esta recta y la original nos dan el punto de intersección I I'. En el caso de la **recta de punta**, se procede igual.

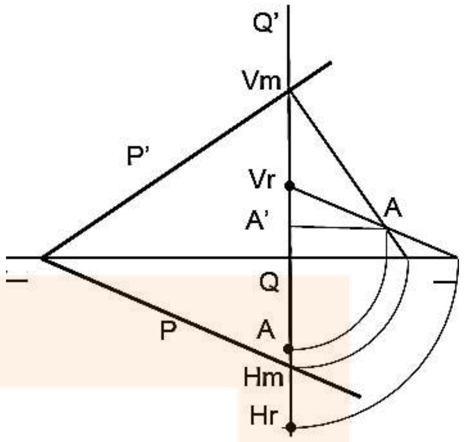






Intersección de recta de perfil con plano oblicuo: en este caso, se utiliza un plano auxiliar de perfil que contenga a la recta. Este plano corta a P en una recta de perfil M. Se abaten las dos recta sobre el plano de perfil, y donde ambas se corten estará el punto A de intersección, que se desabate a su plano.

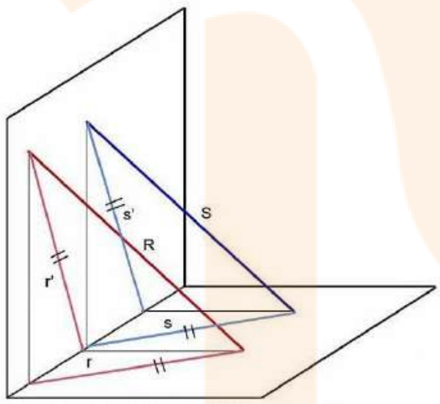


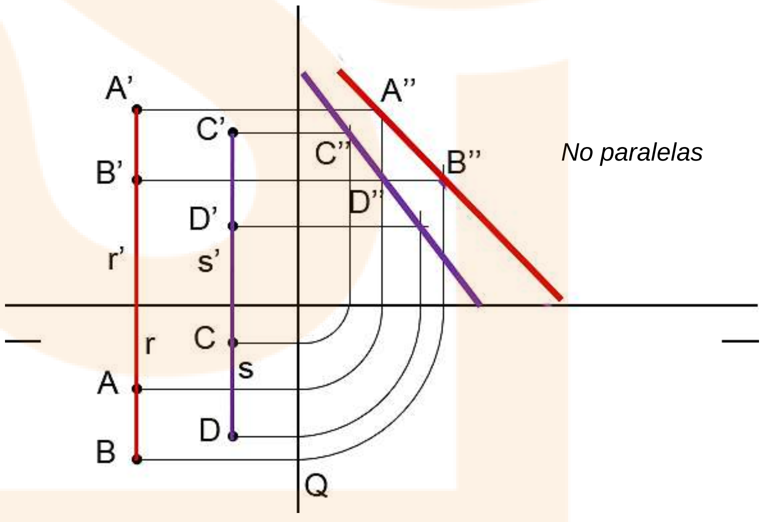


6.2. PARALELISMO

6.2.1. Paralelismo entre rectas: Dos rectas son paralelas cuando sus proyecciones homónimas son paralelas. Recíprocamente, cuando dos rectas tienen sus proyecciones tanto horizontales como verticales paralelas, éstas son paralelas en el espacio. Se exceptúan las **rectas de perfil**, ya que, aunque sus proyecciones homónimas sean paralelas, pueden ser o no paralelas en el espacio.

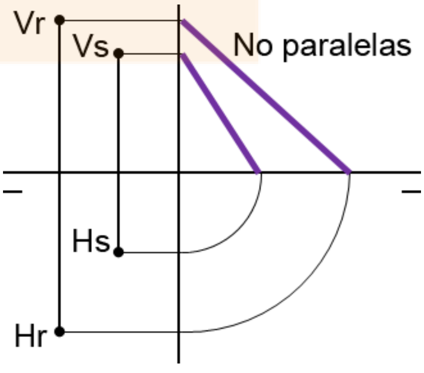
Para comprobar si dos rectas de perfil son paralelas, hay que abatirlas sobre un plano de perfil, para observar si sus proyecciones de perfil son o no paralelas. Dadas dos rectas R y S determinadas por los puntos A y B, para determinar si son paralelas, consideraremos un plano de perfil Q. Referimos sus puntos y determinamos la tercera proyección de las dos rectas, r'' y s''. En esta posición podemos comprobar si R y S son paralelas o no.



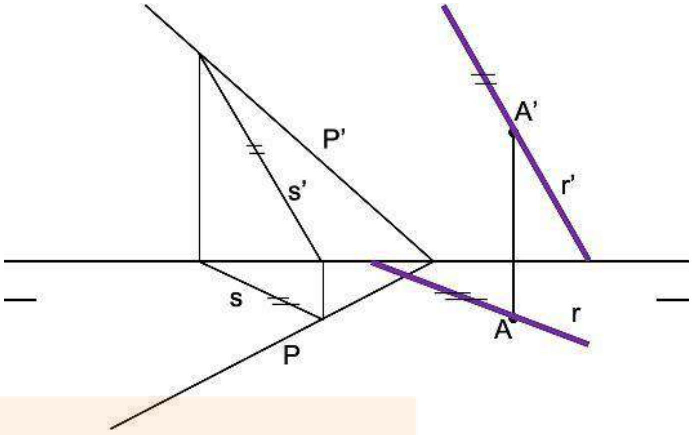


No paralelas

Si nos dan las trazas de las dos rectas, el procedimiento es similar:

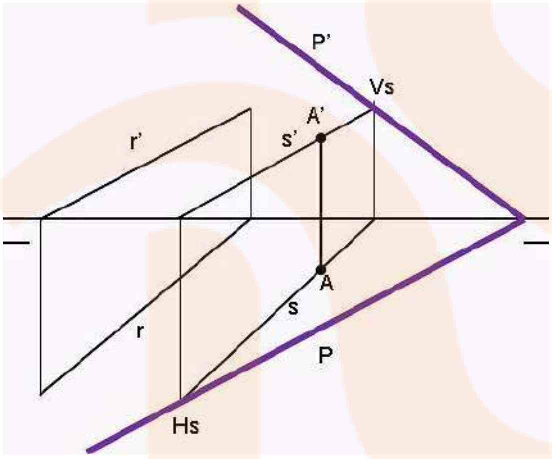


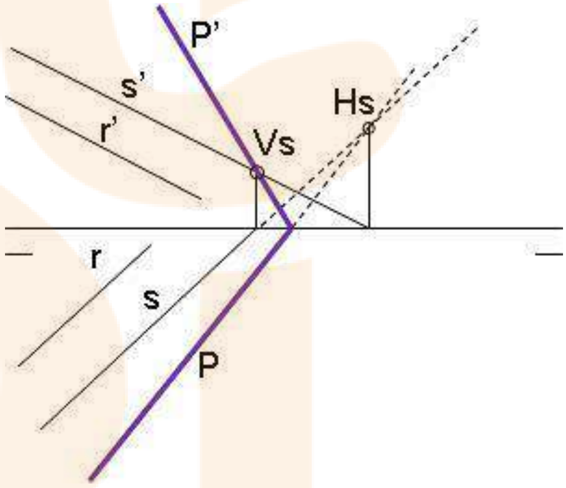
6.2.2. Paralelismo entre recta y plano: una recta es paralela a un plano cuando lo es a cualquier recta contenida en dicho plano. Hay que recordar que, para que una recta esté contenida en un plano, sus trazas tienen que estar situadas en las trazas homónimas del plano. Por tanto, en el caso general, para hallar una recta paralela a un plano, basta trazar cualquier recta contenida en el plano y dibujar una recta paralela a ésta, por lo que hay infinitas soluciones. Para concretar este problema, se le suele añadir una condición adicional, y es que pase por un punto exterior al plano, por el cual deben pasar las proyecciones de la recta buscada.



Otros casos:

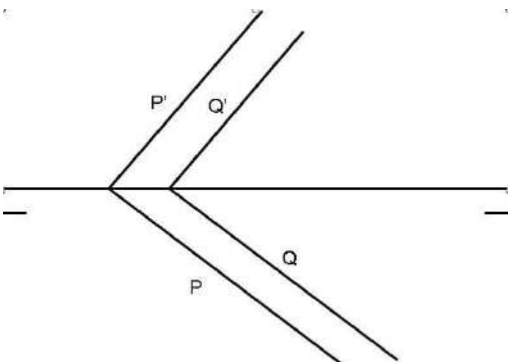
Trazar un plano paralelo a una recta dada, que contenga a un punto A: es el problema recíproco al anterior, y tiene también infinitas soluciones. Tenemos la recta r y el punto A. Se traza la paralela s a r por el punto dado. Se hallan las trazas de la recta obtenida y se dibuja un plano cuyas trazas contengan a las trazas de la recta.

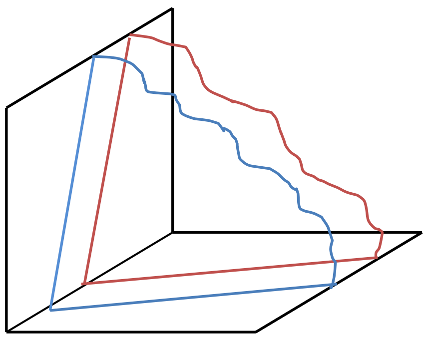




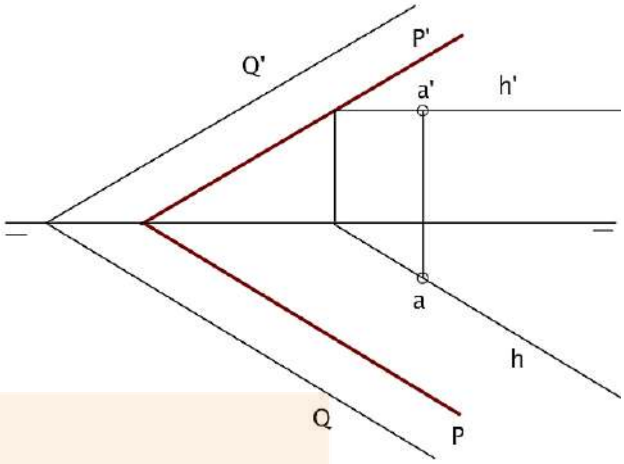
Puede ocurrir que resulte más complicado buscar las trazas del plano, como en casos como el de arriba.

6.2.3. Paralelismo entre planos: para que dos planos sean paralelos sus dos trazas han de ser paralelas. Se cumple siempre que las rectas horizontales de dos planos paralelos son paralelas.



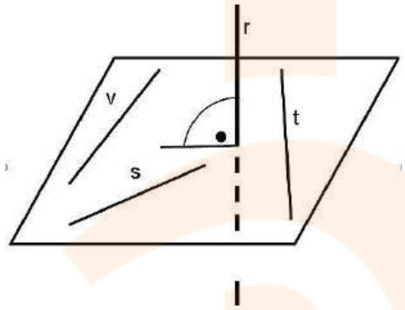


-Trazar por un punto A un plano paralelo a otro: Basta trazar por A’ y A una horizontal con su traza horizontal paralela a la traza horizontal del plano Q, se hallan sus trazas, y se hacen pasar las trazas del plano P por ellas.



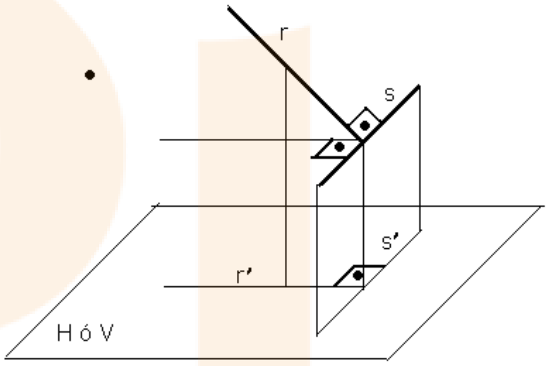
6.3. PERPENDICULARIDAD

Al contrario que en el paralelismo, **la perpendicularidad no se refleja en las proyecciones,** solo en el caso de **recta con plano**, por lo que, para resolver otros problemas (recta con recta, plano con plano…), hay que reducirlos al caso de plano con recta. En este tema se deben aplicar los siguientes teoremas:



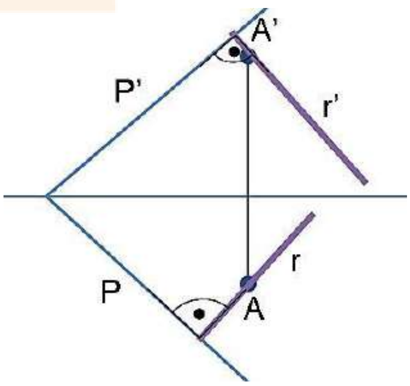
Recta perpendicular a un plano: Si una recta es perpendicular a un plano, lo será a cualquier recta contenida en él. (r, por ejemplo, es perpendicular en este caso a s, t y v). De manera recíproca, una recta será perpendicular a un plano cuando lo sea a **dos rectas** cualesquiera de dicho plano que no sean paralelas.

Teorema de las tres perpendiculares: si dos rectas r y s son perpendiculares en el espacio y una de ellas (s por ejemplo), es paralela a un plano, las proyecciones de las dos rectas sobre dicho plano son perpendiculares entre sí.



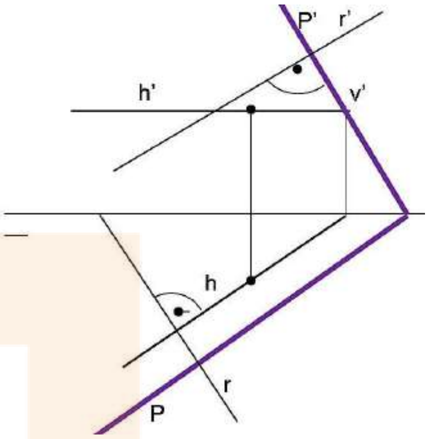
Inversamente, si las proyecciones de dos rectas son perpendiculares entre sí, y una de ellas (r por ejemplo) es paralela o contenida en uno de los planos, dichas rectas son perpendiculares en el espacio.

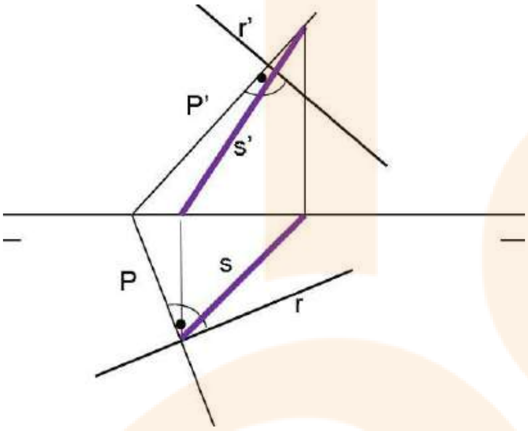
1.-Trazar una recta perpendicular a un plano por un punto dado: si una recta es perpendicular a un plano, sus proyecciones han de ser perpendiculares a las trazas del plano. Por tanto, basta trazar dos rectas perpendiculares a las trazas del plano que pasen por las proyecciones del punto.



2.-Plano perpendicular a una recta por un punto dado: Análogamente, para que un plano sea perpendicular a una recta, sus trazas han de ser perpendiculares a las proyecciones de la recta. Bastará por tanto trazar por las proyecciones del punto A' y A una horizontal del plano y una frontal, situándose el plano en las trazas de esas rectas, V' y H, y en las paralelas a esas proyecciones oblicuas, con sus proyecciones perpendiculares a las proyecciones respectivas de la recta.

Pero en la práctica basta con una de las dos rectas para determinar el plano, por ejemplo una horizontal: se traza una horizontal h **cuya proyección horizontal sea perpendicular a la proyección horizontal de la recta r**, y se trazan las trazas del plano pasando por V' y perpendicular a r', y la traza horizontal del plano P paralela a h y perpendicular a r.





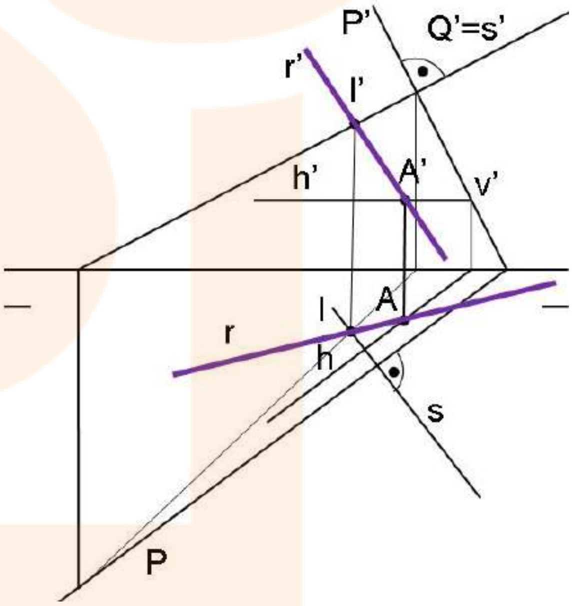
3.-Rectas perpendiculares entre sí: como la perpendicularidad entre rectas no se manifiesta en sus proyecciones, hay que reducir el problema a perpendicularidad entre recta y plano. Como cualquier recta que esté contenida en un plano perpendicular a una recta será perpendicular a ella, bastará trazar un plano perpendicular a la recta: cualquier recta de ese plano será perpendicular a la dada. Existen por tanto infinitas soluciones.

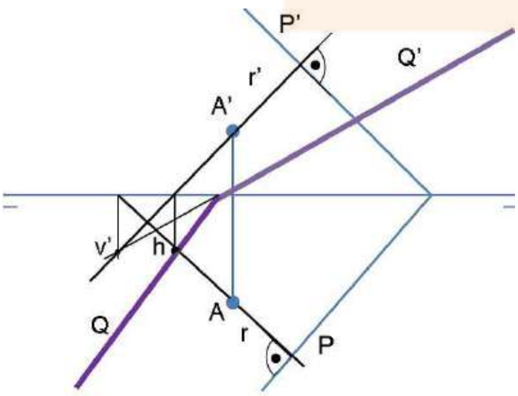
Para **trazar una recta r perpendicular a otra y que pase por un punto A:**

1.-Se traza un plano perpendicular a la recta mediante una horizontal.

2.-Se halla el punto de intersección del plano perpendicular P con la recta dada.

3.-Se une la intersección obtenida con el punto A dado





4.-Planos perpendiculares entre sí: también hay infinitas soluciones, pues para que un plano Q sea perpendicular a otro dado P, basta que contenga a una recta r que sea perpendicular al plano dado. Para determinar una única solución, se añade una condición adicional: que contenga a un punto dado.

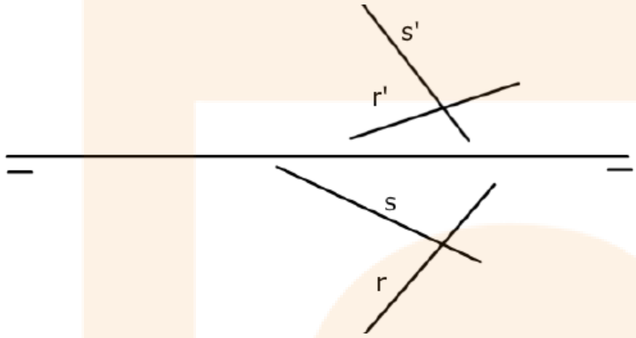
Se traza por las proyecciones del punto a y a' perpendiculares a las trazas del plano dado P, se hallan las trazas de esa recta V' y H, y por esas trazas se hace pasar el plano.

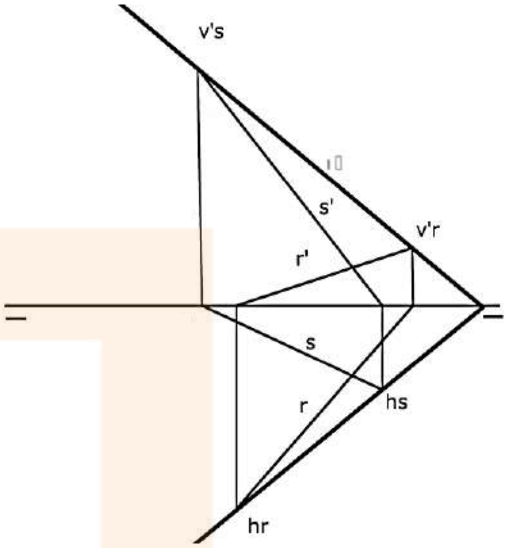
Formas de determinar un plano (repaso 1º)

Un plano puede quedar determinado por:

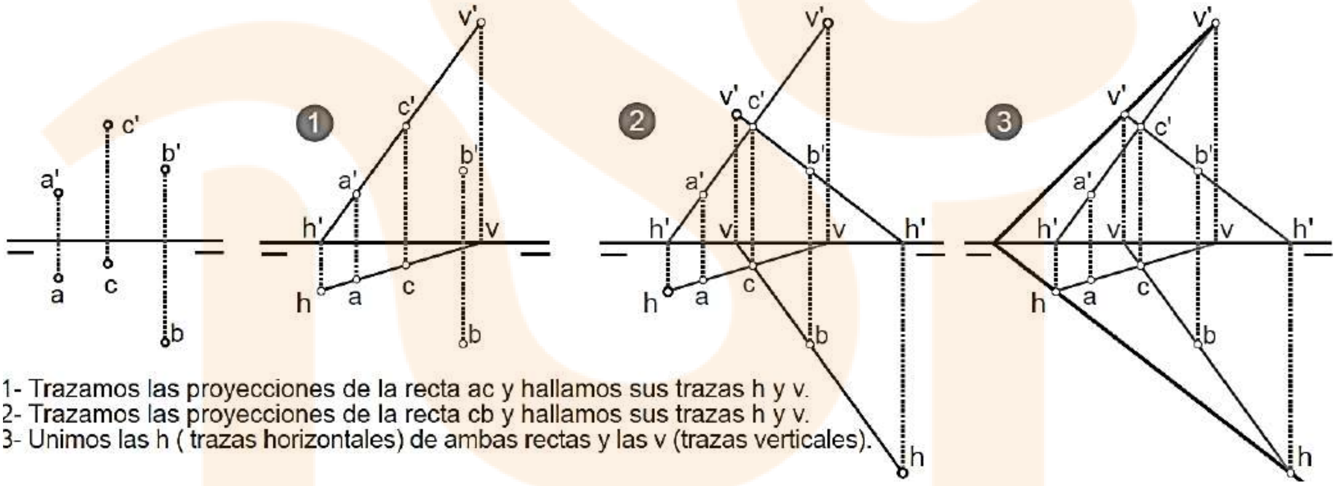
- -Dos rectas que se cortan
- -Tres puntos no alineados
- -Un punto y una recta
- -Dos rectas paralelas

a) **Dos rectas que se cortan:** hallamos las trazas de la recta y las unimos. La unión de las trazas verticales respectivas de las rectas nos da la traza vertical, y la unión de las trazas horizontales la traza horizontal.



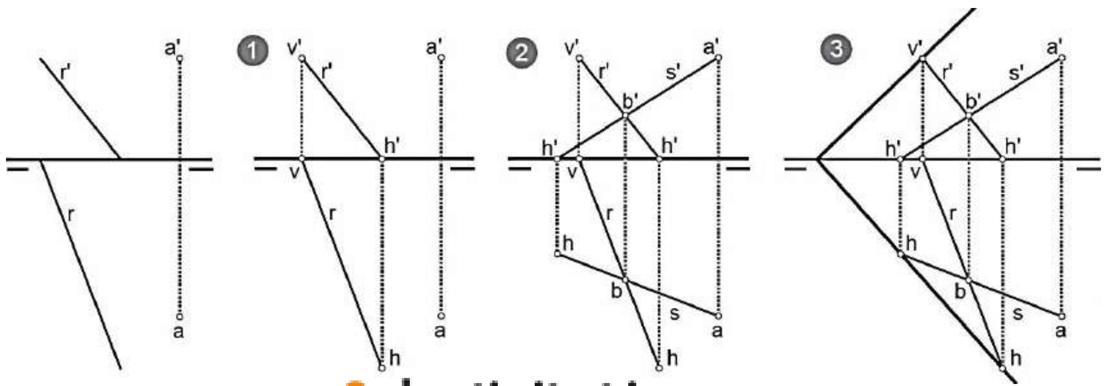


b) **Tres puntos no alineados:** se unen los puntos dos a dos, obteniéndose dos rectas que se cortan, con lo que se convierte en el caso anterior: sólo resta hallar las trazas y unirlas.

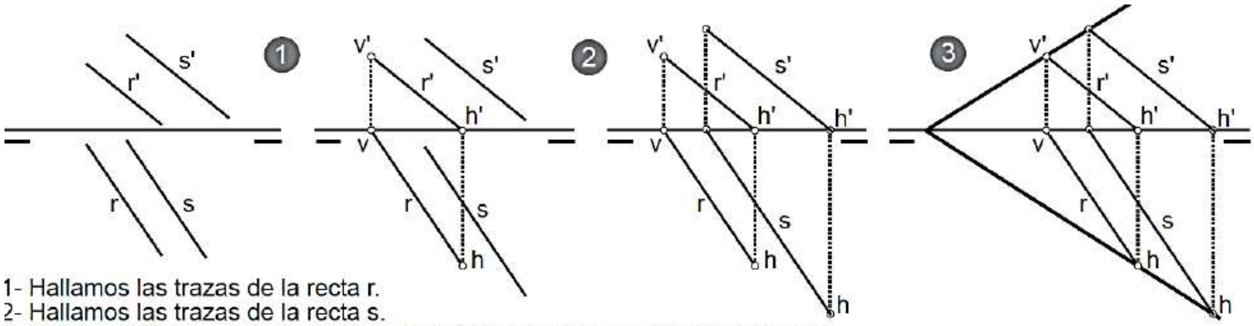


c)**Un punto y una recta:** Hallamos las trazas de la recta r: por v' pasará la traza vertical del plano y por h la horizontal. Elegimos un punto cualquiera B sobre la recta y lo unimos con el punto dado A, con lo que obtenemos otra recta, s. El problema se transforma así en el primer caso. Sólo nos resta hallar una de las trazas de la recta s, que se unirá con su homónima: donde incida sobre la línea de tierra, se une con la otra traza de la recta dada.

En el caso de que con los pasos dados no hubiéramos encontrado las trazas de rectas suficientes para situar las del plano, elegiremos más puntos pertenecientes a r y trazaremos más rectas uniéndolos con el punto A.



d) **Dos rectas paralelas:** basta también unir sus trazas homónimas.

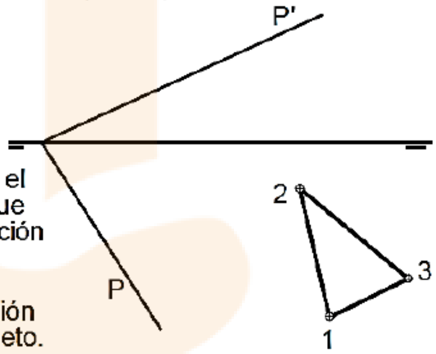


1- Hallamos las trazas de la recta r.
2- Hallamos las trazas de la recta s.
3- Unimos las h (trazas horizontales) de ambas rectas y las v (trazas verticales).

POLÍGONOS CONTENIDOS EN PLANOS

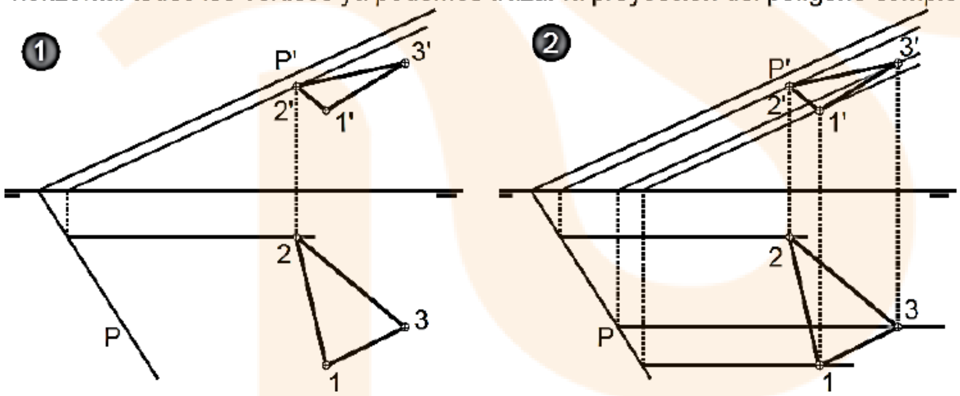
Para que un polígono este contenido en un plano todos sus vértices deberán estar contenidos en el plano. Para demostrar o comprobar que un polígono pertenece en su totalidad a un plano necesitamos pasar por los vértices del polígono rectas contenidas en el plano, eso es sencillo si empleamos rectas horizontales o frontales.
Un ejercicio básico muy común es:

Dada la proyección horizontal de un polígono y las trazas del plano al que pertenece hallar la proyección vertical del polígono.



1º- Por uno de los vértices del polígono trazamos una recta frontal contenida en el plano (en este ejercicio hemos usado una recta frontal, pero esto es lo mismo que si hubieramos pasado por el punto una horizontal). LLevamos el punto a la proyección horizontal.

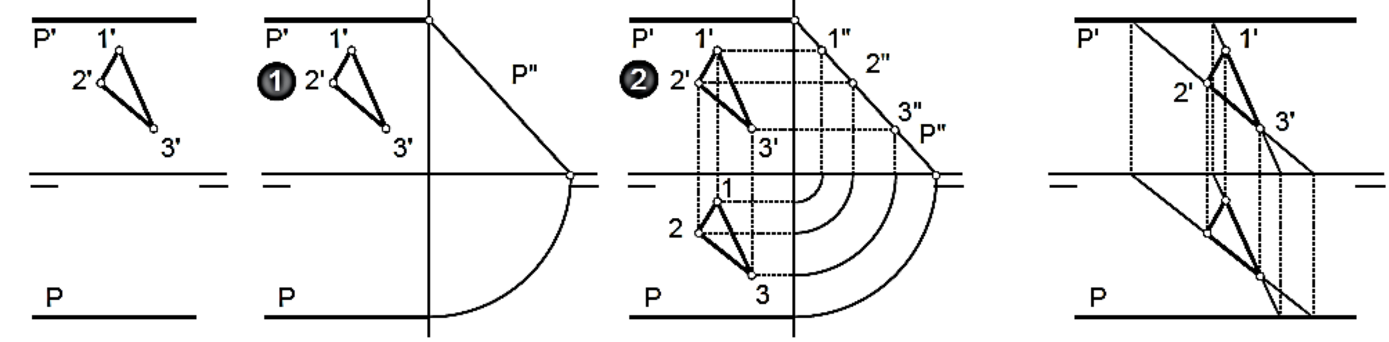
2º- Repetimos la operación con el resto de vértices. Una vez llevados a proyección horizontal todos los vértices ya podemos trazar la proyección del polígono completo.



Otra opción igualmente válida para resolver este problema sería prolongar los segmentos que forman el polígono dado hasta cortar a la traza vertical del plano P' y a la LT. Esto nos permite determinar ambas trazas de la recta que contiene al lado del polígono y por lo tanto determinar la proyección horizontal de la misma y así la proyección horizontal del polígono. Pero esto en ocasiones puede resultar imposible al encontrarse las trazada de dichas rectas fuera de los límites del papel.

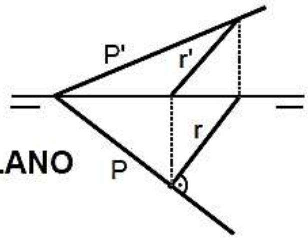
Dada la proyección vertical de un polígono y las trazas del plano paralelo a LT al que pertenece hallar la proyección vertical del polígono.

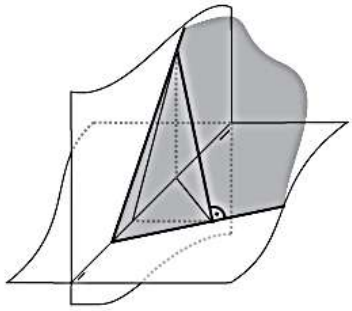
En el paso 1 hemos trazado la tercera proyección de P. En el segundo paso hemos llevado el polígono al plano en tercera proyección y hemos llevado el alejamiento a la proyección horizontal. A la derecha vemos el mismo resultado pero conteniendo los lados en rectas, trazando las proyecciones horizontales de esta y bajando los puntos sobre estas.



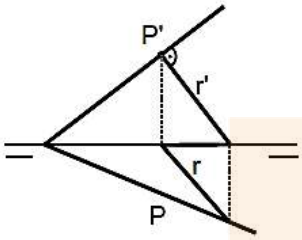
RECTA DE MÁXIMA PENDIENTE DE UN PLANO

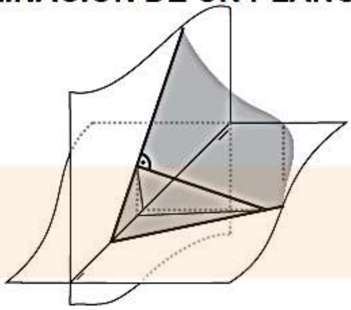
Es una recta perteneciente al plano que forma el máximo ángulo posible con PH.
En este caso la recta es perpendicular a la traza horizontal del plano. Un plano tiene infinitas rectas de máxima pendiente





RECTA DE MÁXIMA INCLINACIÓN DE UN PLANO





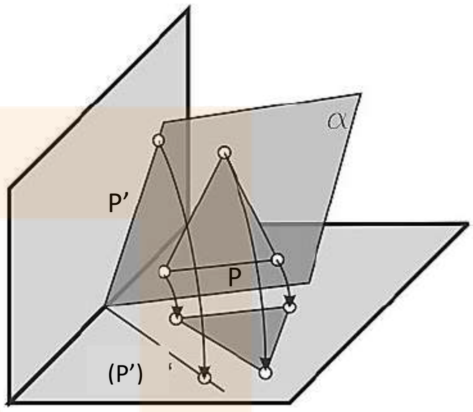
Es una recta perteneciente al plano que forma el máximo ángulo posible con PV. En este caso la recta es perpendicular a la traza vertical del plano. Un plano tiene infinitas rectas de máxima inclinación.

Tema 7.- OPERACIONES

Es habitual que nos encontremos con figuras en el espacio que estén situadas oblicuamente a los planos de proyección, por lo que sus proyecciones no estarán en verdadera magnitud. Para conseguir verdaderas magnitudes se aplican tres métodos: abatimientos, giros y cambios de plano.

7.1.-ABATIMIENTOS

El abatimiento se puede hacer sobre el plano horizontal o el vertical, pero normalmente se realiza sobre el horizontal. Abatir un plano sobre el PH consiste en girar el plano alrededor de su traza horizontal, hasta que dicho plano coincida con el PH. Esa traza P que se utiliza como eje de giro se denomina **charnela (ch)**. Si el abatimiento es sobre el PV, se utiliza como charnela la traza vertical. El abatimiento constituye el método más empleado en diédrico para resolver multitud de problemas de distancias, verdaderas magnitudes, medición de ángulos, etc.



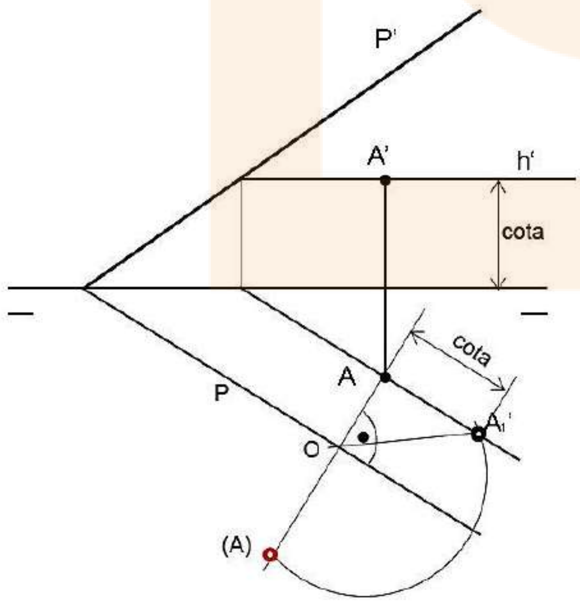
Hay que tener en cuenta que siempre que se utiliza el concepto de abatimiento lo que se está haciendo es abatir planos, aunque se haga con puntos o rectas. Por tanto, la expresión "*abatir"* un punto o una recta en realidad significa *abatir un plano que contiene un punto* o *abatir un plano que contiene una recta*.

Nomenclatura: Los elementos abatidos se nombrarán con la correspondiente letra mayúscula entre paréntesis; punto (A); recta (R); trazas del plano (P) o (P´).

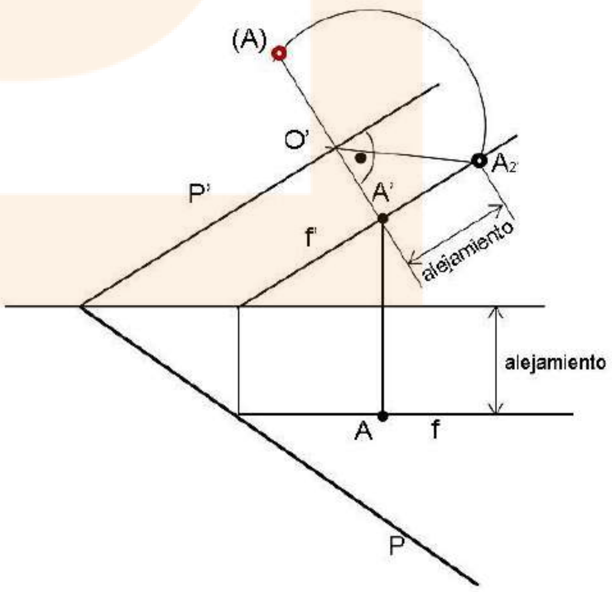
1.-Abatimiento de un punto contenido en un plano: para abatir el plano P que contiene a un punto A sobre el PH:

-Por A se traza una recta horizontal h de P, cuya traza horizontal es paralela a la traza horizontal del plano P. Por la traza horizontal del punto, A, trazamos una recta perpendicular a P, que la cortará en O. Para hallar la verdadera magnitud (VM) de OA, se construye un triángulo rectángulo abatido sobre el PH. Sobre la paralela, y a partir de A, se lleva una longitud igual a la cota de A', obteniéndose A'_1. Con centro en O y radio OA'_1, se traza un arco que corta a la perpendicular a la charnela P en un punto (A), que es el abatimiento buscado.

Para abatir sobre el PV basta con sustituir la palabra horizontal por vertical y tomar como longitud el alejamiento en lugar de la cota.

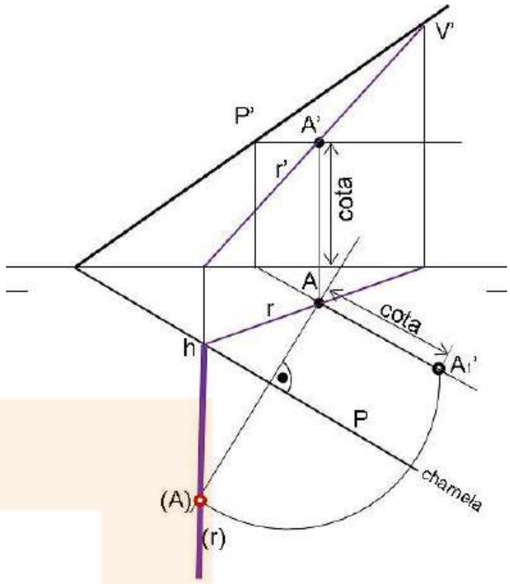


Abatimiento sobre el plano horizontal



Abatimiento sobre el plano vertical

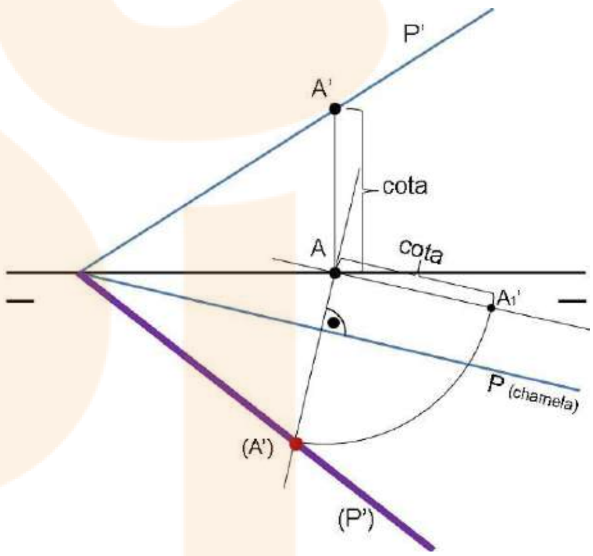
Abatimiento de una recta: para abatir una recta basta con abatir dos puntos de ésta. Si conocemos sus trazas, basta con abatir uno de ellos, y que el otro sea la traza horizontal, puesto que se conserva inmóvil, al pertenecer a la charnela sobre la que gira la recta.



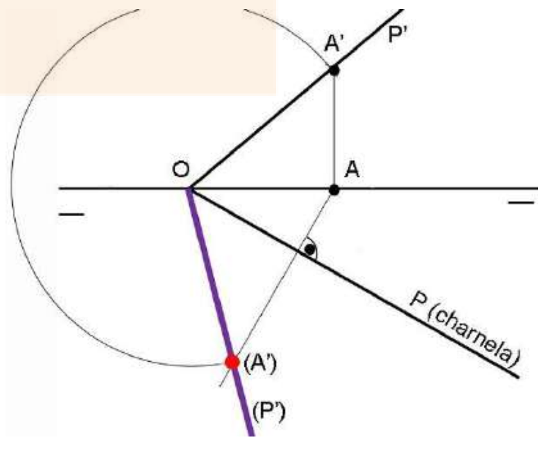
Para abatir la recta r, contenida en P, sobre el PH, se abate el punto de la forma vista, obteniéndose (A), que se une con la traza H (que permanece inmóvil, consiguiéndose la recta (r), abatida.

Abatimiento de un plano: para abatir un plano basta con abatir una de sus trazas, mientras que la otra actúa de charnela, permaneciendo inmóvil en el giro. Existen dos procedimientos. Los veremos en el PH. En el PV, se procede igual.

Método 1: Se abate un punto a' a perteneciente a la traza vertical del plano P'. Sólo resta unir el punto abatido (a) con O y obtenemos (P'), traza vertical abatida del plano.



Método 2: este método se basa en que como el punto A' pertenece a P', la distancia OA' está en verdadera magnitud. Por tanto, basta con trazar un arco con centro en O y radio OA', hasta que corte a la perpendicular dibujada por a, obteniéndose así (A), abatimiento del punto. Solo resta unir (A) con O para obtener (P'), traza vertical abatida del plano.



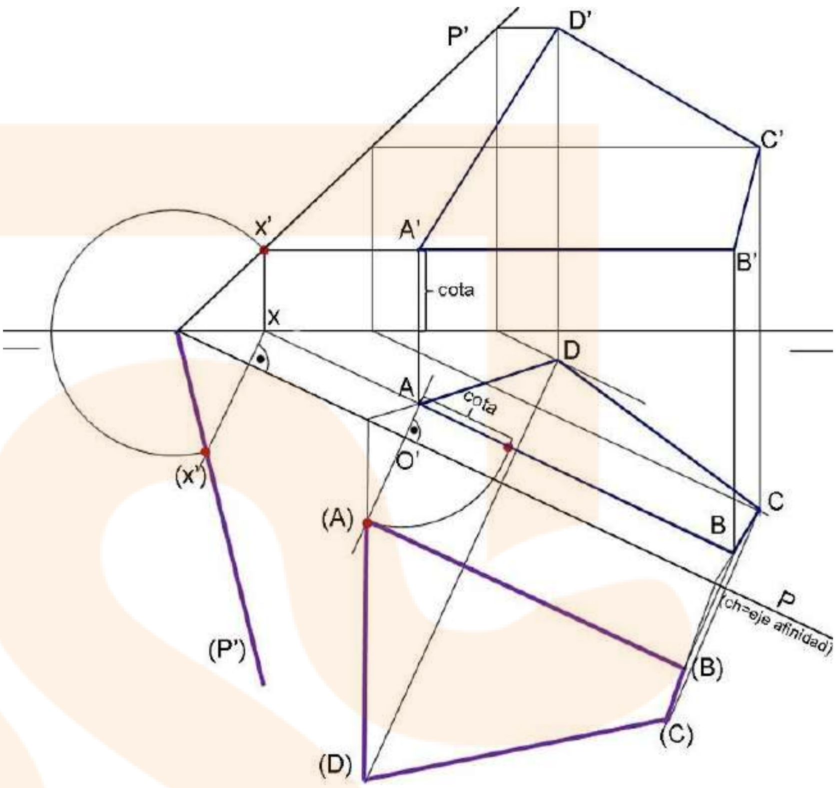
Abatimiento de una figura plana: para abatir figuras planas hay también dos métodos:

-Abatir todos sus vértices y unirlos posteriormente.

-Por medio de la **afinidad** creada entre la representación de la figura sobre uno de los planos de proyección y el abatimiento de ella sobre el citado plano. En esa afinidad, intervienen los siguientes elementos:

- **Eje de afinidad**: la charnela o eje de giro del abatimiento
- **Par de puntos afines:** en el caso de abatimiento sobre el PH, este par de puntos podrían ser a' y (a).
- **Dirección de afinidad:** siempre es perpendicular a la charnela o eje de giro.

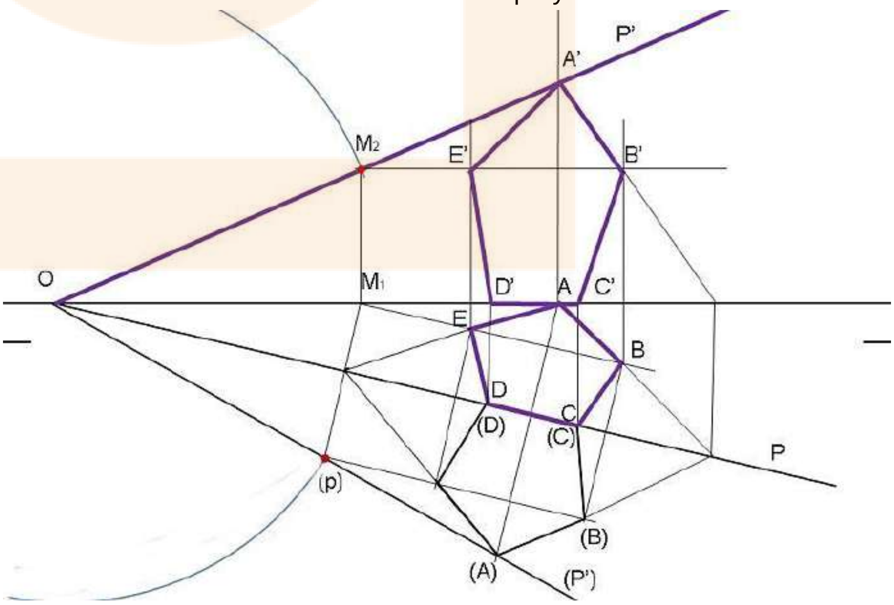
Partimos del cuadrilátero ABCD, situado en el plano P. Tenemos la proyección vertical a'b'c'd'; para hallar la proyección horizontal, trazamos rectas horizontales que pasen por cada uno de esas proyecciones verticales: los cortes de las proyecciones horizontales de esas rectas (que son paralelas a P) con una perpendicular a LT desde las proyecciones verticales respectivas, nos dan las proyecciones horizontales abcd.



Se abate a continuación el punto a a' de la forma vista. Los demás puntos se hallan por afinidad ortogonal, determinada por el eje P y a (a) como puntos afines. Por ejemplo, para hallar (d), se unen d y a y se prolonga hasta P, y desde ese punto se une con (a), prolongándose. El corte de esa recta con una perpendicular a P desde d nos da (d), abatida. Por último, P se abate de la forma vista.

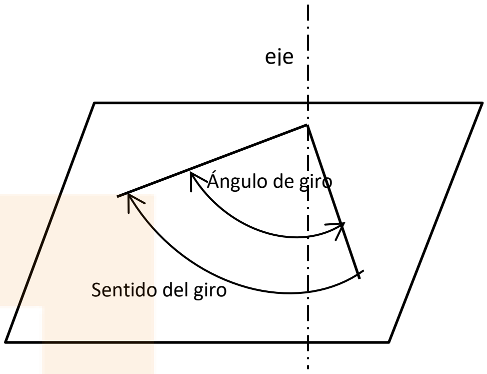
Desabatimiento de una figura plana: es el caso inverso: se trata de determinar las proyecciones diédricas de una figura abatida sobre el plano horizontal (en el caso del PV, se procede igual). Veremos el caso de un pentágono regular contenido en un plano, abatidos sobre el PH.

En primer lugar, para hallar P', se elige cualquier punto (p) de (P'). En este caso, hemos elegido la prolongación de (e) (b), pero puede ser cualquiera. Se traza un arco de radio O(p). Desde (p), trazamos una perpendicular a la traza horizontal P que corte a LT, y desde este punto M_1, una perpendicular a LT, que en su corte con el arco anterior nos da M_2, que unido con O nos da la traza vertical del plano P', desabatida. Solo resta hallar los vértices desabatidos por afinidad, de la forma vista.



7.2. GIROS

El giro es otro de los procedimientos utilizados en diédrico para obtener proyecciones en VM de objetos en el espacio situados de manera oblicua respecto a los planos de proyección. En el giro, el objeto o figura se traslada girando alrededor de un eje, determinándose un ángulo concreto hasta situarlo en la posición deseada. En un giro deben definirse los siguientes aspectos:



-**Eje** que se va a utilizar, es decir, alrededor de qué recta va a girar el objeto.

-**Ángulo de giro**

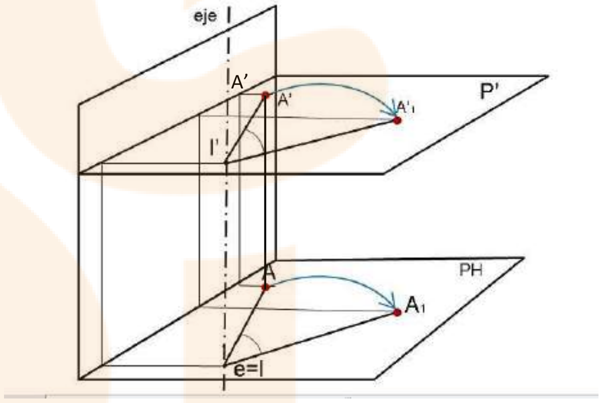
-**Dirección de giro**

Aunque podría utilizarse cualquier posición de la recta como eje de giro, para simplificar se utilizan ejes perpendiculares a uno de los planos de proyección, es decir, o una recta vertical (para el PH) o una de punta (para el PV).

Al girar una figura, todos sus puntos giran el mismo ángulo y en el mismo sentido, y sus proyecciones se desplazan según un arco de circunferencia.

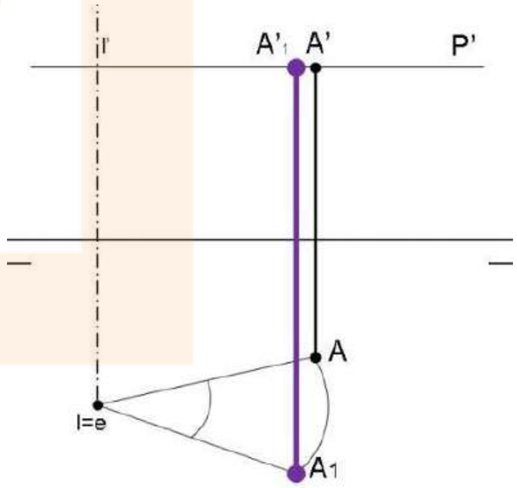
Nomenclatura: a las proyecciones de los elementos girados se les colocará un subíndice, el 1 para el primer giro, el 2 para el segundo y así sucesivamente.

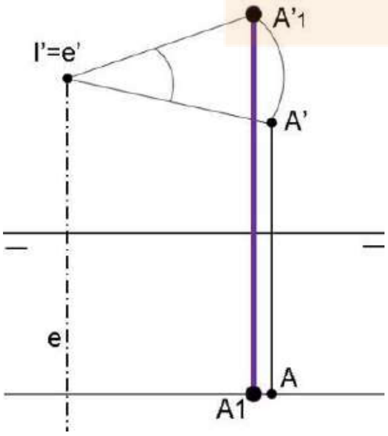
Giro de un punto:



Giro en el espacio: se une el punto A con el eje mediante una recta horizontal, que lo corta en el punto I. Trazamos un plano P' que contenga al punto A. Giramos el punto el ángulo dado, obteniéndose A'$_1$. Todo este conjunto se proyecta horizontalmente en VM, al ser paralelo al PH. Verticalmente se proyecta como una recta paralela a LT y perpendicular a e.

Realizaremos un giro alrededor de un eje vertical, por tanto sobre un plano paralelo al PH. Giraremos el punto A un ángulo P alrededor del eje e vertical. Recordemos que cuando se hace cualquier giro, hay que girar sus dos proyecciones A y A.' En primer lugar, se traza un plano P' horizontal que contenga a la proyección vertical del punto, A'. Basta con girar la proyección horizontal a el ángulo P dado en la dirección dada alrededor de la traza e del eje, hasta obtener A$_1$. Para obtener A'$_1$, se traza por A$_1$ una perpendicular a LT hasta cortar a P'.

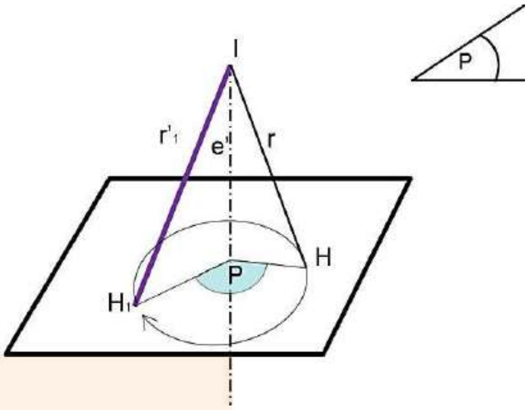




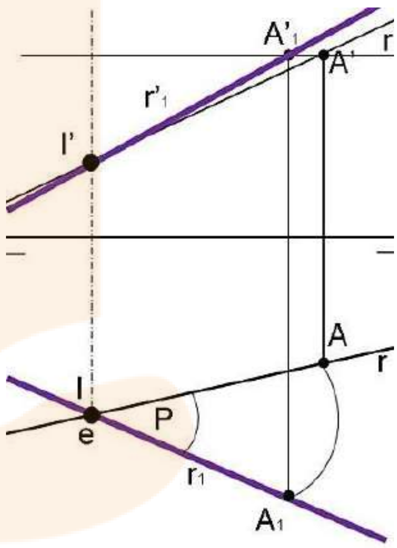
Si el giro es sobre el plano vertical, se hace igual, pero utilizando como eje de giro una recta de punta.

<u>Giro de una recta:</u> al girar una recta pueden darse dos posibilidades: que la recta **corte** al eje o que lo **cruce**, sin cortarlo.

1.-**<u>El eje corta a la recta:</u>** elegimos un eje de giro vertical (recta perpendicular al PH). Si giramos una recta r alrededor de una recta vertical e, a la que corta en un punto I, éste punto, perteneciente al eje, permanecerá fijo. Por tanto, solo es necesario girar otro punto de la recta para determinar el giro (generándose en el espacio un cono). Por tanto, el problema queda reducido al giro de un punto: giramos otro punto A de la recta r y lo unimos con I, para situar la nueva posición de r. El procedimiento paso por paso es el siguiente:

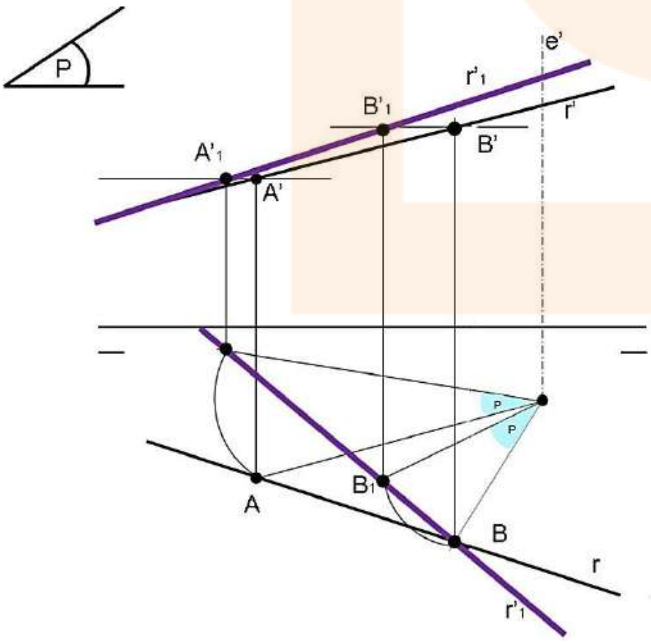


-Tomamos un punto cualquiera A A' de la recta r, que se gira de la forma vista. Como el punto I permanece inmóvil, basta unir los puntos girados A_1 y A'_1 con I' e I respectivamente para hallar las proyecciones giradas de la recta r_1 y r'_1.

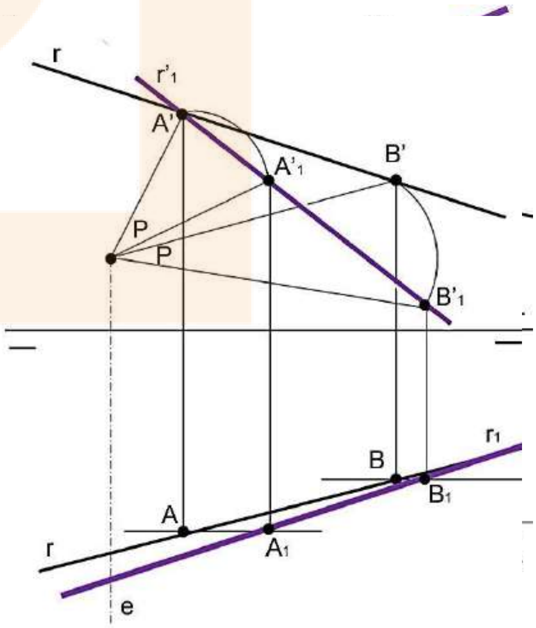


En el caso de una recta que es cortada por el eje vertical en un punto, el procedimiento es igual

2.-**<u>El eje se cruza con la recta:</u>** bastará con girar dos puntos cualesquiera de la recta, de la forma vista: se trazan dos puntos A y B de la recta. Se giran sus proyecciones horizontales A y B de la forma vista y se trazan desde los puntos obtenidos perpendiculares a LT. En este caso, habrá que trazar dos planos auxiliares horizontales. El corte de estos planos con las perpendiculares trazadas nos dan A'_1 y B'_1, que son las proyecciones verticales de los puntos girados. Solo resta unirlos para obtener la proyección vertical de la recta girada, r'_1. Uniendo A_1 y B_1 obtendremos la proyección horizontal de la recta girada, r_1.



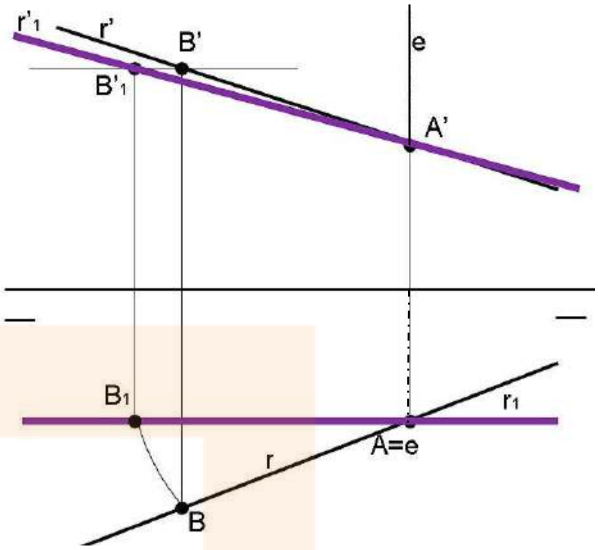
Giro de una recta alrededor de un eje vertical con el que se cruza

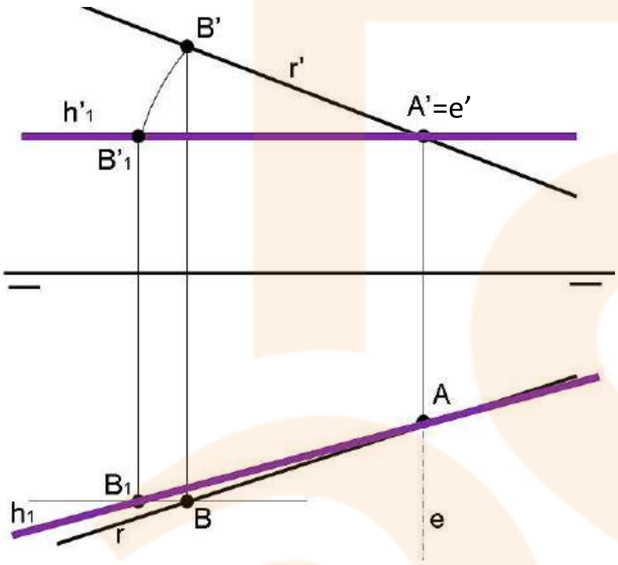


Giro de una recta alrededor de un eje horizontal con el que se cruza

Los giros pueden servirnos **para situar las rectas en posiciones favorables**, es decir, que nos convengan más:

a)**Transformación de una recta oblicua en frontal:** En un punto cualquiera A A‘ de la recta dada situamos un eje vertical. Por A, trazamos una paralela a LT, que va a ser la proyección horizontal de la recta frontal, r. Trazamos un punto B B’ cualquiera. Se gira B hasta la paralela a LT por A, obteniéndose B_1, y se halla su proyección vertical de la forma vista, mediante una perpendicular a LT, que se corta con una paralela a LT por B’. Solo resta unir B'_1 con A’ .





b)**Transformación de una recta oblicua en horizontal:** se procede igual, pero utilizándose como eje de giro una perpendicular al eje vertical, o sea, una recta de punta.

Giro de un plano: lo primero que hay que elegir es un eje de giro. Si se elige una **recta de punta** como eje, se giran la traza vertical y una recta frontal del plano. Si el eje es **vertical**, se giran la traza horizontal y una recta horizontal del plano.

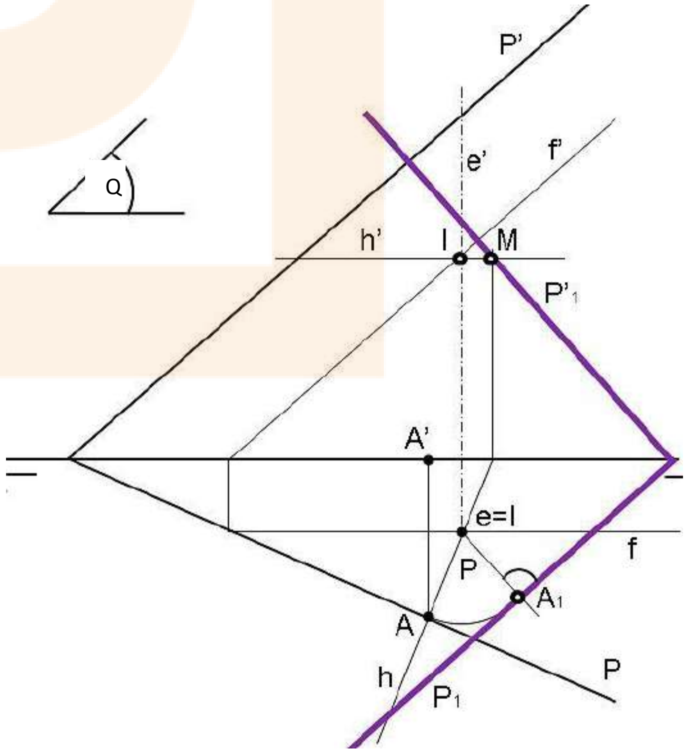
Ejemplo: giro de un plano P alrededor de un eje vertical

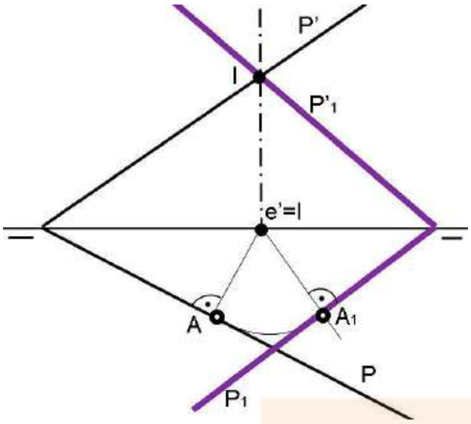
1.-Trazamos una frontal f para hallar la intersección del eje con el plano, i i’. Este punto de intersección permanece inmóvil durante el giro.

2.-Para girar la traza horizontal P, se traza una recta horizontal con la proyección horizontal perpendicular a P por e, que nos da A A’. Giramos el punto A el ángulo dado Q desde eA, obteniéndose el punto girado A_1.

3.-Se traza una perpendicular a eA_1, que nos da ya la traza girada P_1.

4.-Para hallar la traza vertical P_1’, unimos el punto de corte de P_1 con la línea de tierra con la traza M de la horizontal.

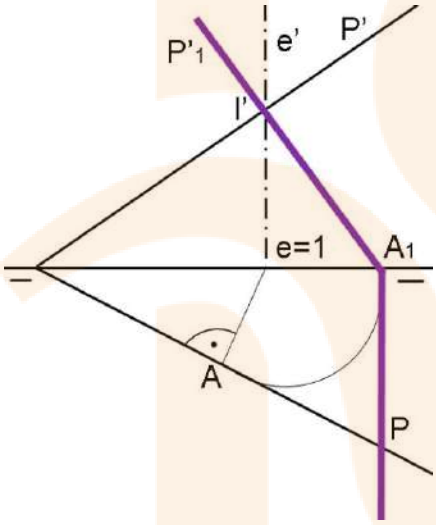




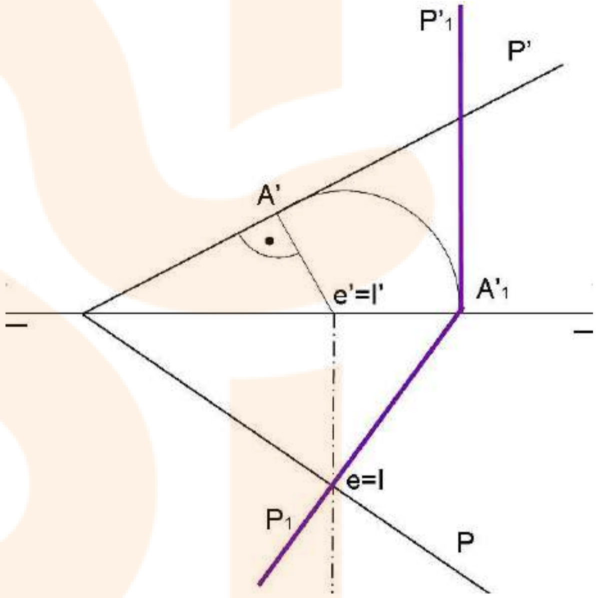
.

Si el eje elegido es vertical también, pero está contenido en el PV, la operación se agiliza, dado que el punto I de intersección del eje con el plano es inmediato.

Transformación de un plano oblicuo en un plano de canto (proyectante vertical): se ha de girar el plano en torno a un eje vertical (perpendicular al PH), que puede estar contenido en el PV para operar más rápido.



Transformación de un plano oblicuo en un plano vertical (proyectante horizontal): el procedimiento es similar, pero girando en torno a un eje perpendicular al PV.



7.3. CAMBIOS DE PLANO

Como los abatimientos y los giros, trata de conseguir que los objetos queden situados en posiciones adecuadas. Se fundamenta en tomar un nuevo plano, horizontal o vertical, en sustitución del que se está utilizando. El nuevo plano elegido ha de ser perpendicular al que se conserva, lográndose de esta manera un nuevo sistema de planos ortogonales.

Al efectuarse un cambio de plano, la figura representada no varía su posición en el espacio, manteniéndose su forma y dimensiones intactas: son sus proyecciones las que cambian.

Hay que tener en cuenta que no es posible cambiar los dos planos de proyección a la vez: hay que ir haciendo sucesivos cambios de plano uno por uno hasta obtener la posición de la figura deseada. La proyección sobre el plano que no cambia no varía, así como la cota o el alejamiento. El cambio de plano más utilizado es el cambio de plano vertical. Es muy importante la elección oportuna de la nueva LT.

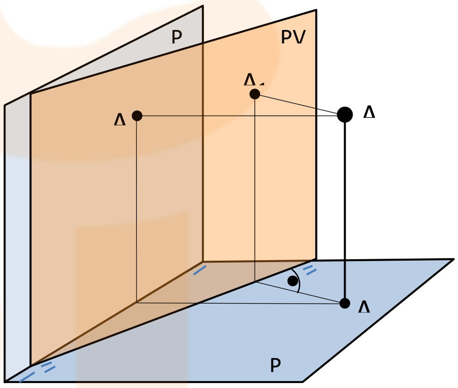
Nomenclatura

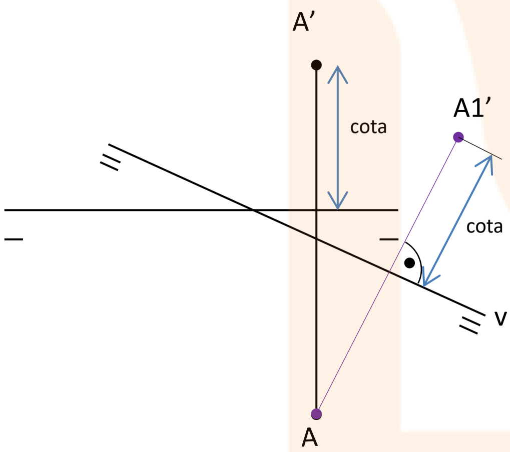
1.-A las proyecciones de los elementos cambiados de plano de proyección se les colocará un subíndice, el $_1$ para el primer cambio de plano, el $_2$ para el segundo cambio y así sucesivamente.

2.-Para indicar a su vez los cambios de plano realizados, a la nueva línea de tierra del primer cambio se le colocarán dos trazos, a la segunda tres y así sucesivamente, y en todas ellas, en el margen derecho se indicará a que planos corresponde (H-V), colocando el subíndice correspondiente en el que se haya cambiado.

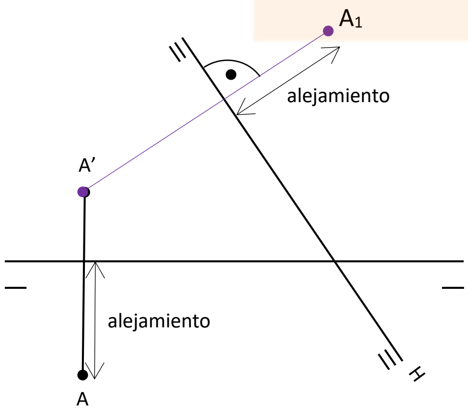
Cambio de plano de un punto

a)Cambio de plano vertical: en un cambio de plano vertical de un punto A, su proyección horizontal a no varía. En cambio, la nueva proyección vertical A'_1 se sitúa en la perpendicular a la nueva LT dibujada por A, y su cota se mantiene igual.



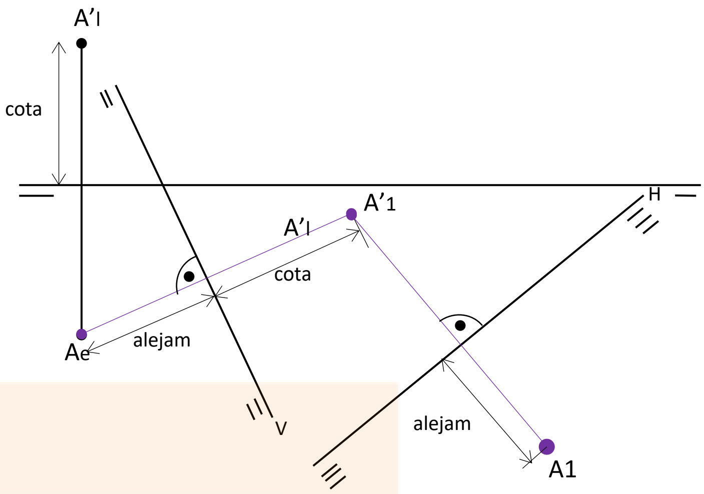


Se traza la nueva LT. Por a, se traza una perpendicular a la nueva LT, y a partir del punto corte se sitúa la cota, obteniéndose A'_1



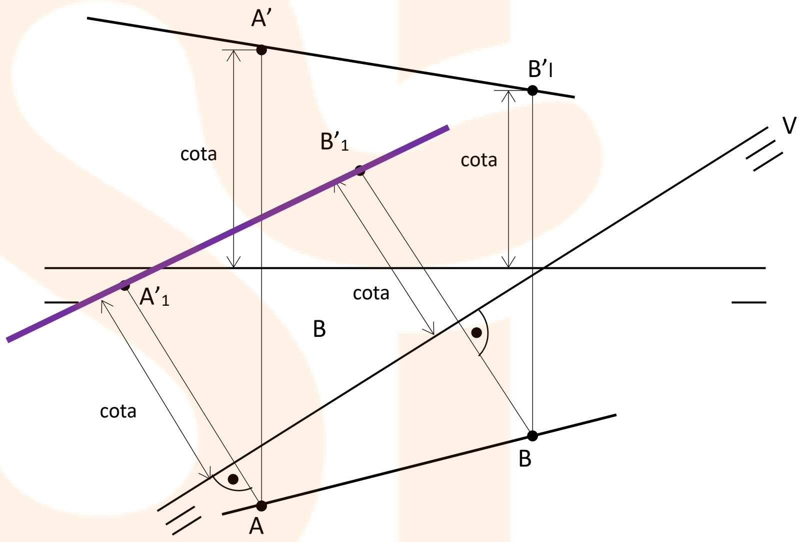
b)Cambio de plano horizontal: aquí A' es la que no cambia, así como el alejamiento, siendo a_1 la que se hallará en la perpendicular desde A' a la nueva LT.

Cambios sucesivos de plano de un punto: basta con aplicar de manera ordenada lo explicado anteriormente. El ejemplo siguiente es un cambio de plano vertical seguido de uno horizontal.

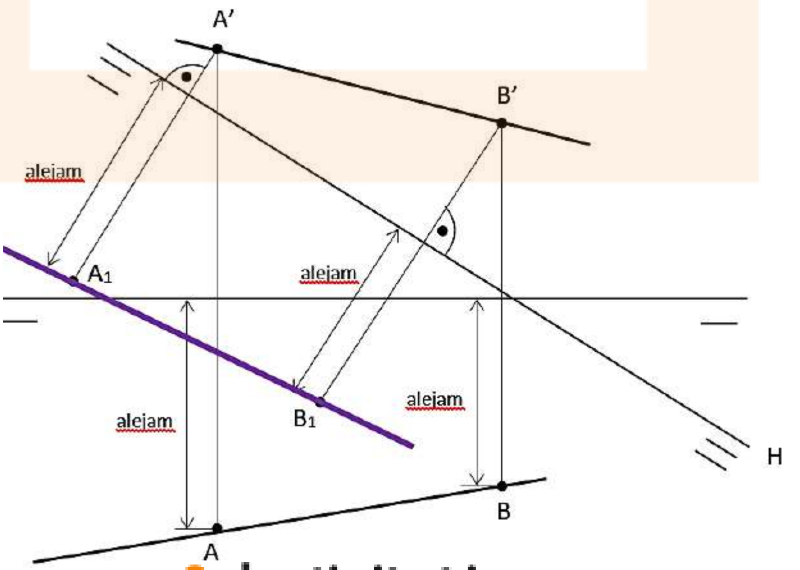


Cambio de plano de una recta: basta con efectuar el cambio correspondiente a dos puntos de la recta, A y B por ejemplo.

a)**Cambio de plano vertical**



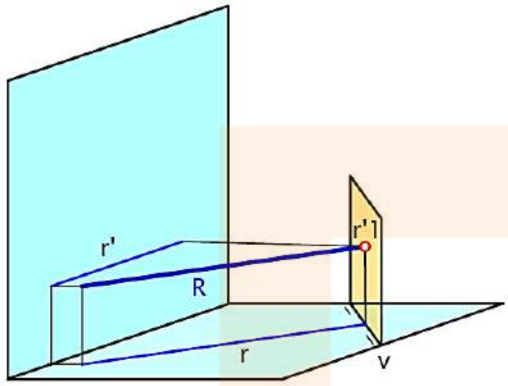
b)Cambio de plano horizontal: en este caso, se conservan las proyecciones verticales A' y B'

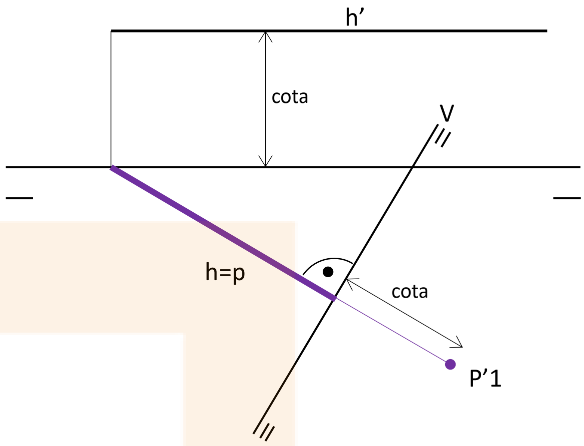


Transformar una recta horizontal en una recta de punta: Se efectúa un cambio de plano vertical, situándolo perpendicular a la recta h dada:

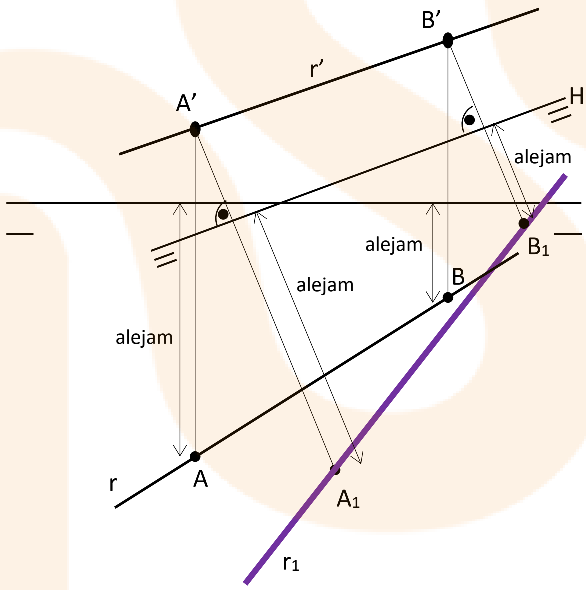
1.-Se dispone la nueva LT, perpendicular a la proyección horizontal h de la recta.

2.-Se pasa la cota a partir del corte de la recta con la nueva LT, obteniéndose así la nueva proyección vertical h'₁.

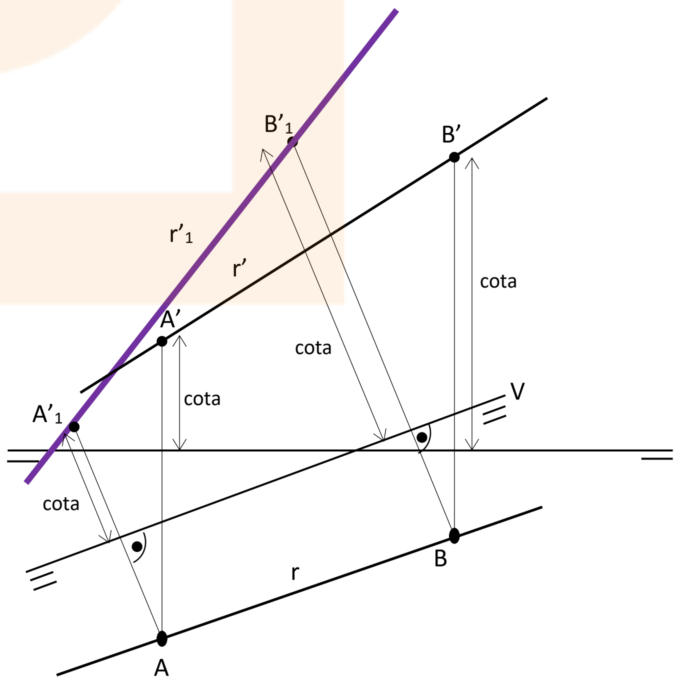




Transformación de una recta oblicua en horizontal: Para que una recta sea horizontal, ha de ser paralela al plano horizontal, por tanto, su proyección r' tiene que ser paralela a LT. Basta por tanto trazar una nueva LT paralela a r', y hacer un cambio de plano horizontal.



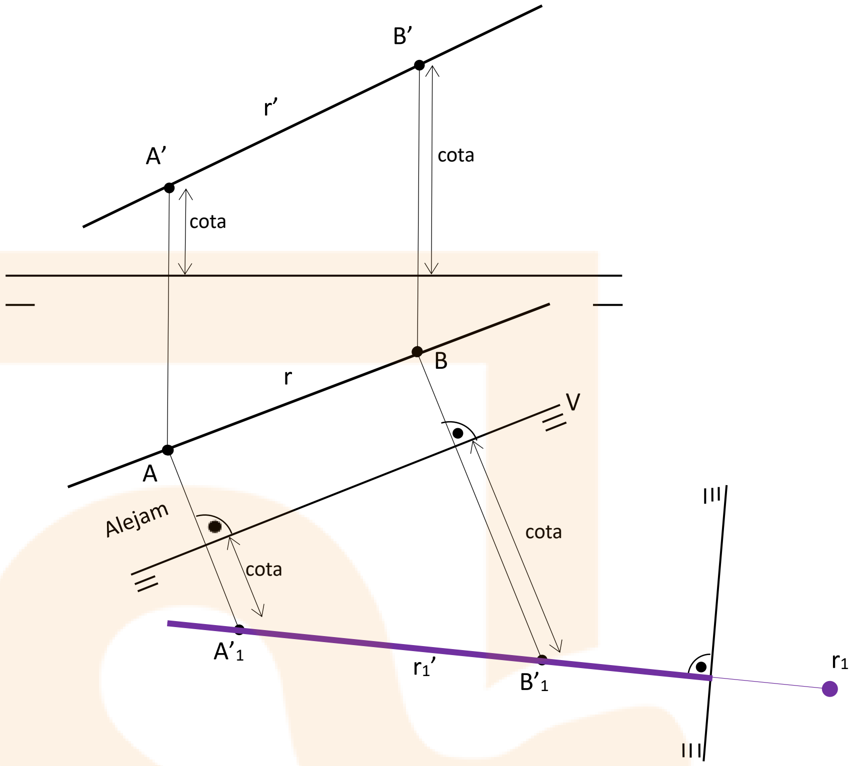
Transformación de una recta oblicua en frontal: Una recta frontal es paralela al PV, por tanto, r es paralela a LT. Basta por tanto trazar una nueva LT paralela a r y hacer un cambio de plano vertical.

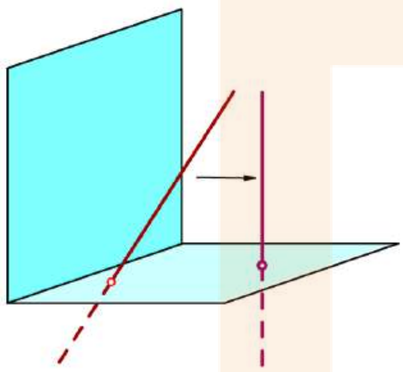


Transformar una recta oblicua en vertical: esta transformación requiere de dos cambios de plano, dado que una recta vertical es perpendicular al PH, y paralela al PV.

1.-El primer cambio de plano será para transformar a la recta r oblicua en paralela al PV, mediante un cambio de plano vertical, con una nueva LT paralela a r.

2.-El segundo es un cambio de plano horizontal para transformar a la recta obtenida en una recta perpendicular al PH. Para ello utilizamos una LT perpendicular a ésta.

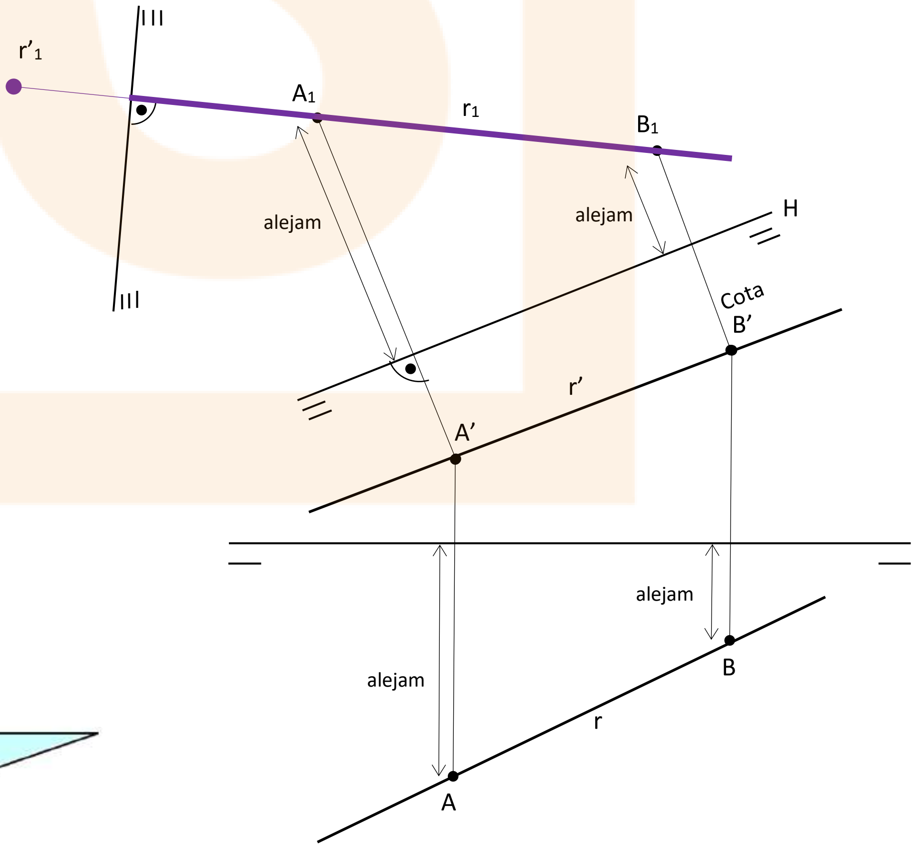


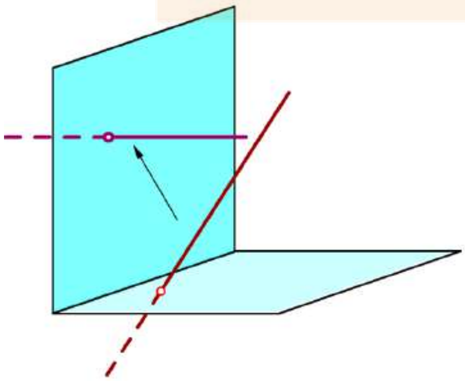


Transformación de una recta oblicua en una de punta: Requiere también de dos cambios de plano, y es que una recta de punta es perpendicular al PV y paralela al PH.

1.-En el primer cambio de plano se transforma la recta oblicua en paralela al PH mediante un cambio de plano horizontal, colocando una nueva LT paralela a r'.

2.-Se realiza un cambio de plano vertical para transformar la recta obtenida en una recta perpendicular al plano vertical, con una nueva LT perpendicular a la misma.





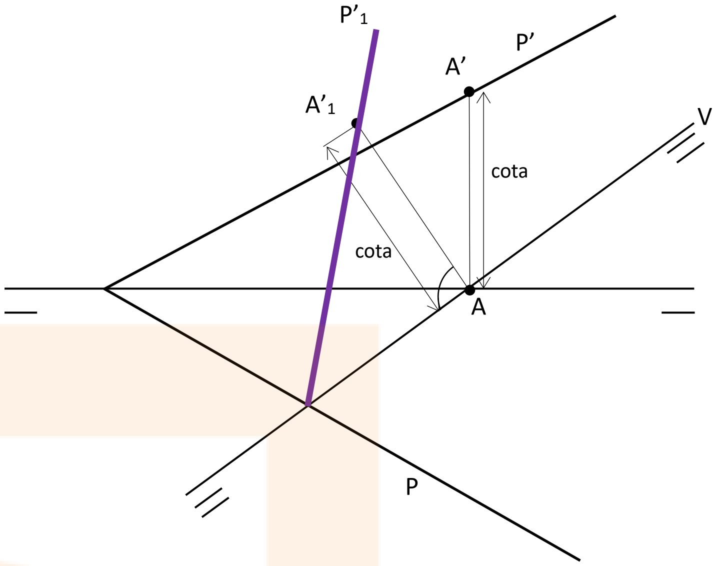
Cambio de plano de un plano

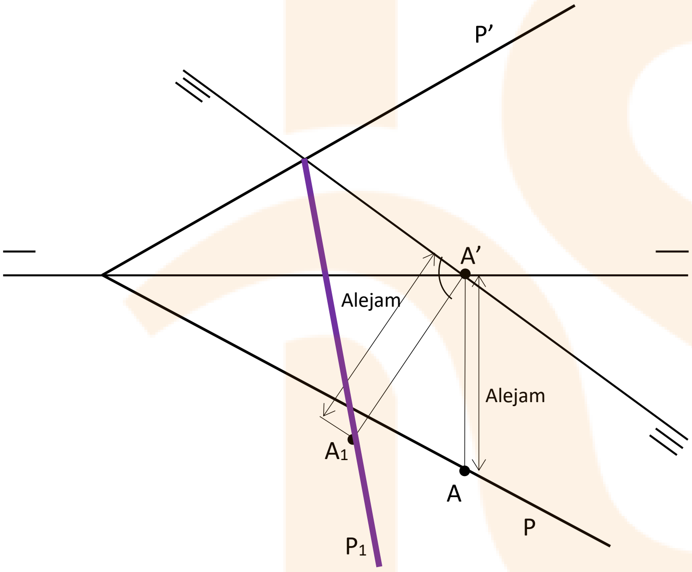
En un cambio de plano vertical, la traza horizontal del plano no varía, solo debemos buscar la nueva traza vertical, P'_1.

1.-Primero se representa la nueva LT, LT_1.

2.-Se busca un punto A que pertenezca a las dos trazas, la antigua P' y la nueva P'_1.. Ese punto tendrá su proyección horizontal a en la intersección de las dos líneas de tierra. Levantamos una perpendicular desde a hasta P, obteniendo la proyección vertical del punto, a'.

3.-Determinamos a'_1 trazando una perpendicular a LT_1 desde a, con la misma cota de la proyección original. Solo resta unir este punto con el punto de corte de la traza horizontal del plano con la LT nueva.

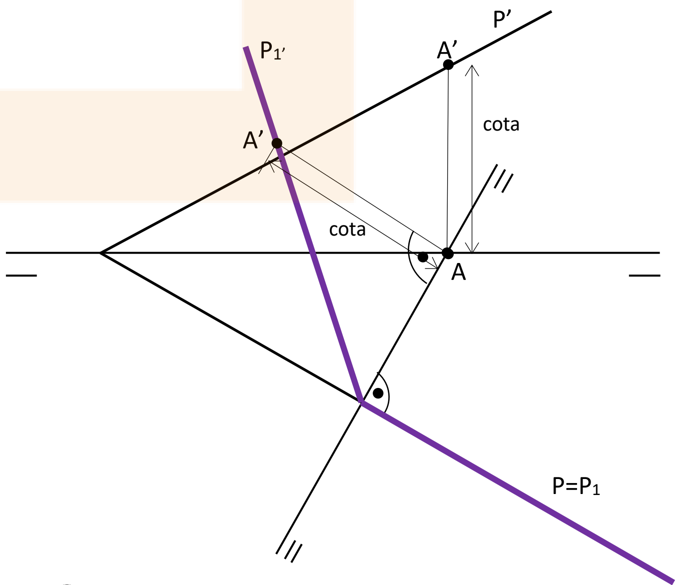


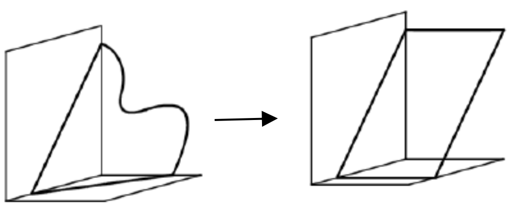


En el caso de un cambio de plano horizontal, se procede igual, pero la que se mantiene invariable es la traza vertical.

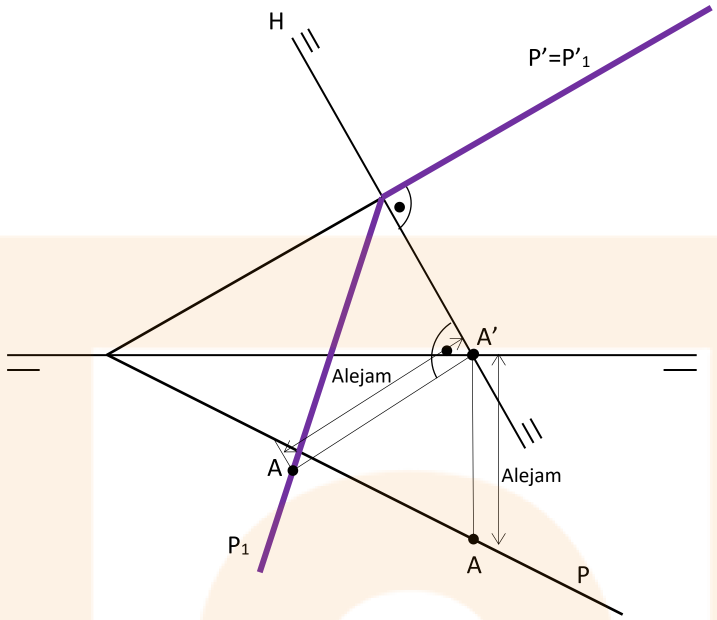
Obtener posiciones favorables de los planos

Transformar un plano oblicuo en uno de canto (proyectante vertical): el plano de canto, perpendicular al plano vertical, tiene su traza horizontal perpendicular a LT. Por ello, utilizamos una LT nueva perpendicular a la traza horizontal del plano dado. Solo habrá que buscar una nueva traza vertical de la forma vista, trazando una perpendicular hasta P' desde el corte de las dos LT, hallando a'_1 pasando la cota de a a' a la perpendicular desde a a LT_1, y uniendo este punto con el corte entre la nueva LT y P.





Transformar un plano oblicuo en un plano vertical: (proyectante horizontal). De forma similar, ahora la nueva LT deberá ser perpendicular a la traza vertical P', y el cambio de plano que efectuaremos será horizontal.



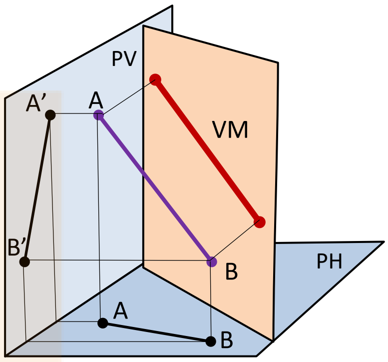
Otras posiciones del plano que pueden ser favorables son las de los planos horizontal y frontal, pues con éstas se pueden obtener verdaderas magnitudes de los elementos que contienen. Pero es más fácil utilizar el abatimiento, pues mediante cambio de plano habrá que realizar dos cambios sucesivos.

Tema 8. DISTANCIAS, VERDADERAS MAGNITUDES Y ÁNGULOS

Las verdaderas magnitudes de distancias pueden resolverse como una aplicación de la perpendicularidad y las intersecciones, pero también aplicando los movimientos vistos en el tema anterior.

8. 1. Distancias entre los distintos elementos. Posiciones favorables de resolución

Cada problema de distancias tiene una posición favorable que facilita su resolución.

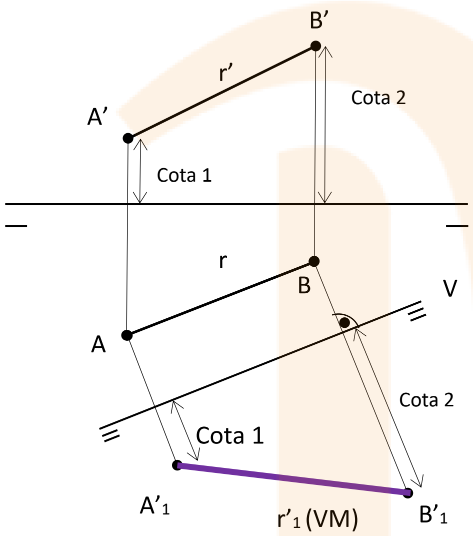


1.-Distancia entre dos puntos: En la mayoría de los casos, el segmento que definen dos puntos es un segmento oblicuo, por lo que ninguna de sus proyecciones refleja la distancia real existente entre los mismos, como podemos ver en la figura. La proyección sobre un plano al que el segmento AB sea paralelo nos dará su verdadera magnitud (VM en adelante).

Esta **posición favorable** la podemos conseguir de las tres maneras vistas:

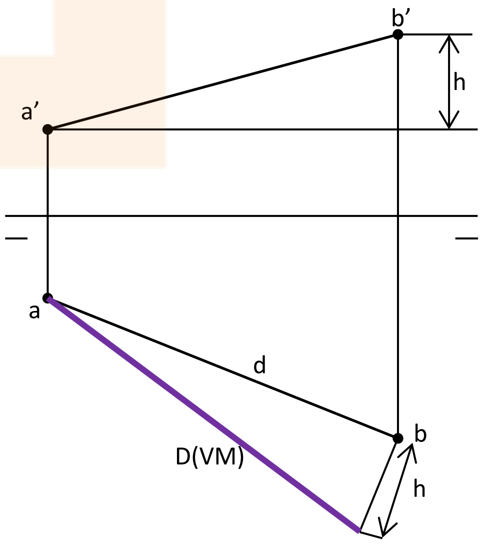
-**Girando** el segmento hasta que quede paralelo a uno de los planos de proyección.

-Definiendo un nuevo plano de proyección paralelo a la posición espacial del segmento AB, es decir, mediante un **cambio de plano.**



Definimos un nuevo plano vertical paralelo al segmento, que recogerá la VM de éste. Para ello, elegimos una nueva LT paralela a la proyección horizontal r, y pasamos la distancia de las cotas, de la forma ya vista.

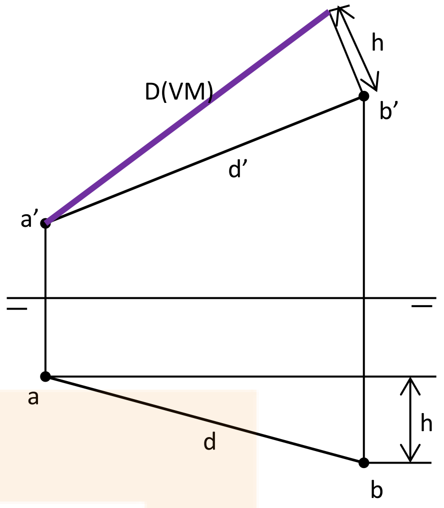
-**Mediante un abatimiento** sobre el plano vertical u horizontal.

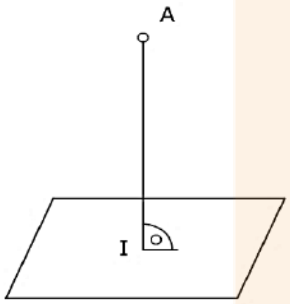


Pero el **método más sencillo** y el que se suele utilizar se realiza aplicando la teoría de los triángulos rectángulos: para determinar la distancia entre dos puntos, cuyas proyecciones conocemos, basta con determinar la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son respectivamente uno de los segmentos de proyección y la diferencia de distancias de cada uno de los puntos al plano de proyección, es decir, la diferencia de cotas de los puntos dados.

En el caso de la distancia entre dos puntos en el PH, hallamos la diferencia de cotas entre a' y b' (h), y trazamos una perpendicular a la proyección d sobre la que pasamos esa distancia h, que nos dará la hipotenusa D, verdadera magnitud del segmento buscado.

De forma similar se procede en el caso del PV:



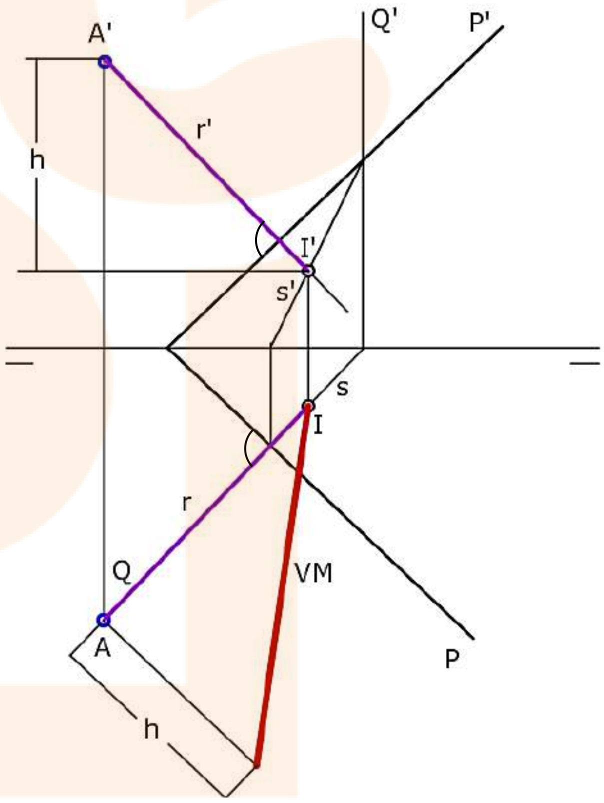


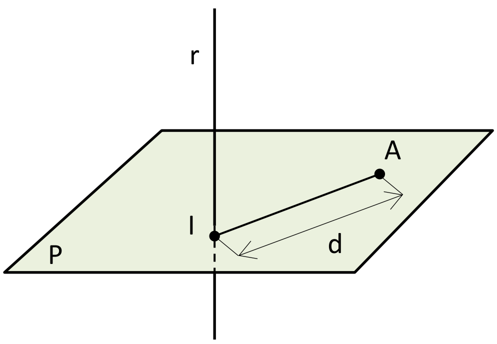
Distancia entre punto y plano: la distancia de un punto a un plano se halla siempre trazando una perpendicular desde el punto al plano, y hallando la intersección de dicha perpendicular con el plano: la distancia buscada es el segmento definido por el punto y la intersección. Por tanto, para determinar la distancia de un punto A a un plano P, se actúa del modo siguiente:

-Se traza por a’ y a las perpendiculares r y r’ al plano P.

-Se halla el punto de intersección I de esa recta r con el plano P, para lo que se utiliza un plano proyectante auxiliar Q, que corta a P en la recta s s’, la cual nos sirve para situar el punto de intersección I buscado, en su corte con r’.

-Los segmentos a’i’ y ai son la distancia pedida. Para hallar su VM, se aplica lo explicado anteriormente, por medio de la teoría de triángulos rectángulos.



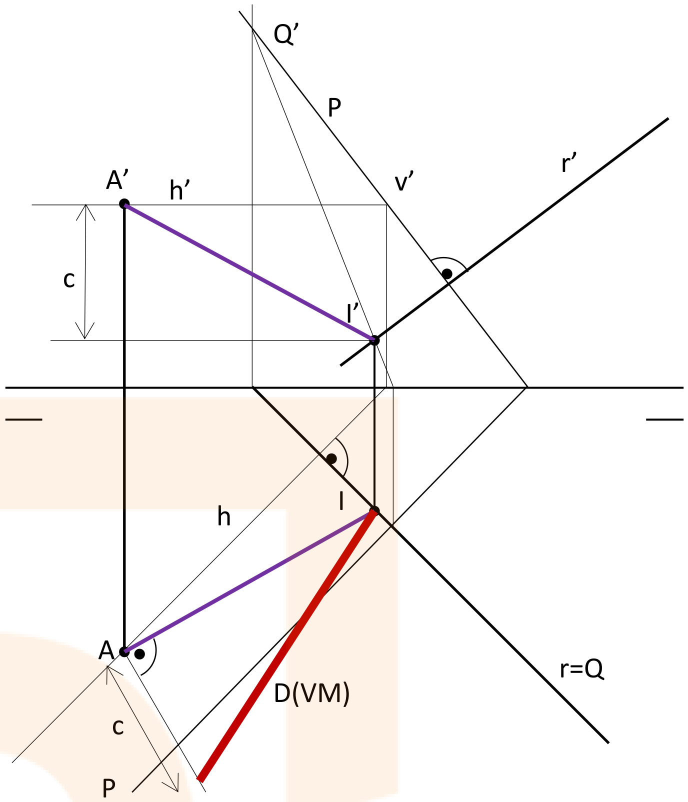


Distancia de un punto a una recta: la distancia de un punto A a una recta r es la longitud existente entre dicho punto y el punto I de intersección de la recta con la perpendicular a ella trazada desde A. Por tanto, para determinar la distancia de un punto a una recta se traza por ese punto un plano perpendicular a la recta y se halla su intersección:

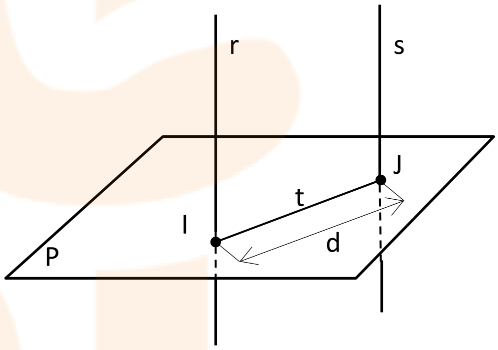
1.-Se traza por el punto A un plano P perpendicular a la recta r, para lo cual se traza una recta horizontal que pase por el punto con su traza horizontal perpendicular a la recta r y se halla un plano perpendicular a r que contenga a esa recta, o sea, pasado por v'.

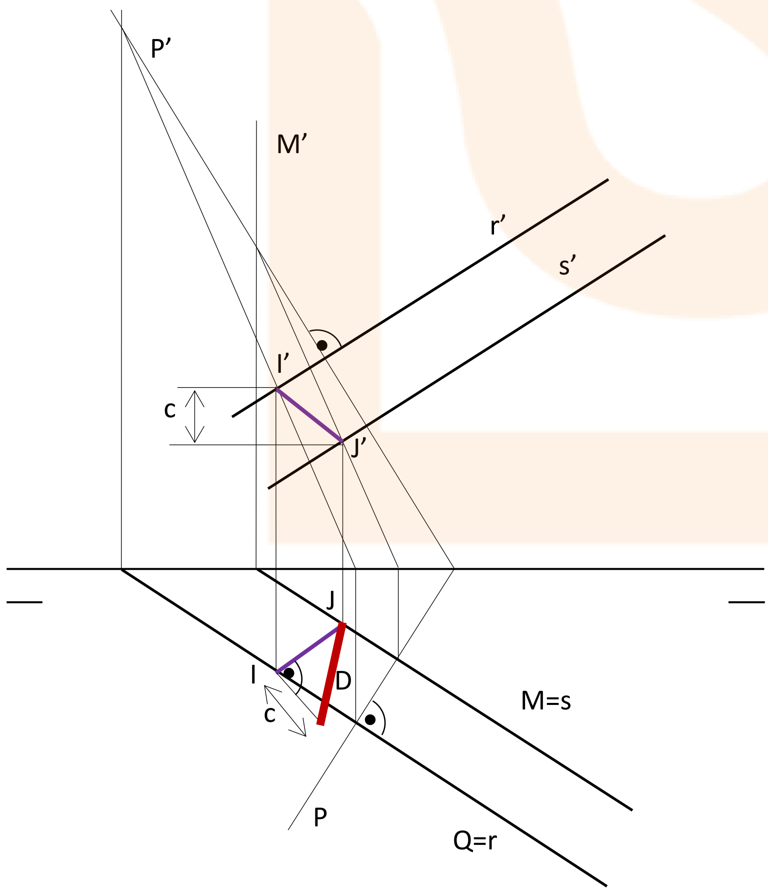
2.-Se halla su punto de intersección mediante un plano proyectante Q, como vimos en el ejemplo anterior.

3.-Medimos el segmento ai (d) de la forma vista para obtener la solución al problema.



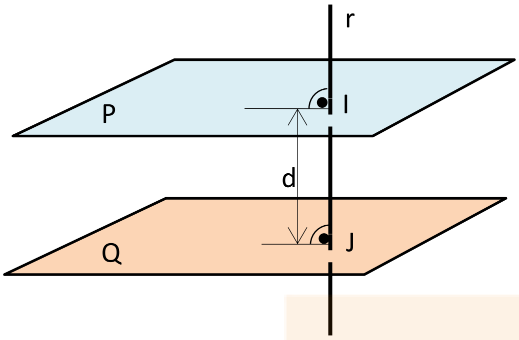
Distancia entre rectas paralelas: la distancia entre dos rectas paralelas r y s está determinada por la longitud del segmento IJ, que son los puntos de intersección de una recta t perpendicular a ambas. Por tanto, para hallar esa distancia, se traza un plano P perpendicular a ambas, y se hallan los dos puntos de intersección I y J de las rectas con el plano.





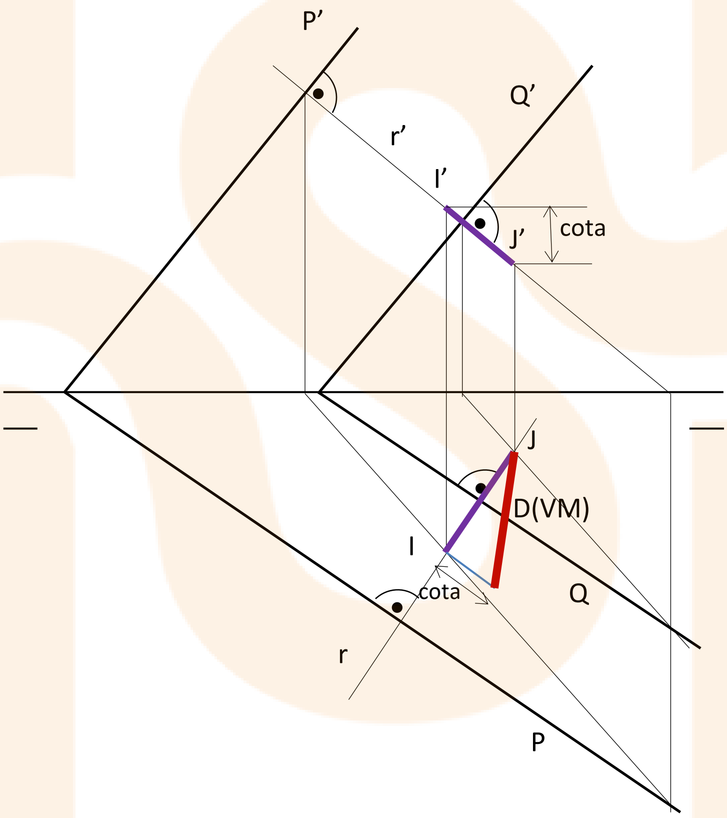
-Trazamos el plano P perpendicular a las dos rectas. Para hallar las intersecciones, I y J, aplicamos el método habitual de intersección entre recta y plano, trazando dos planos auxiliares proyectantes Q y M. Una vez halladas las intersecciones, hallamos la distancia d en VM entre ambas, de la forma vista.

Distancia entre planos paralelos:



La distancia entre dos planos paralelos P y Q se corresponde con la longitud del segmento IJ, intersecciones de dichos planos con una recta cualquiera perpendicular a ambos.

Para hallar esos puntos de intersección, trazamos una recta r perpendicular a ambos. Dibujamos a continuación un plano proyectante vertical V para hallar I y J, de la forma habitual de resolver una intersección entre recta y plano. Por último, hallamos la VM de la distancia IJ (d).



8.2. ÁNGULOS

En Sistema Diédrico los casos básicos que se nos pueden presentar son los siguientes:

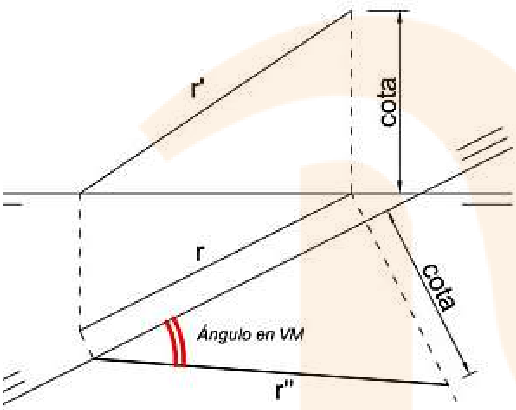
1. Ángulo que forma una recta con los planos de proyección
2. Ángulo que forma un plano con los planos de proyección
3. Ángulo que forman dos rectas que se cortan
4. Ángulo que forman dos rectas que se cruzan
5. Ángulo entre una recta y un plano
6. Ángulo que forman dos planos no paralelos

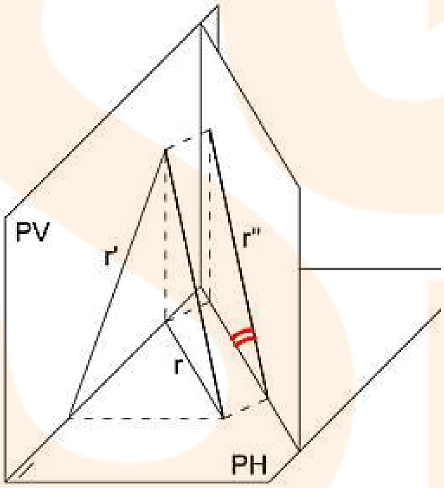
1. Ángulo que forma una recta con los planos de proyección

El ángulo que forma una recta cualquiera con los planos de proyección no se ve directamente en verdadera magnitud, ya que, de forma genérica, las rectas serán oblicuas a ellos.

La forma más sencilla de encontrar el ángulo será mediante un **cambio de plano**.

Ángulo de una recta con el Plano de Proyección Horizontal (PH): Para encontrar el ángulo que forma una recta con el plano horizontal tienes que hacer un ***cambio de plano vertical***, es decir, debes mantener la proyección horizontal de la recta y encontrar su nueva proyección vertical, de manera que la recta quede en el cambio de plano como frontal. Para ello, la nueva Línea de Tierra debe ser paralela a la proyección horizontal de la recta:

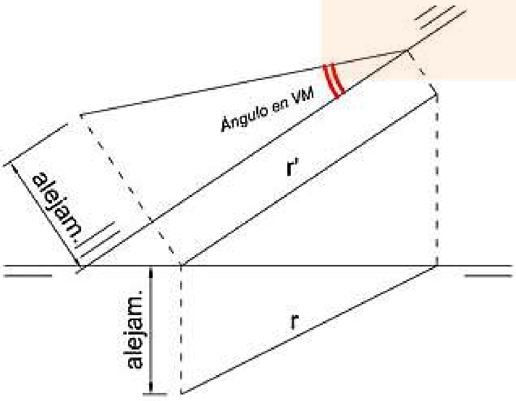


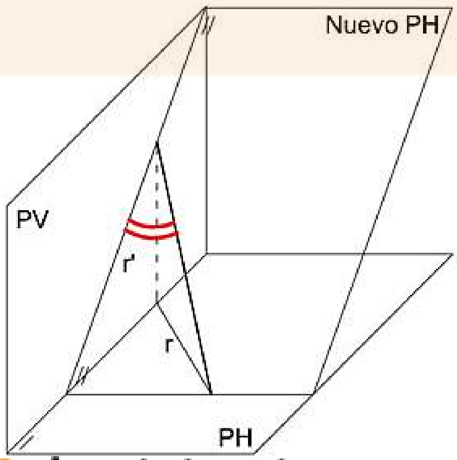


Se sitúa una nueva Línea de Tierra paralela a la proyección horizontal **r** de la recta y se encuentra su nueva proyección vertical, llevando la cota de dos puntos desde la nueva Línea de Tierra. Si se utiliza el punto traza horizontal, ese punto se puede situar directamente sobre la línea de tierra, ya que su cota es cero.

El ángulo que forma una **recta frontal** con el PH sí está en verdadera magnitud

Ángulo de una recta con el Plano de Proyección Vertical (PV): Razonando de la misma manera, ahora necesitamos un cambio de plano horizontal, con una nueva línea de tierra paralela a la proyección vertical de la recta. Obtendremos así una recta cuya proyección vertical es paralela a la nueva línea de tierra, con lo que se trata de una recta horizontal de plano.



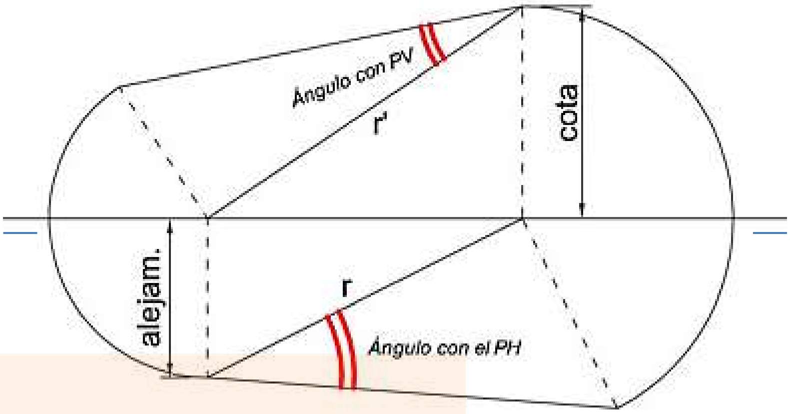


El ángulo que forma una **recta horizontal** con los planos de proyección sí está en verdadera magnitud

Nota: *En la perspectiva utilizada en el dibujo anterior hemos situado la línea de tierra justo sobre la proyección vertical de la recta, mientras que en el dibujo diédrico la hemos situado a una pequeña distancia. Ambos dibujos son correctos. De hecho, la manera más sencilla de encontrar los ángulos sería haciendo coincidir las nuevas líneas de tierra con las proyecciones*.

Veámoslo dibujado de la manera más sencilla y rápida:

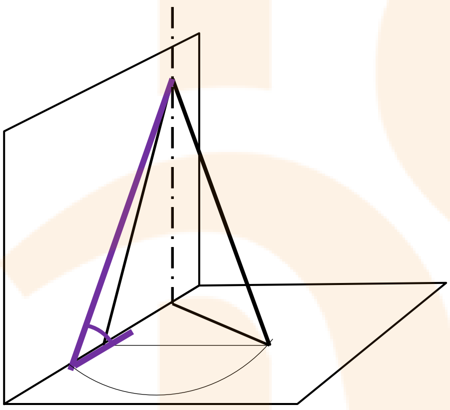
En este dibujo quedan simplificados y resumidos los dos anteriores

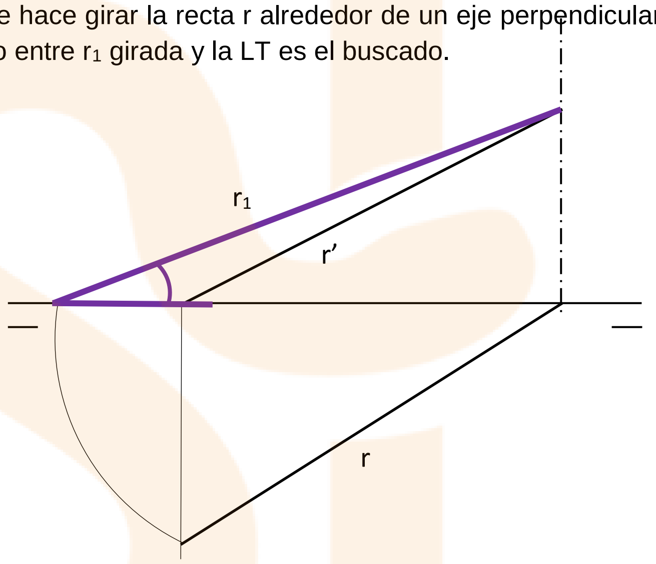


<u>2º Procedimiento, mediante giro</u>

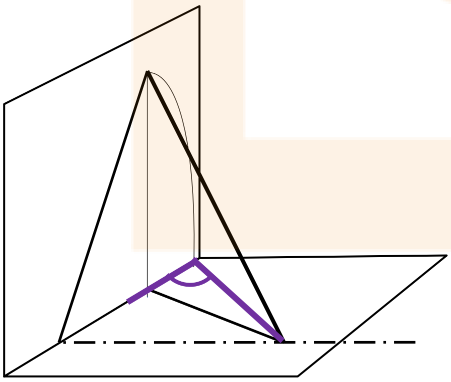
<u>Ángulo que forma una recta con los planos de proyección</u>

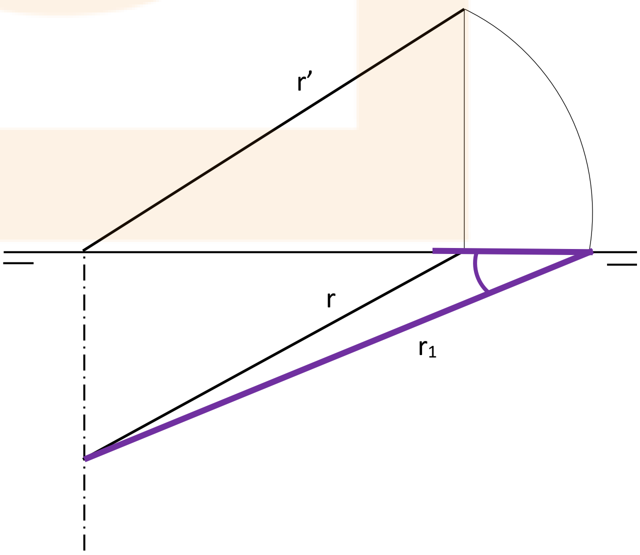
<u>a)Ángulo con el plano horizontal:</u> El ángulo Q que forma una recta r con el PH es el determinado por ella y su proyección horizontal r. Para hallar su VM, se hace girar la recta r alrededor de un eje perpendicular al PH que pase por LT, hasta situarla en el PV. El ángulo entre r_1 girada y la LT es el buscado.





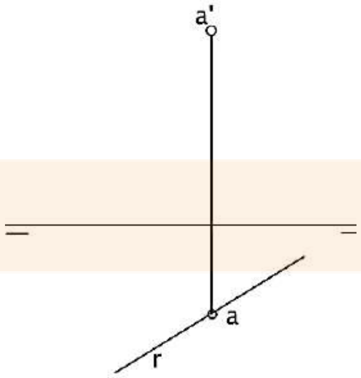
<u>b)Ángulo con el plano vertical:</u> se hace igual, pero utilizando como eje una recta de punta que pase por LT.

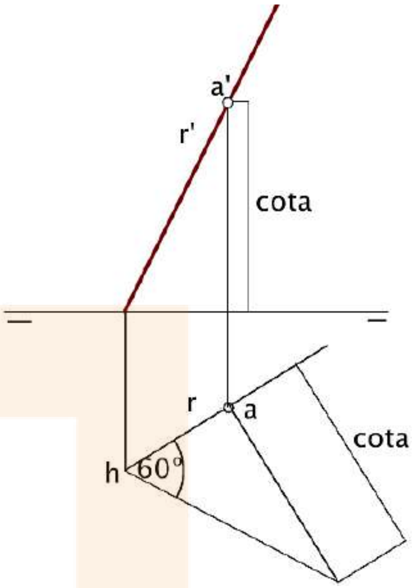




Dada la proyección horizontal de una recta, un punto A de ella y el ángulo que forma con el plano horizontal, hallar su proyección vertical

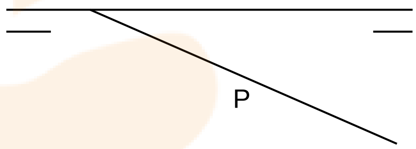
Trazamos un triángulo rectángulo en el que un cateto es la cota de a y la hipotenusa la recta que forma 60º con r (lógicamente, formará 30º con el otro cateto). Este tríangulo nos va a dar la traza h de la recta, que referenciamos a la línea de tierra y unimos con a', obteniéndose la proyección vertical r' de la recta





2. Ángulo que forma un plano con los planos de proyección

El ángulo que forma un plano oblicuo con los planos de proyección tampoco se puede ver directamente en verdadera magnitud. Un problema muy típico relacionado con esto es que nos den la traza horizontal o vertical de un plano y el ángulo que forma el plano con el otro plano de proyección, y nos pidan averiguar la otra traza:

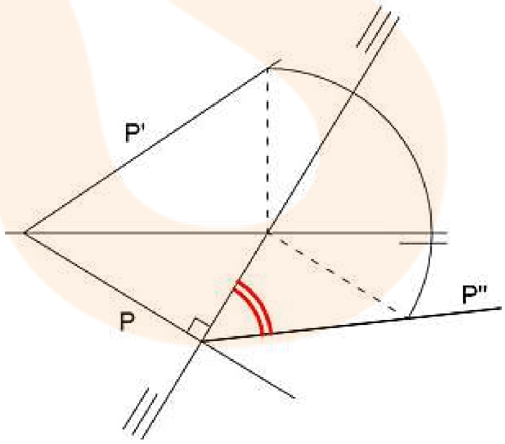


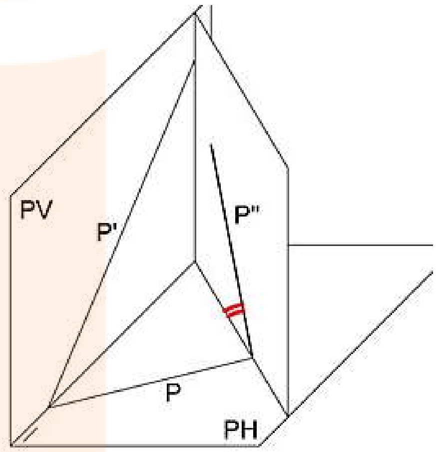
Podemos utilizar dos procedimientos:

1.-Mediante **cambio de plano** para conseguir ver el plano como proyectante.

2.-Mediante una **línea de máxima pendiente** (para el ángulo con el **plano horizontal**) o de **máxima inclinación** (para el ángulo con el **plano vertical** de proyección)

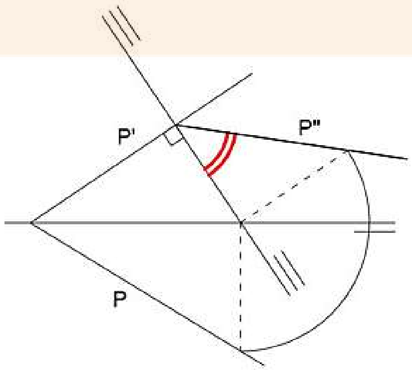
Ángulo de un plano con el Plano Horizontal: Necesitamos ver el plano como proyectante vertical, es decir perpendicular al plano vertical. Para ello tenemos que hacer un **cambio de plano vertical** con la nueva línea de tierra perpendicular a la traza horizontal. Esta quedará fija y tendremos que encontrar simplemente la nueva traza vertical.

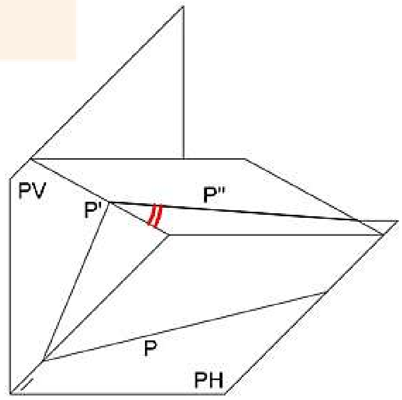




Ángulo de un plano oblicuo con el Plano Vertical: Para poder ver el ángulo que forma un plano oblicuo con el plano vertical necesitamos verlo como **plano proyectante horizontal.**

Para ello tendremos que hacer un **cambio de plano horizontal**, en el que mantendremos fija la traza vertical del plano, dibujaremos una nueva línea de tierra perpendicular a esa traza vertical P' y tendremos que encontrar la nueva traza horizontal.





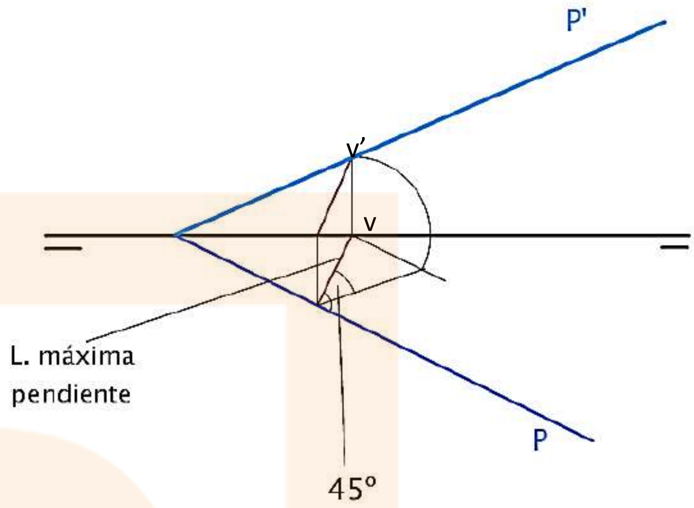
2.-Mediante abatimiento de una línea de máxima pendiente o máxima inclinación del plano

El ángulo que un plano forma con el plano horizontal de proyección es el mismo que forma una de sus rectas de máxima pendiente con dicho plano. Bastará pues con abatir alguna de las rectas de máxima pendiente en el plano horizontal de proyección para apreciar este ángulo en verdadera magnitud:

a)Elegimos cualquier línea de **máxima pendiente** del plano horizontal (perpendicular por tanto a su traza horizontal). La abatimos sobre el plano horizontal: trazamos el ángulo que nos piden en su corte con la traza P y lo cortamos con una perpendicular a la recta, desde el corte de la recta con la línea de tierra.

b)Trazamos una perpendicular desde v y haciendo centro también en v pasamos el punto anteriormente obtenido sobre esa perpendicular, con lo que obtenemos v', traza vertical de la recta de máxima pendiente, que nos determina ya la traza vertical del plano P'.

En el caso de **ángulo con el plano vertical**, se hace igual, pero eligiendo una recta de **máxima inclinación**.

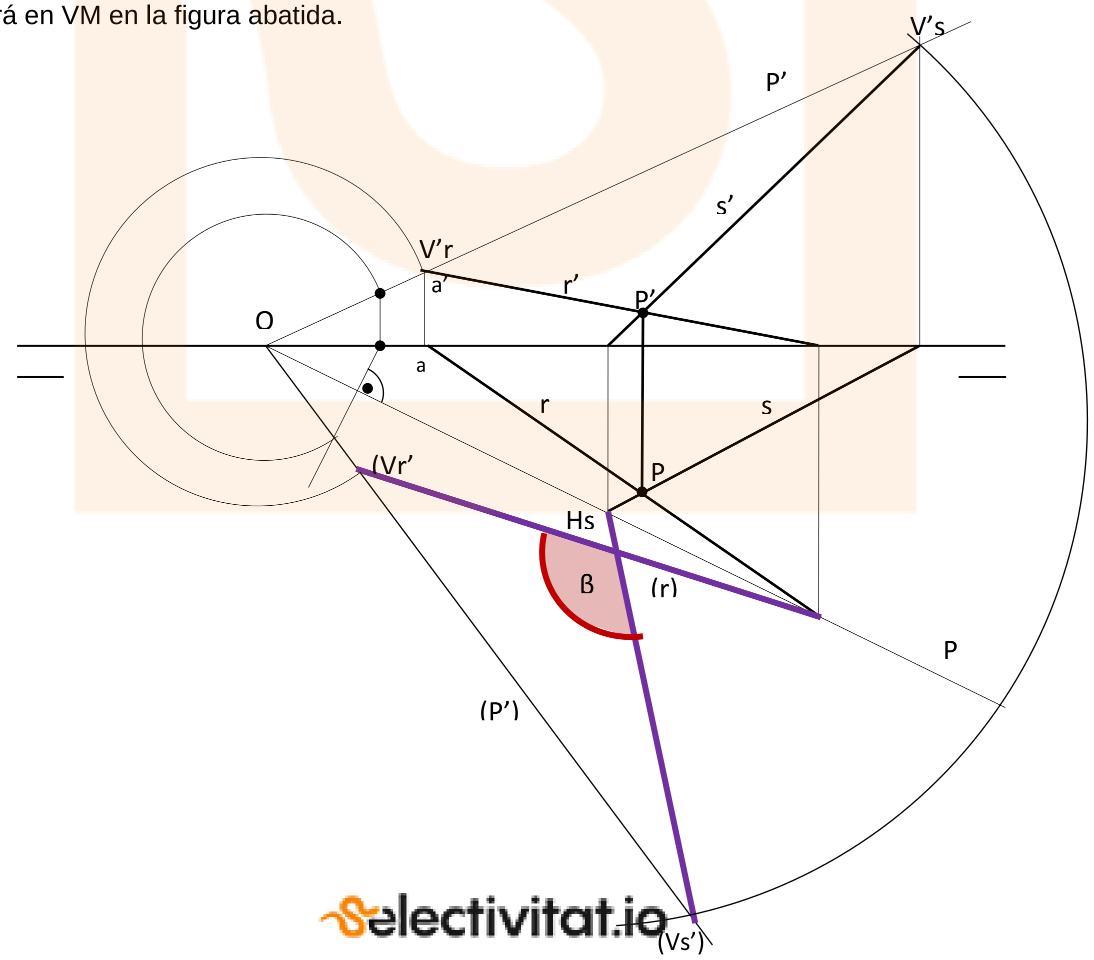


3.-<u>Ángulo que forman dos rectas que se cortan:</u> Puesto que dos rectas en el espacio que se cortan suelen estar en posición oblicua respecto a los planos de proyección, el ángulo que forman no se verá en verdadera magnitud. La manera más sencilla de encontrar ese ángulo es mediante **abatimiento.**

1.-Tenemos las rectas r y s, que se cortan en el punto P. Estas dos rectas definen un plano P, que se halla uniendo las trazas verticales y horizontales respectivas de ambas rectas, V'r con V's y Hr con Hs.

2.-Se abate el plano P sobre el plano horizontal de la forma vista: trazamos un punto a' de P', y desde a trazamos una perpendicular a P. El plano (P), abatido, estará en el corte entre un arco Oa' y esa perpendicular.

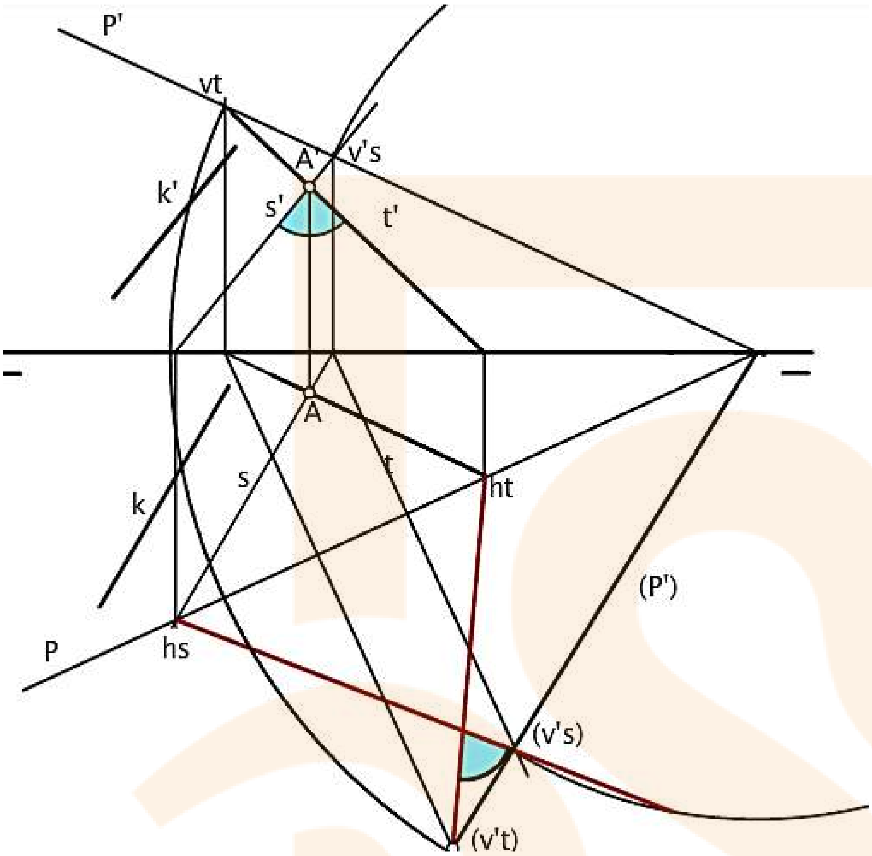
3.-Abatimos también, con el plano P, las dos rectas, obteniendo (r) y (s), abatidas. El ángulo β formado por ellas estará en VM en la figura abatida.



selectivitat.io

<u>4.-Ángulo entre dos rectas que se cruzan</u>: dos rectas en el espacio que se cruzan son aquellas que **no se cortan**, es decir, que no tienen ningún punto en común. Para saber si dos rectas en el espacio se cortan o se cruzan basta con mirar los puntos de intersección de sus proyecciones. Si el punto en el que se cortan las proyecciones verticales coincide verticalmente con el punto en el que se cortan las proyecciones horizontales, entonces las rectas se cortan (existe un punto en común). En caso contrario se cruzan.

Para encontrar el ángulo que forman estas rectas simplemente necesitaremos dibujar una **recta paralela** a una de ellas que corte a la otra y repetir el proceso del apartado anterior.

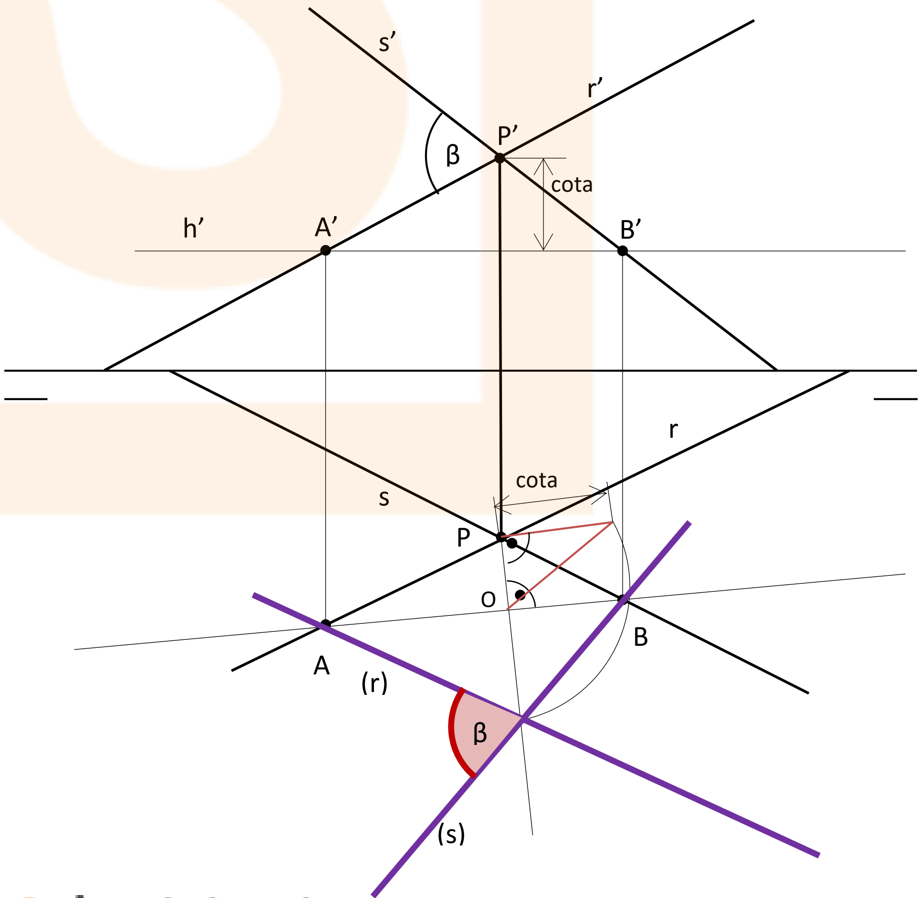


Trazamos por un punto cualquiera A de la recta t una paralela a k (s). A partir de ahí se resuelve igual que el anterior, buscando el ángulo entre t y s, que será el mismo que entre k y t, según vimos al principio del tema.

Si existen problemas para hallar las trazas del plano P, se puede hacer de la siguiente forma:

1.-Se abate el plano alrededor de una de sus horizontales o frontales: hallamos una horizontal del plano trazando una paralela a LT que corte a r' y s' en los puntos A' y B', que se referencian a las proyecciones horizontales r y s de la recta en A y B, para hallar la proyección h de la horizontal.

2.-Para abatir el punto P hallamos la diferencia de cotas entre h' y P' para abatir el punto P de la forma vista. Una vez obtenido el punto abatido (P), lo unimos con A y B, obteniéndose las rectas (r) y (s) abatidas. El ángulo que forman está en verdadera magnitud.

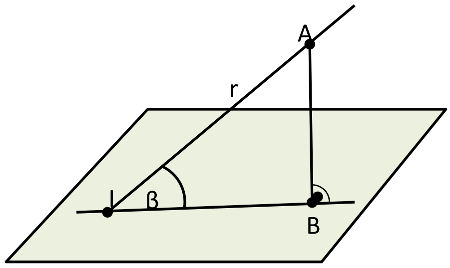


5.-Ángulo entre una recta y un plano: El ángulo de una recta con un plano es el ángulo agudo que forma dicha recta con su proyección ortogonal sobre el plano. Habrá que hallar, por tanto:

1.-La intersección I entre la recta y el plano.

2.-Un punto A cualquiera de la recta, desde el que se traza una perpendicular al plano cuya intersección nos da el punto B, que unido a I nos permite hallar la proyección ortogonal de la recta.

3.-Determinar el ángulo Q que forman r y s, para lo cual se aplicará el método general para conocer el ángulo e dos rectas que se cortan

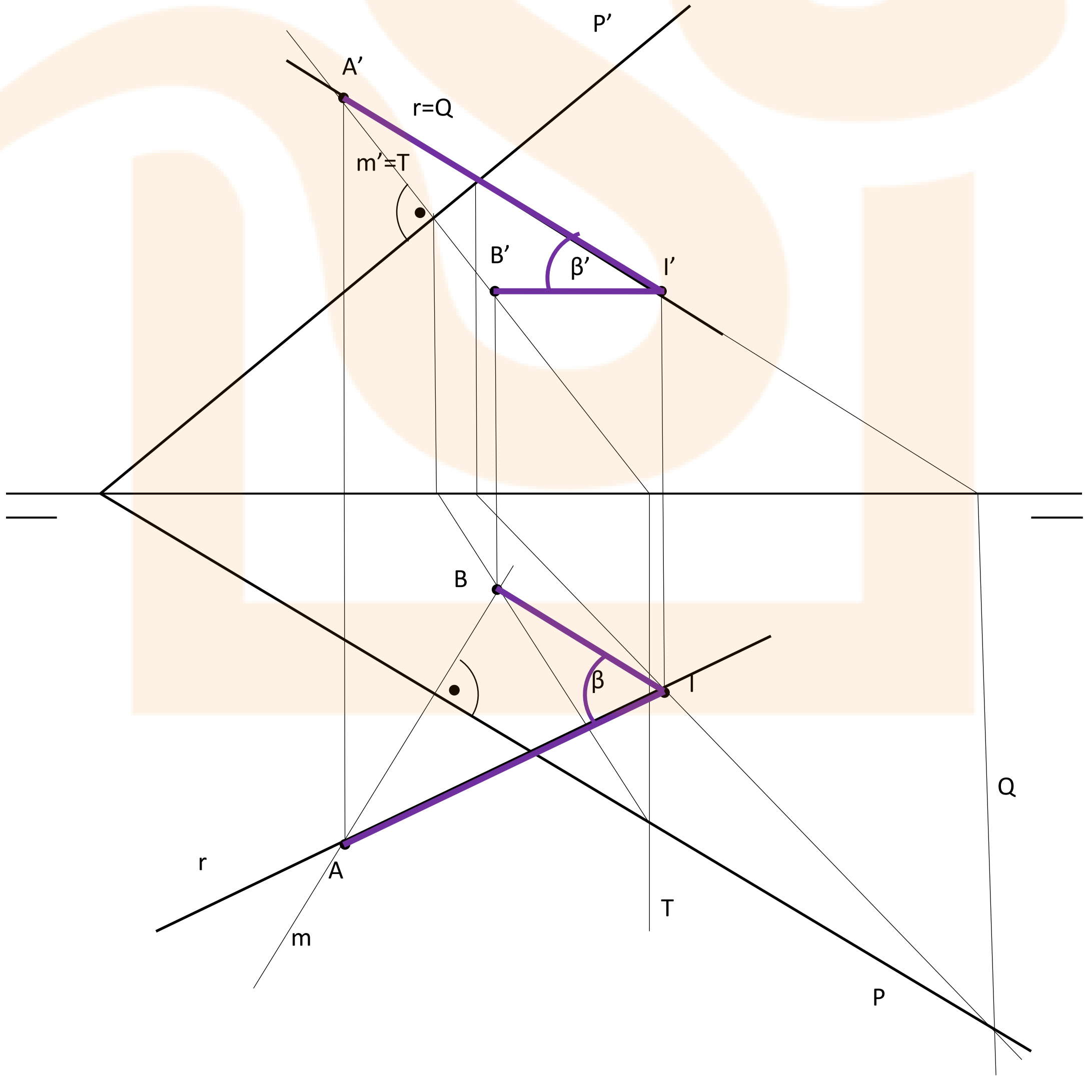


El procedimiento detallado es el siguiente:

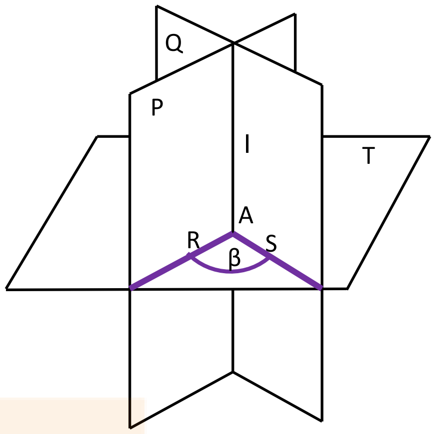
1.-Determinamos la intersección I de la recta dada r y el plano, mediante un plano auxiliar proyectante Q.

2.-Por un punto cualquiera A de la recta se traza la perpendicular al plano (m). Hallamos la intersección B entre esta perpendicular y el plano mediante un plano auxiliar proyectante T.

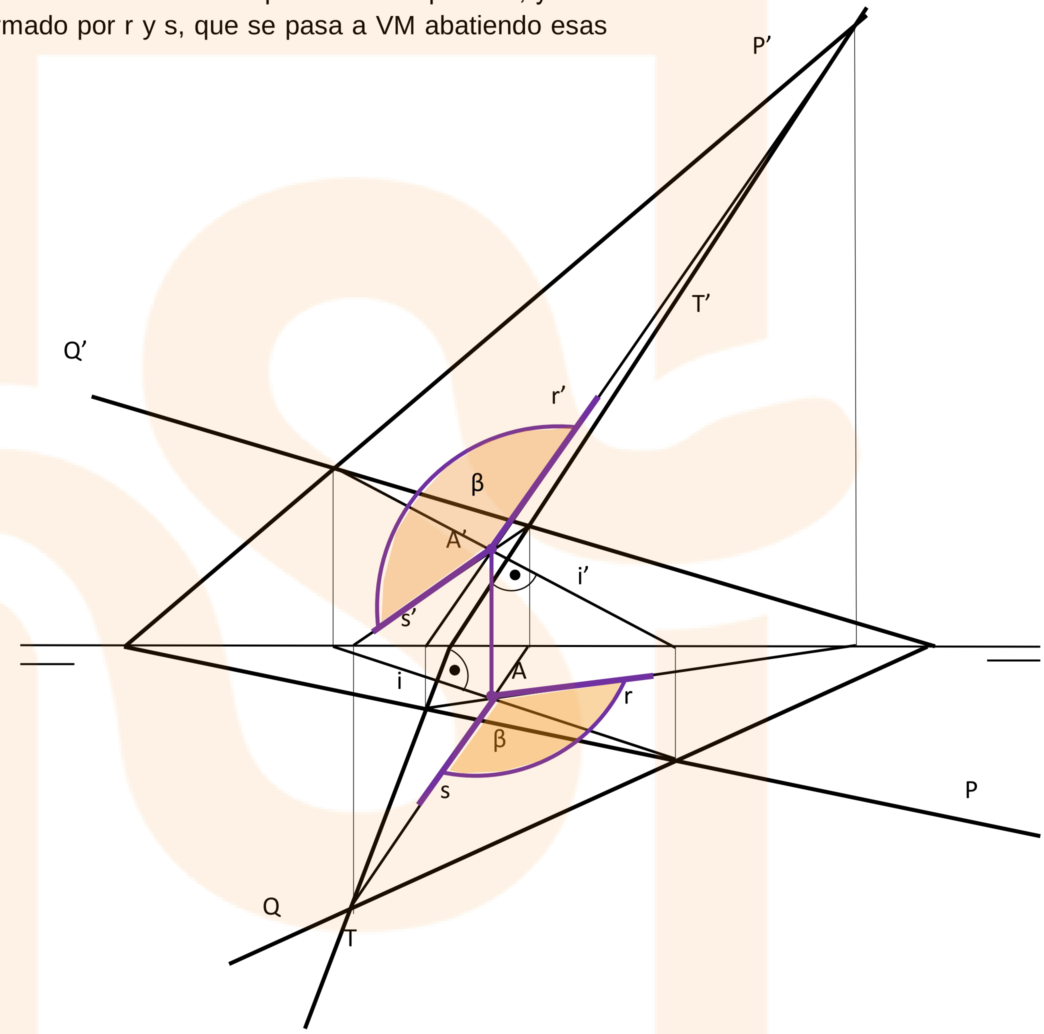
3.-Uniendo bi y b'i' obtenemos las proyecciones ortogonales de la recta sobre el plano. Hallamos así el ángulo buscado Q, definido por la recta y sus proyecciones, que se abate de la forma ya vista para hallar su VM.



<u>6.-Ángulo entre dos planos:</u> Tenemos los planos P y Q. Hallamos su intersección I, y por un punto A cualquiera de la misma trazamos un plano T perpendicular a ambos. El ángulo formado por r y s, intersecciones de los planos dados con el auxiliar, es el buscado.



Hallamos la recta i'i de intersección de los planos. Trazamos un plano auxiliar T perpendicular a i'i. Hallamos las rectas de intersección s y r del plano auxiliar T con los planos dados. Ambos se cortan en un punto a'a del plano T, y éste es el vértice del ángulo formado por r y s, que se pasa a VM abatiendo esas rectas r y s.



MUY IMPORTANTE: A la hora de resolver los ejercicios de selectividad, hay que tener muy claras las distintas posiciones de ángulos entre planos y entre éstos, la línea de tierra y los planos de proyección horizontal y vertical:

1.-Ángulo de un plano con los planos de proyección (se resuelve mediante la recta de **máxima pendiente** o de **máxima inclinación**, según sea el ángulo con el plano horizontal o vertical)

2.-Ángulo entre las dos trazas de un plano (se resuelve mediante **abatimiento**)

3.-Ángulo entre una traza y la línea de tierra (se mide **directamente**)

4.-Ángulo entre planos proyectantes con los planos de proyección (se mide **directamente**)