TEMA 9. SUPERFICIES

De la misma forma que un punto al trasladarse configura una línea, ésta, al moverse en el espacio en sucesivas posiciones crea una superficie. Esa línea generadora puede ser recta o curva y se denomina **generatriz**. Si el movimiento de esa línea generatriz obedece a una ley determinada, la superficie se llama **geométrica**. Hay que diferenciar entre cuerpo y superficie: el **cuerpo** tiene volumen material, *peso",* mientras que la superficie es como la *lámina*, de grueso infinitamente pequeño, que lo recubre.

Tipos de superficie: según sea el elemento generador, podemos distinguir:

-**Superficies regladas**, si la generatriz es una recta

-**Superficies no regladas,** cuando las genera una curva.

En la siguiente tabla se clasifican las superficies más importantes.

9.1. POLIEDROS REGULARES

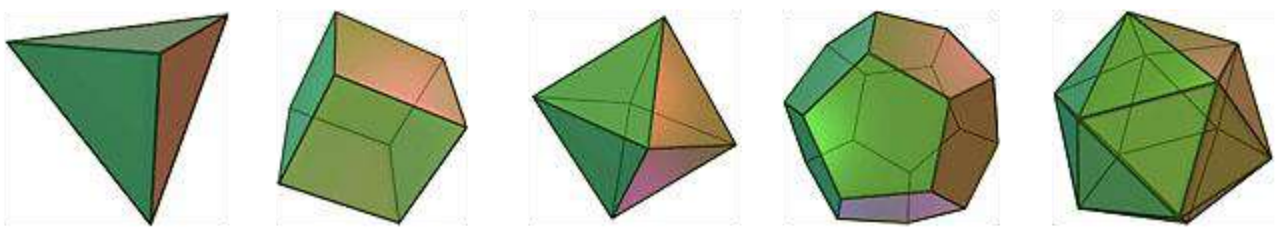
Los poliedros son cuerpos geométricos limitados por superficies. También podemos definirlos como figuras tridimensionales cerradas formadas por varios planos que se interseccionan en el espacio.

- Las **caras** del poliedro son cada uno de los polígonos que lo forman.

-Las **aristas** son los segmentos comunes a dos caras.

-Los **vértices** son las intersecciones entre las aristas.

Los **poliedros regulares** son aquellos que tienen caras formadas por el mismo polígono regular, y sus ángulos y aristas son también iguales entre sí. Todos los poliedros regulares son convexos (si no, no se podrían cerrar) y son los cinco siguientes: Tetraedro, cubo o hexaedro, Octaedro, Dodecaedro e Icosaedro.



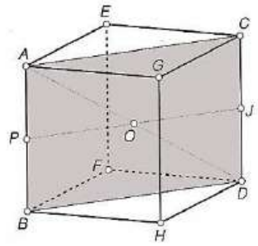
En la siguiente tabla quedan expuestos sus elementos

Poliedro	Caras	Vértices	Aristas	Polígono de las caras
Tetraedro	4	4	6	Triángulos equiláteros
Cubo o hexaedro	6	8	12	Cuadrados
Octaedro	8	6	12	Triángulos equiláteros
Dodecaedro	12	20	30	Pentágonos
Icosaedro	20	12	30	Triángulos equiláteros

Elementos que configuran los polígonos euclidianos.

Secciones planas

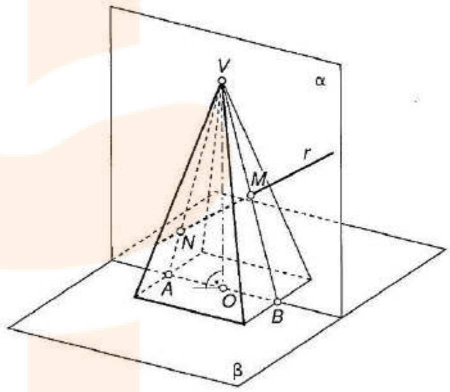
Se denomina **sección plana** de un sólido al corte producido en el mismo por un plano que lo divide en dos superficies limitadas, y cuya forma varía en función de la dirección de ese plano. Las secciones son un claro ejemplo de la aplicación de **intersecciones** de planos: si la intersección de planos que hemos estudiado nos daba como resultado una recta, la intersección de un sólido y un plano nos dará un polígono (que no es más que el resultado de varias rectas al cortarse entre sí) o una curva.



Sección principal de un cubo

La **sección principal** de un poliedro regular es aquella que nos muestra todas las magnitudes fundamentales del poliedro, es decir, lados, ángulos, radios de las esferas inscritas y circunscritas, etc.

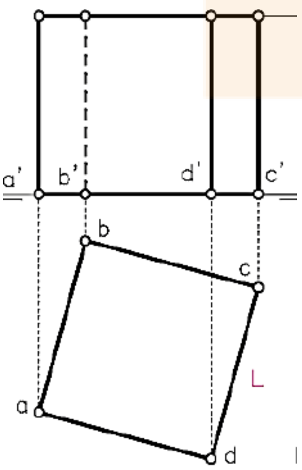
Intersección de una recta con un sólido: se genera por el paso de una recta a través de un sólido. En esta maniobra lo fundamental es determinar correctamente la situación de los puntos M y N de entrada y salida de la recta al penetrar en el sólido. El procedimiento general para solucionarlo es tomar un plano α secante auxiliar que contenga a la recta: los puntos de entrada y salida M y N estarán contenidos en la intersección de dicha recta con el contorno de la sección plana. La intersección de recta con sólido es la base de los problemas de intersección de sólidos entre sí

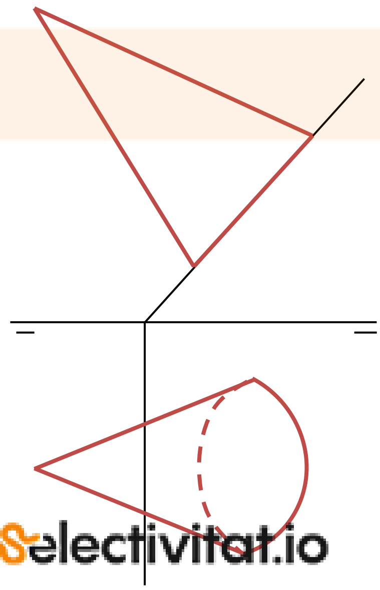


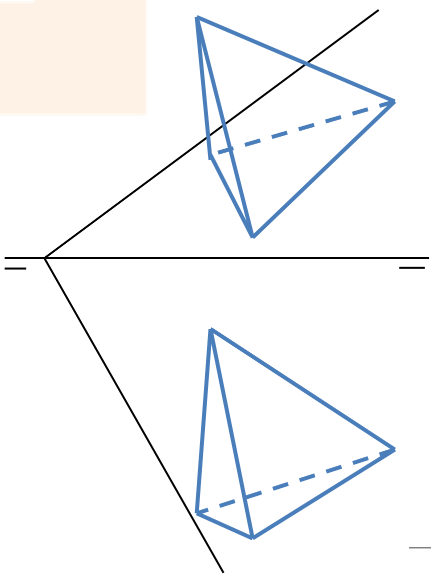
Intersección de una recta con una pirámide.

A continuación veremos uno a uno los diferentes tipos de superficies, estudiando su construcción desde sus tres posiciones más comunes (aunque hay más casos particulares, que veremos también):

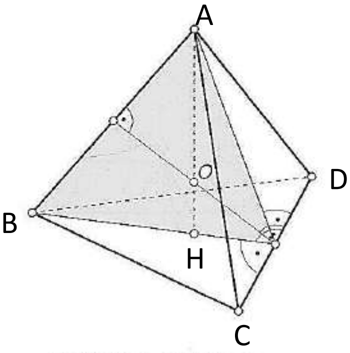
Apoyado sobre el **plano de proyección horizontal** (PH)	Apoyado sobre un **plano proyectante**	Apoyado sobre un **plano oblicuo**







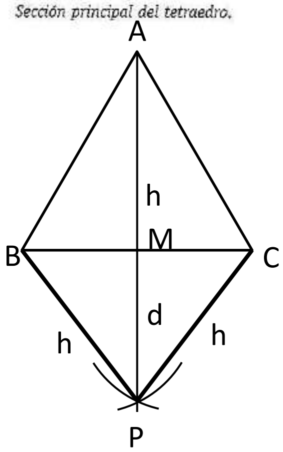
9.1.1 EL TETRAEDRO



Sección principal del tetraedro.

El tetraedro es un polígono regular formado por cuatro caras que son triángulos equiláteros, 6 aristas y 4 vértices. La **altura** del tetraedro se halla trazando una perpendicular desde un vértice a la cara opuesta, sobre su ortocentro. Las tres alturas del tetraedro se cruzan en el centro del tetraedro.

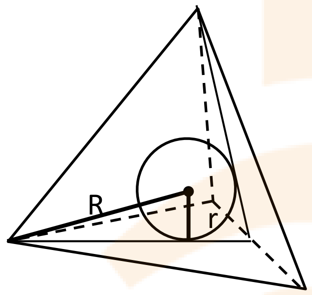
Para representarlo, basta con conocer la longitud de la arista, que posibilita dibujar la proyección de la cara en VM, en caso de que esté apoyado sobre uno de los planos de proyección, así como determinar su sección principal. Esta **sección principal** es un **triángulo isósceles** que se obtiene al seccionar el tetraedro por un plano que pasa por una arista y la altura del triángulo de la cara opuesta a ella. Este plano es perpendicular a la arista DC y pasa por el centro del tetraedro.



La **sección principal** puede construirse de forma independiente del poliedro, conocida su arista:

-Con la arista a como lado, construimos un triángulo equilátero abc y determinamos su altura h.

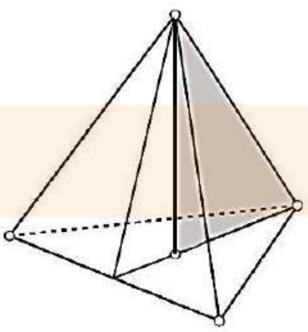
-Construimos un triángulo isósceles de base a y lados iguales a la altura h, que es la sección principal. Su altura d es , a su vez, la distancia entre aristas opuestas (MP).

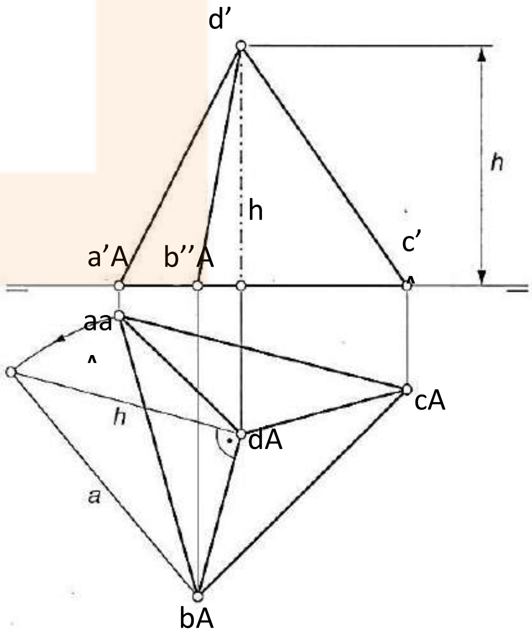


En la sección principal, además, aparecen contenidos los radios r y R de las esferas inscrita y circunscrita respectivamente en el poliedro. El radio R de la **esfera circunscrita** es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son el radio r de la esfera inscrita y el radio del polígono de la cara, que es 2/3 de la altura h de la cara, ya que ésta es un triángulo equilátero.

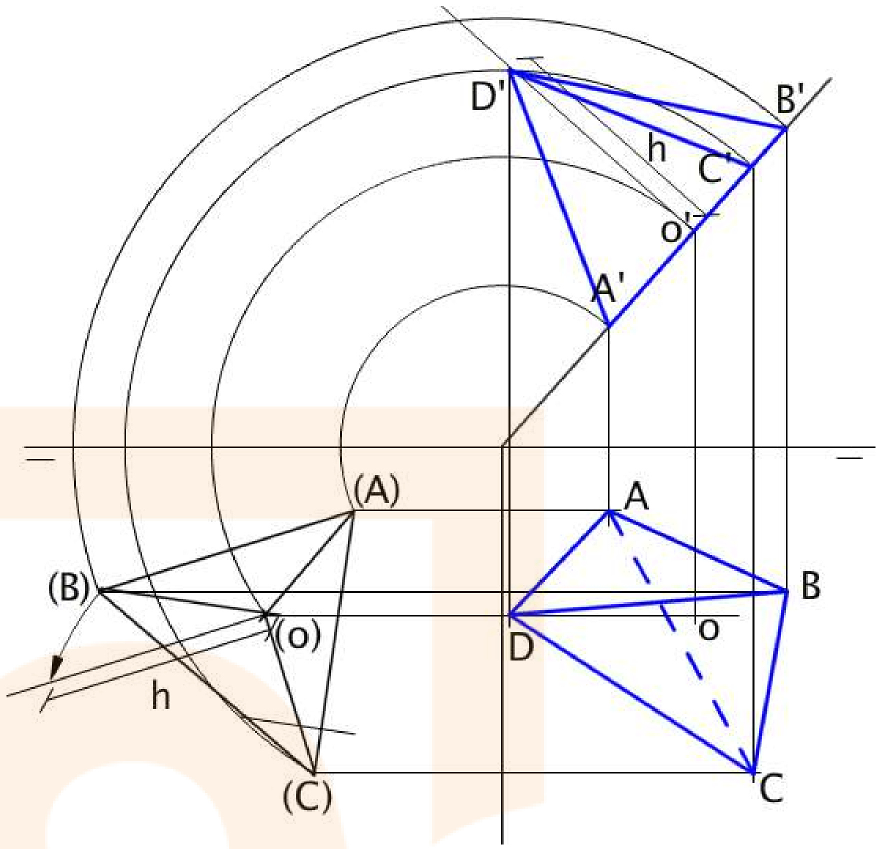
Distintas posiciones del tetraedro

1.-Tetraedro con una cara apoyada en el PH, dada la arista: tenemos abc, que es la cara situada en el PH. El vértice superior d, opuesto a la base, es el centro de un triángulo rectángulo. Mediante perpendiculares pasamos los cuatro vértices de la planta a la LT, con lo que hallamos a’, b’ y c’. Solo resta hallar la altura del vértice d. Para ello, y aplicando lo visto en el apartado anterior sobre la sección principal, construimos un triángulo rectángulo cuyo primer cateto es bd y la hipotenusa es el lado a: el otro cateto es la altura buscada.





<u>Tetraedro apoyado sobre un plano proyectante</u>: Para representar el tetraedro, o cualquier figura, apoyado en un plano proyectante, se abate el plano y se dibuja la cara en verdadera magnitud. Desabatiendo el triángulo obtenemos las proyecciones diédricas de la cara apoyada. La altura es una perpendicular la plano desde el centro del triángulo, que resulta una frontal si el plano es de canto. Como las proyecciones verticales de las rectas frontales están en verdadera magnitud, trasladamos la altura del tetraedro sobre ella para obtener el vértice V.



<u>Tetraedro apoyado sobre un plano oblicuo</u>: Dado el plano oblicuo Q, dibujaremos sobre él un tetraedro de arista definida y centro O de dicha cara en él contenida.

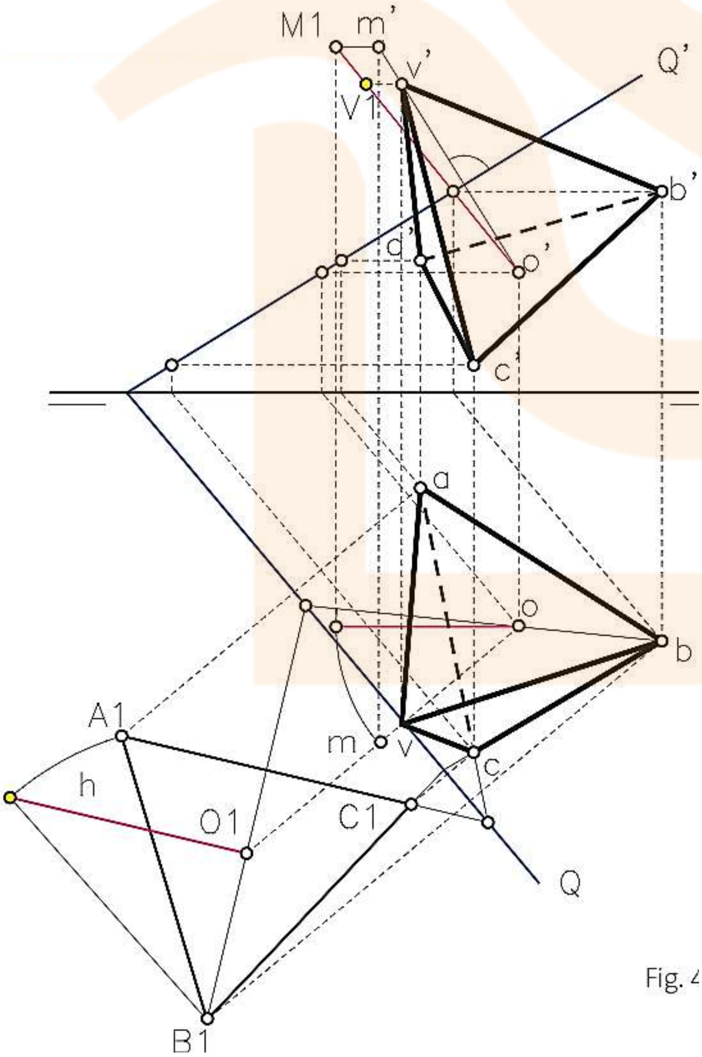


Fig. 4

Abatimos el centro O dado sobre uno de los planos de proyección, en el ejercicio de la figura 4 sobre el plano horizontal de proyección, y *dibujamos en verdadera magnitud, el triángulo equilátero de la cara del tetraedro correspondiente a este centro*.

Desabatimos el plano Q y con él la cara ABC dibujada obteniendo de este modo su proyección horizontal. *Calculamos la proyección vertical auxiliándonos de rectas del plano* (en el ejemplo, horizontales) que contengan a los puntos A. B y C.

El vértice superior V del tetraedro está sobre una recta perpendicular al plano Q que contiene a la base, trazada por el centro O.

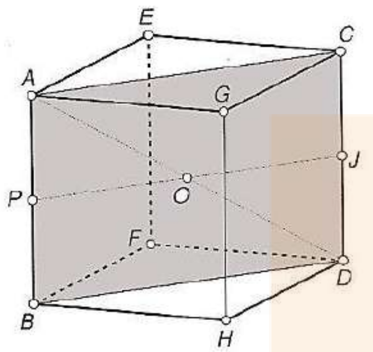
Su posición sobre esta perpendicular queda determinada por la altura del tetraedro que, como sabemos, está en función de la arista del cuerpo. *Determinamos la altura h sobre la cara abatida* como en el ejercicio de la figura 1.

Para situar sobre la recta perpendicular al plano Q, a partir del punto O, la magnitud de la altura, tomamos un punto arbitrario M de esta recta y calculamos la verdadera magnitud del segmento O-M **mediante giro**. Sobre el segmento o'-M_1 (en verdadera magnitud) y a partir de o', llevamos la altura h determinada y obtenemos el punto V_1. *Deshaciendo el giro queda determinada la proyección vertical v' buscada, del vértice superior.*

9.1.2. HEXAEDRO O CUBO

El cubo es un poliedro regular convexo formado por 6 caras cuadradas, 12 aristas y 8 vértices. Para representarlo hay que partir como mínimo de la medida de la arista.

Su **sección principal** está definida por dos aristas opuestas, ab y cd, por ejemplo, y las diagonales de dos caras también opuestas, ac y bd en este caso, dando como resultado un rectángulo acdb, en el que podemos observar las siguientes relaciones:



-La arista ab es el diámetro de la esfera inscrita

-El centro del cubo (o) es el punto medio de dos aristas opuestas (ab, bc…)

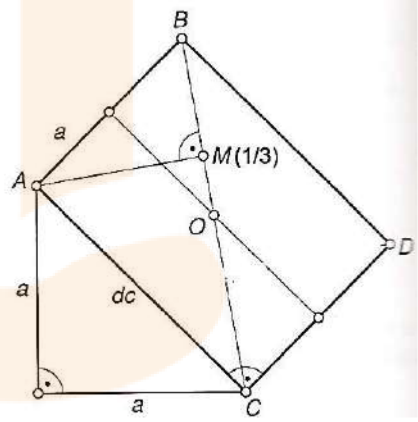
-La distancia entre vértices opuestos (ad, bc…) es igual a la diagonal del cubo y al diámetro de la esfera circunscrita.

-Un tercio de la diagonal del cubo (BC, por ejemplo) nos sitúa al vértice de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la arista del cubo (AB) y al radio r de la circunferencia circunscrita (que contiene tres vértices de aristas concurrentes, AM.

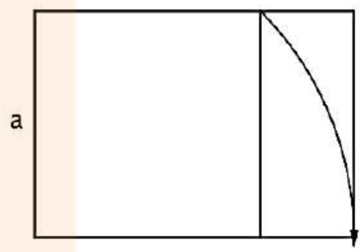
.

Hay dos formas de construir la sección principal:

1.-Dibujamos un triángulo rectángulo isósceles cuyos lados iguales van a ser la medida de la arista, dándonos la hipotenusa el lado mayor, a partir del cual podemos construir el rectángulo sección, pues el lado menor ya lo tenemos (la arista).

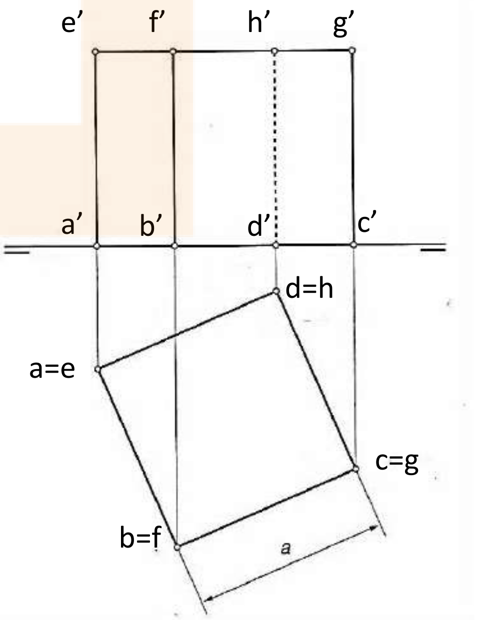


2.-Construyendo un rectángulo áureo, partiendo de un cuadrado hecho con la arista.



Distintas posiciones del cubo

1.-Cubo con una cara apoyada en el Plano Horizontal



-Partimos de la proyección horizontal del cubo, que es un cuadrado cuyo lado es la arista dada.

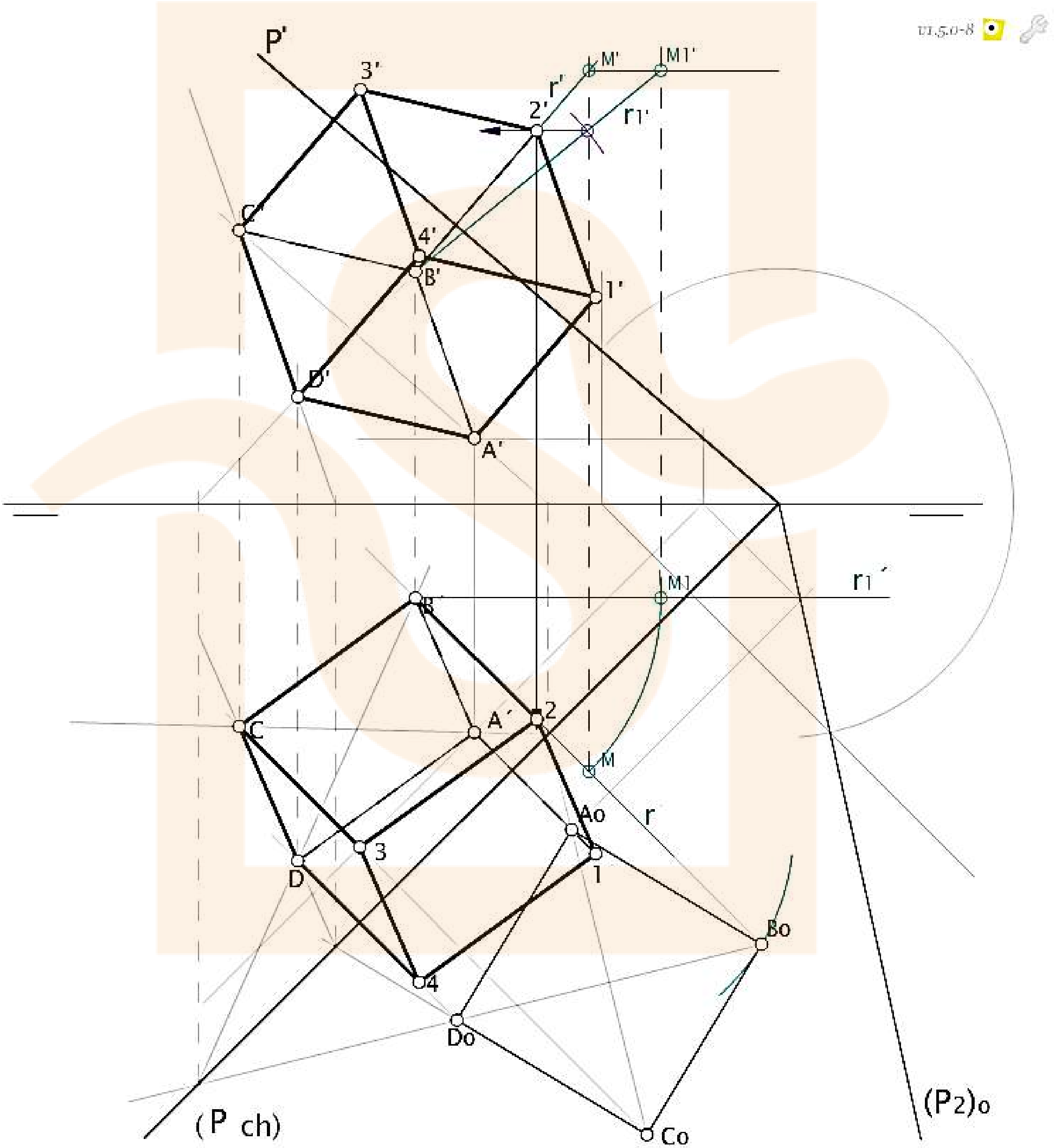
-La cara opuesta a la apoyada está situada sobre un plano horizontal cuya cota es igual a la medida de la arista dada.

Hexaedro apoyado en un plano oblicuo

Se da en abatimiento la cara de un hexaedro. Sabiendo que dicho hexaedro está apoyado en el plano P (P'P), hay que determinar su proyección horizontal y vertical.

Obtenemos las proyecciones de un punto (Ao, por ejemplo). Aplicando afinidad obtenemos las proyecciones del resto de puntos (B-C-D) y trazamos la base apoyada en el plano, tanto en P como en P'.

Para definir la longitud de las aristas perpendiculares a la base trazada hay que hacer un giro de la recta oblicua hasta quedar en posición frontal. Situada la longitud en verdadera magnitud se deshace el giro y la recta queda otra vez en posición oblicua. El resto de arista tiene idéntica dirección y longitud.



9.1.3. OCTAEDRO

El octaedro es un poliedro regular convexo, de 8 caras que son triángulos equiláteros, 12 aristas y 6 vértices. Su **sección principal** es un rombo cuyos lados son las alturas de las caras (triángulos equiláteros) del poliedro, su diagonal mayor es la diagonal del octaedro y su diagonal menor la arista. Podemos observar, además, las siguientes relaciones métricas:

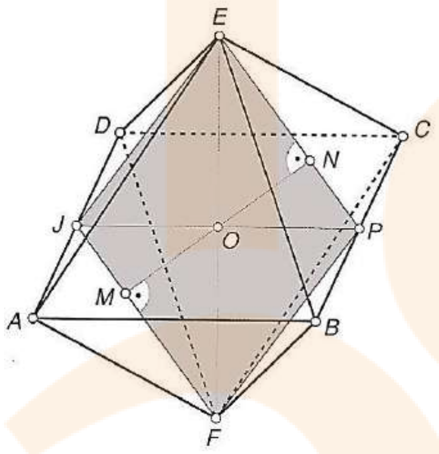
-La arista tiene la misma medida que la distancia entre aristas opuestas.

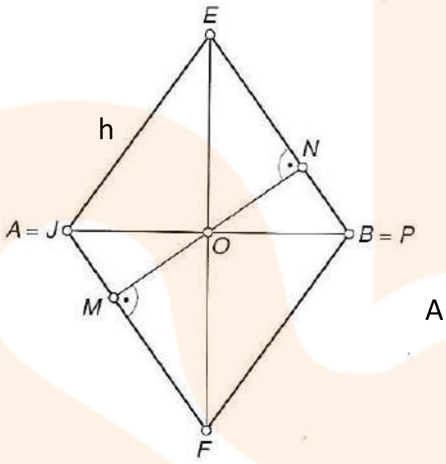
-El centro del octaedro está en el centro del rombo, en el cruce de las dos diagonales.

-La distancia entre caras opuestas se corresponde con el segmento MN (perpendicular a dos lados opuestos del rombo, pasando por el centro)..

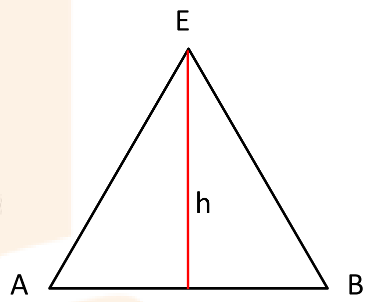
-El radio de la esfera inscrita es OM

-El radio de la esfera circunscrita es OE.





Sección principal



Cara del octaedro

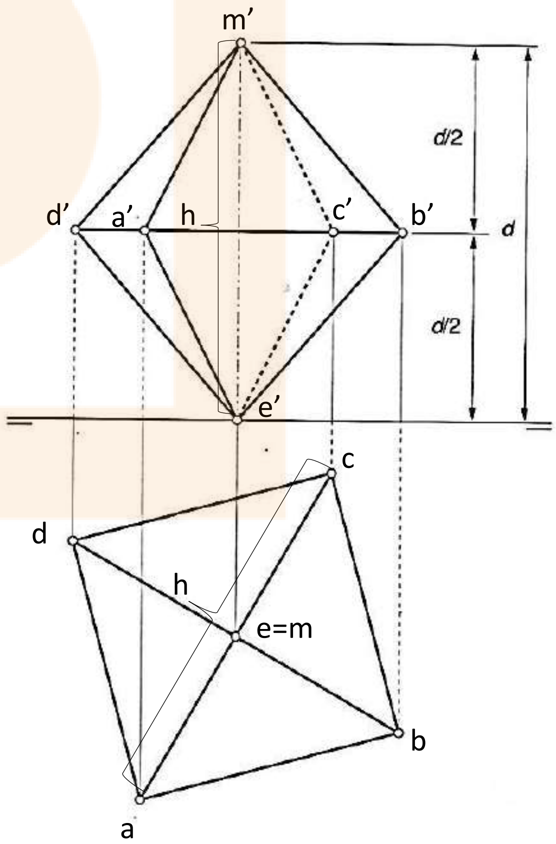
Distintas posiciones del octaedro

1.-Octaedro apoyado por un vértice sobre el PH

-Al ser una diagonal del octaedro perpendicular al PH, su proyección horizontal es un cuadrado abcd, cuyas diagonales, al cortarse en un punto M, determinan las cuatro caras de la parte superior del poliedro. Las otras cuatro caras son tapadas por éstas.

-Las proyecciones verticales se obtienen trazando perpendiculares a la LT desde los vértices a, b, c, d, e.

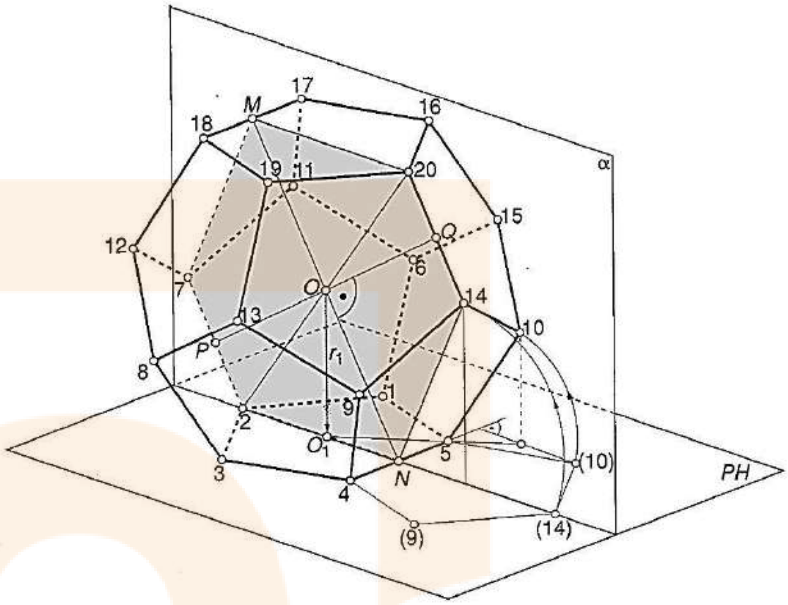
-El vértice m estará a una altura igual a la diagonal del cuadrado, ac o bd, desde LT. Las demás proyecciones verticales, se sitúan a la mitad de esa altura.



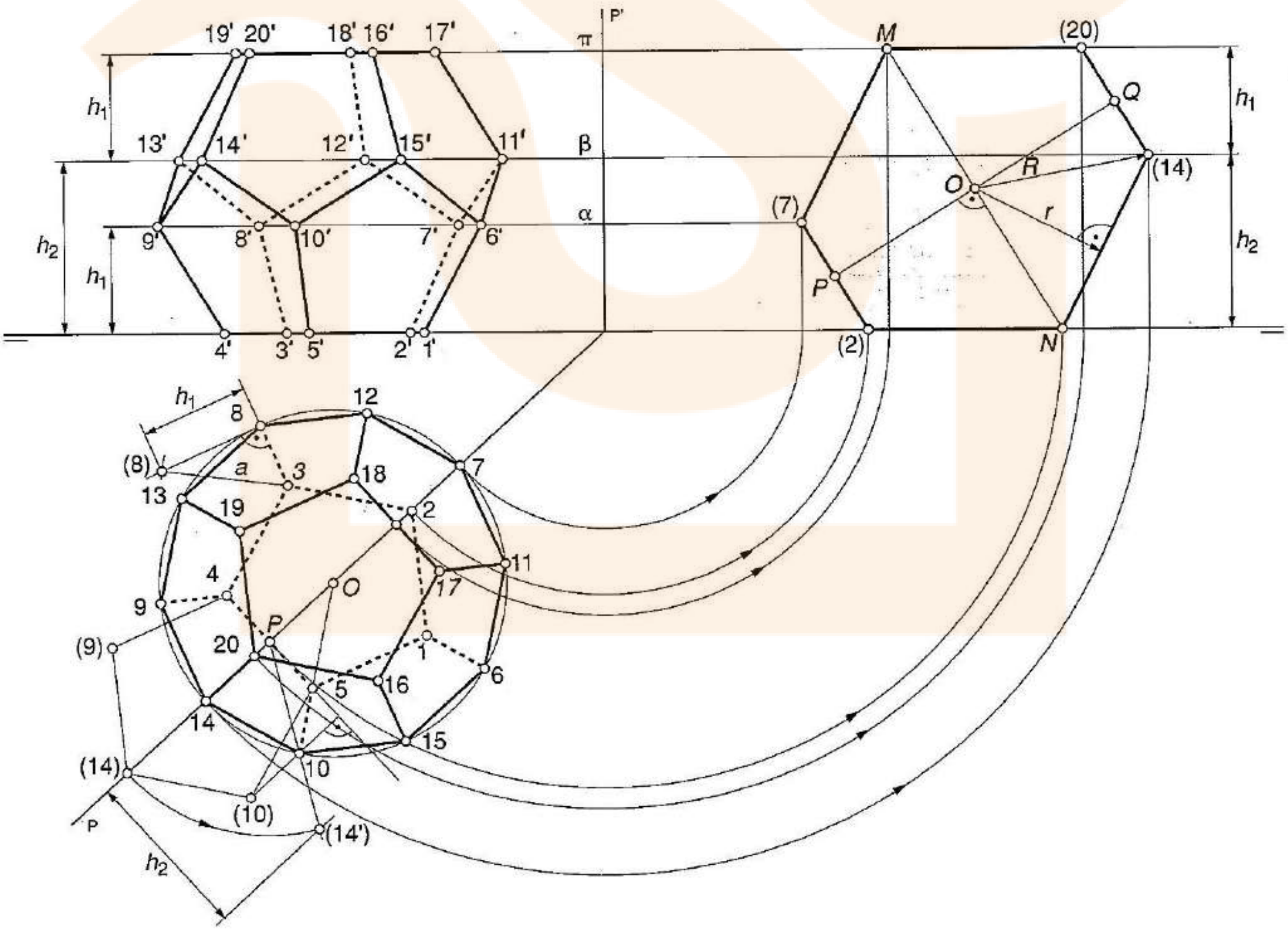
9.1.4. DODECAEDRO

El dodecaedro es un poliedro regular convexo de 12 caras que son pentágonos regulares, 30 aristas y 20 vértices. En el dodecaedro, cada vértice tiene otro diametralmente opuesto. Por tanto, por cada arista pasa un plano que contiene a otra diametralmente opuesta, y cada cara tendrá también otra opuesta, paralela a ella, y girada un ángulo de 180º.

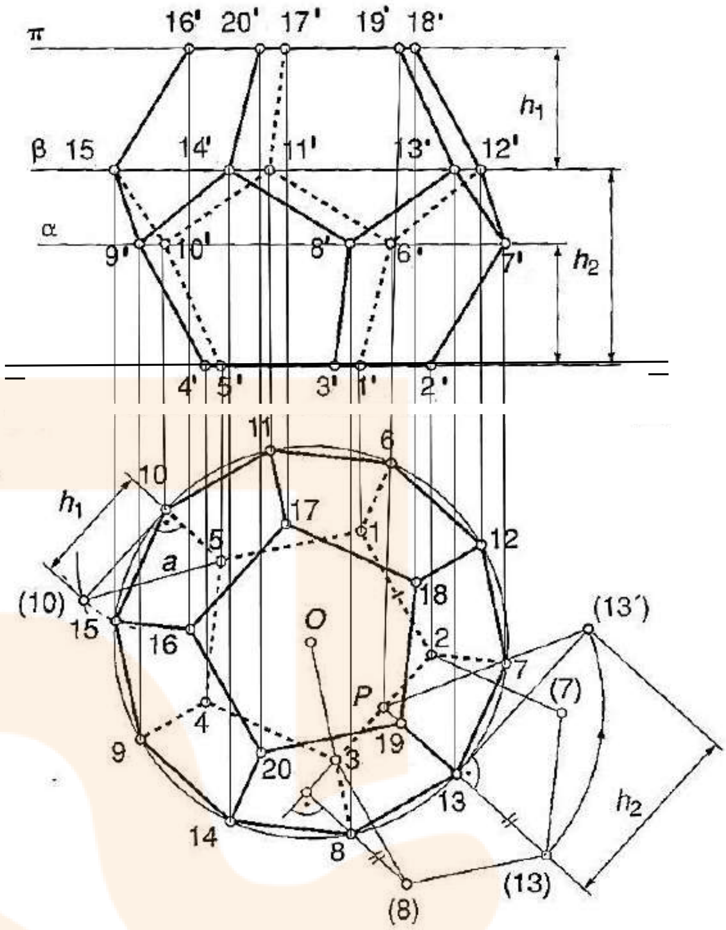
Sección principal del dodecaedro: se secciona el dodecaedro por un plano que pase por dos aristas opuestas. El resultado es un hexágono irregular con dos de sus lados opuestos iguales a las aristas, y los otros cuatro a la distancia de un vértice al lado opuesto de una de las caras.



Nota: *Dada la cantidad de puntos en éste y otros ejercicios que le siguen, sustituiremos en algunos casos los números por letras.*



<u>Dodecaedro apoyado por una cara sobre el PH</u>[1]



-Partimos de que el pentágono 1,2,3,4,5 está contenido en el PH. Abatimos la cara 2,3,8,13,7, cuya arista 2,3 es común. La proyección horizontal del vértice 8 se sitúa sobre la perpendicular trazada por su abatimiento (8) a la prolongación de la arista 2,3 (dado que, si quisiéramos colocar la cara abatida en su posición original, el punto (8) realizaría un giro en el espacio con la arista 2,3 de charnela) en su corte con la prolongación del radio O3.

-Trazamos la circunferencia de centro O y radio O8. Dibujamos sobre ésta los vértices 7,6,10 y 9, sobre los radios O2, O1, O5, O4. Los restantes se hallan uniendo O con las mitades de cada uno de los lados del pentágono. Estas rectas nos darán también los puntos del pentágono superior, girado 180º respecto al inferior (trazando una circunferencia desde O con radio en uno de los vértices de primer pentágono).

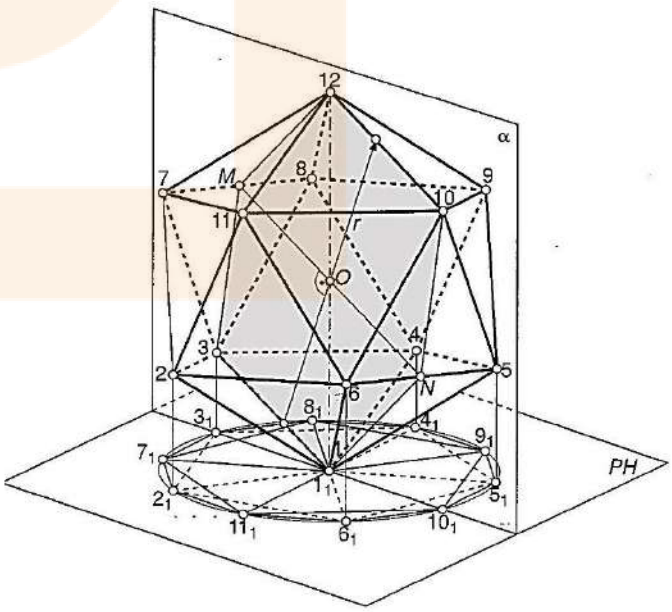
-Para hallar la proyección vertical, basta determinar las alturas de los planos horizontales α=h1 y β=h2, que pasan por los tres grupos de vértices que tiene el poliedro:

*La altura h1, que corresponde a los vértices que están unidos con los del pentágono de la base (6’, 7’, 8’, 9’ y 10’), se determina abatiendo una arista, por medio del triángulo rectángulo 5,10 (10): Sobre el segmento 5,10 se traza un ángulo recto. La hipotenusa 5(10) es el valor de la arista del poliedro. El otro cateto obtenido es el valor de la altura h1.

*La altura h2, donde se sitúan los vértices unidos a los del pentágono superior, se determina en el pentpor medio del triángulo rectángulo P13(13’): desde el segmento P(13) trazamos un ángulo recto, formándose un triángulo cuyos catetos son, uno P13, y otro el valor de la altura buscada, h2. La hipotenusa, con la cual hallamos este cateto, es el valor de la altura del pentágono.

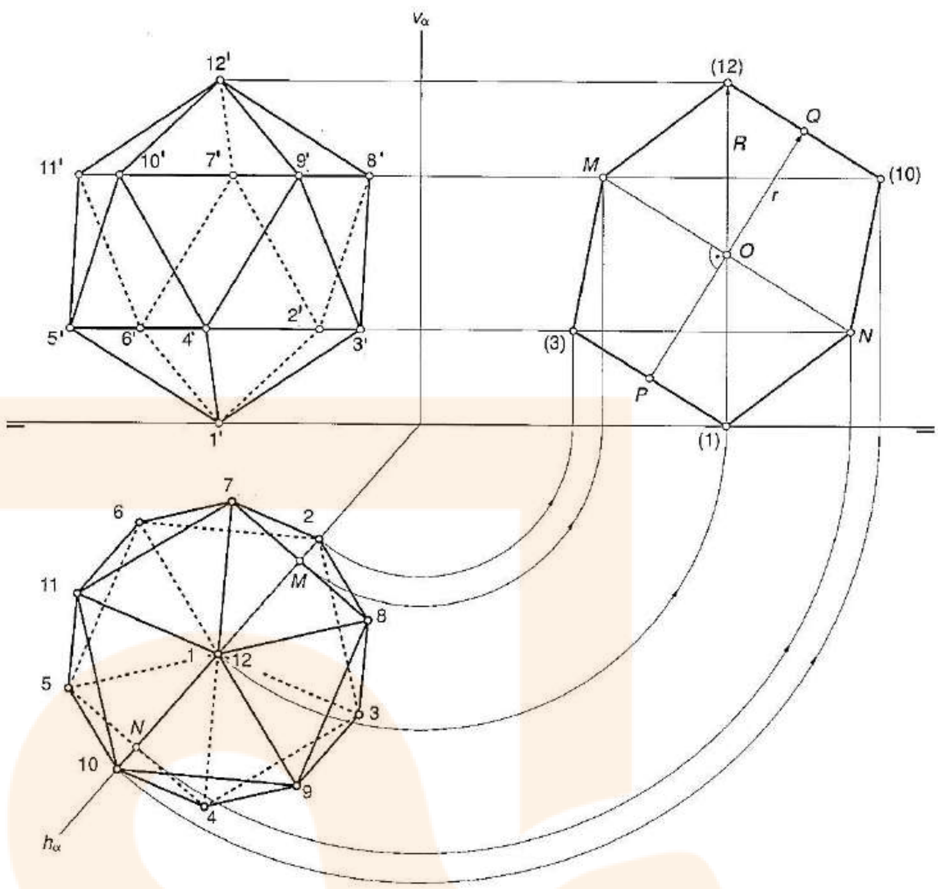
-Sobre esa altura h2 están situados los vértices 11’, 12, 13, 14’y 15’. Por último, la altura de los vértices del pentágono superior, 16’, 17’, 18’, 19’, 20’ es h1+h2.

9.1.5. ICOSAEDRO



Poliedro regular convexo de 20 caras que son triángulos equiláteros, 30 aristas y 12 vértices. Igual que en el dodecaedro, por cada uno de sus vértices existe otro diametralmente opuesto, cada arista tiene otra opuesta, y cada cara tiene también otra opuesta, paralela a ella y girada 180º.

Sección principal: seccionamos el icosaedro por un plano que pase por dos aristas opuestas. La sección es un hexágono con dos lados opuestos iguales al valor de la arista dada (1,3 y 10,12) y los otros cuatro iguales a la distancia de un vértice del triángulo a una de las caras.



Icosaedro apoyado por un vértice sobre el PH

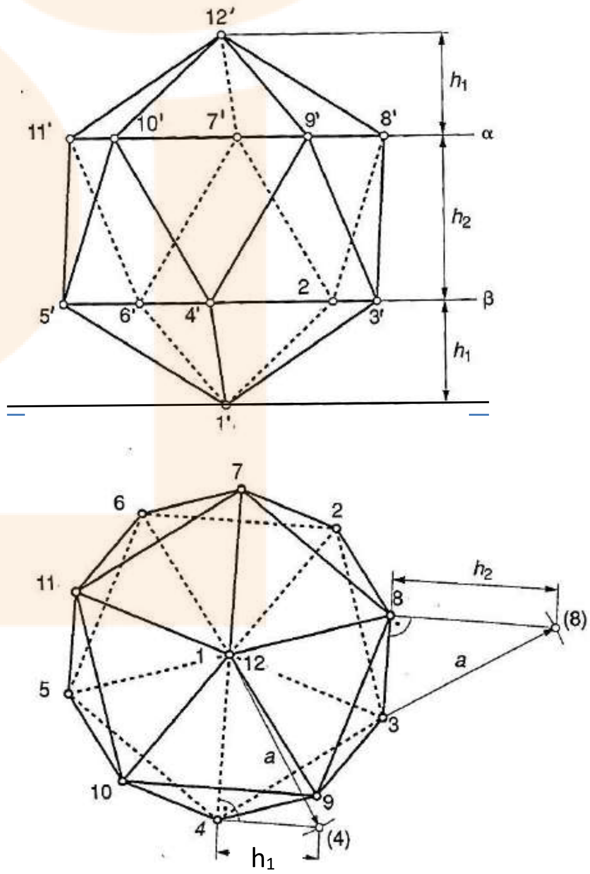
-El icosaedro se caracteriza porque de cada vértice salen 5 aristas con la misma inclinación respecto a la diagonal que contiene a dicho vértice. Al estar esta diagonal en posición vertical, las 5 aristas que parten del vértice 1 se proyectan según radios de una misma circunferencia cuyos extremos (2,3,4,5,6) son los vértices de un pentágono regular, de lado igual a la arista del poliedro.

-Por tanto, la proyección horizontal está formada por dos pentágonos regulares, el citado y el formado por los vértices 7,8,9,10,11,12, girados 180º uno respecto al otro, y un decágono que corresponde a su contorno aparente. Uniendo los vértices delos pentágonos de forma que se consigan triángulos, unos vistos y otros ocultos, se obtienen todas las aristas.

-Para determinar la proyección vertical, y una vez trazadas perpendiculares a LT desde todos los vértices, hay que hallar las alturas de forma similar a lo hecho en el dodecaedro, por medio de triángulos rectángulos abatidos, es decir, hallando la diferencia de cotas de los extremos de una arista, conocida su proyección horizontal y su VM. Así:

-Para hallar h1 se traza un triángulo equilátero a partir de 14, donde la hipotenusa es la medida de la arista y el segundo cateto es la medida buscada.

-Para hallar h2, el primer cateto es 3,8, la hipotenusa igualmente la arista, y la medida h2 buscada el segundo cateto, 8(8).

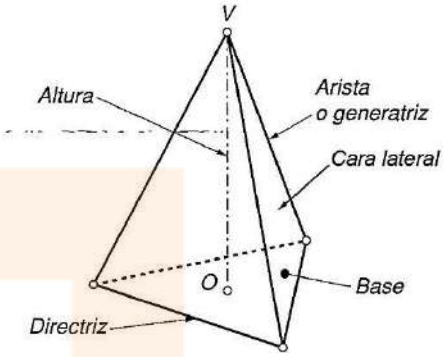


9.2. SUPERFICIES RADIADAS Y ESFERA

9.2.1 PIRÁMIDE

Superficie radiada generada por una recta que se mantiene fija en un punto fijo V, vértice del poliedro, y que se traslada apoyando unos de sus extremos sobre los múltiples puntos que forman la directriz.

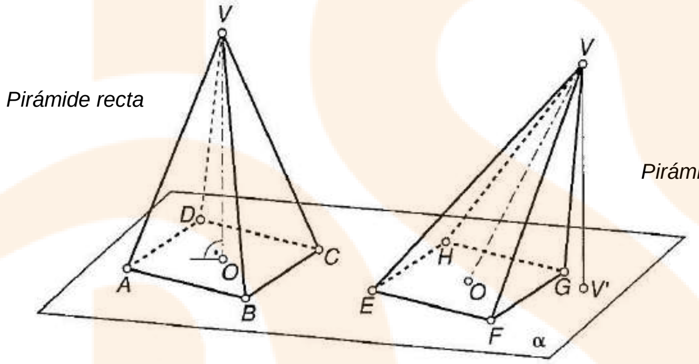
-La **base** está determinada por el polígono que constituye la **directriz**. Los triángulos que forman las **caras** de la pirámide se denominan **caras laterales**. **Aristas laterales** son los segmentos que unen el vértice V con los vértices de la base. La distancia entre el vértice superior y el plano que contiene a la base es la **altura.**



Tipos de pirámide

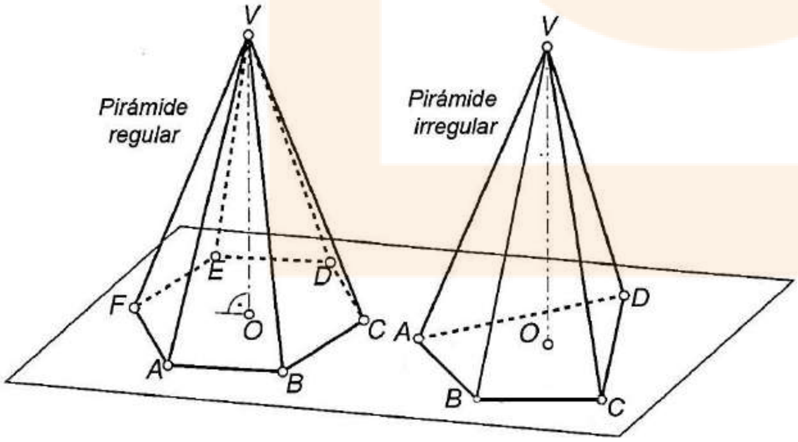
-Pirámide recta es aquella en la que la altura es perpendicular a la base

-Pirámide oblicua es aquella en la que la altura es oblicua a la base

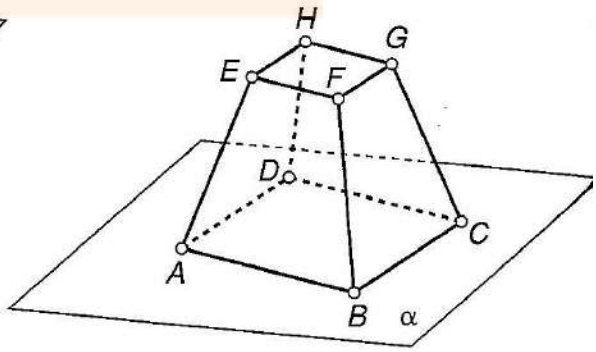


-**Pirámide regular**: pirámide recta con el polígono de su base regular.

-**Pirámide irregular:** Si el polígono de la base es irregular.

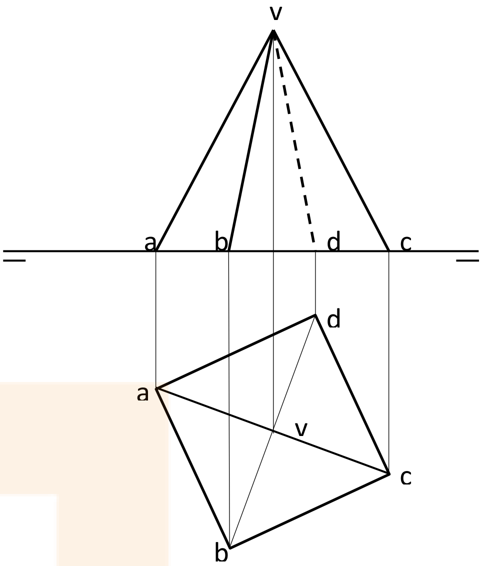


-**Tronco de pirámide:** es aquel que se obtiene al seccionar una pirámide por un plano, paralelo o no a la base, y que no corte a ésta.



Distintas posiciones de la pirámide

1.-Pirámide regular de base cuadrada apoyada en el PH, dadas la arista de la base y la altura

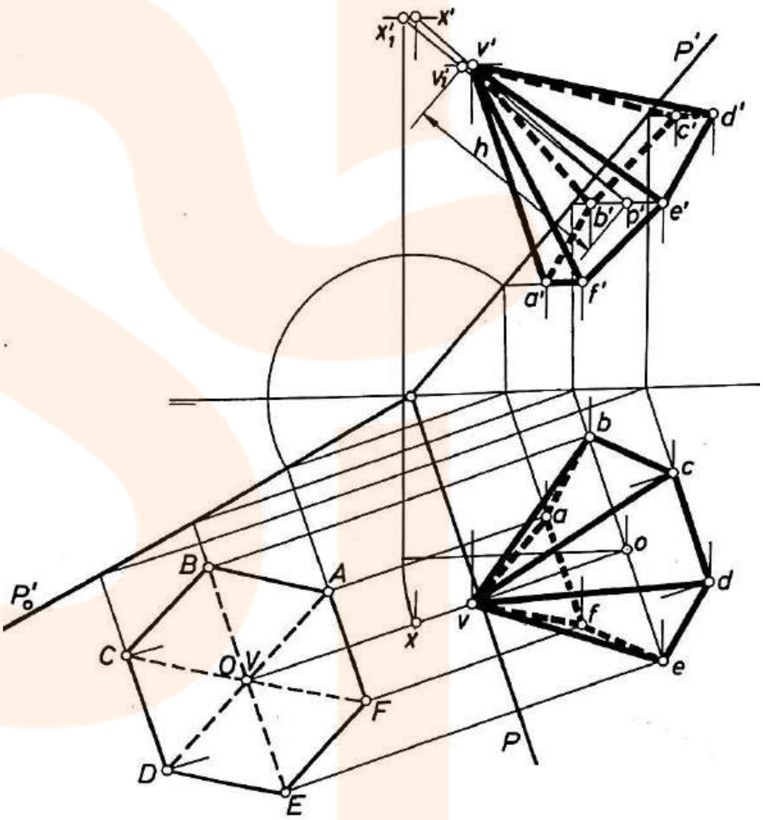


-Para hallar la proyección horizontal, construimos un cuadrado abcd con el lado en VM. Sus diagonales se cortan en el punto v, proyección horizontal del vértice superior v’.

-Para hallar la proyección vertical, referimos los cuatro vértices del cuadrado sobre LT, y situamos el punto v’ a la altura dada.

De la misma forma se procede en esta posición cuando la base es otro tipo de polígono.

2.-Pirámide recta apoyada sobre un plano oblicuo



Abatimos el plano P, utilizando como charnela la traza horizontal P. Representamos abatido el polígono de la base, un hexágono regular. Lo desabatimos sobre el plano PP’, obteniendo las proyecciones de la base en el PH (a, b, c, d, e, f) y en el PV (a’, b’, c’, d’, e’, f’), así como su centro oo’. Por esos puntos oo’ trazamos perpendiculares a las trazas del plano, para determinar sobre ellas la altura.

Para hallar ésta, dibujamos un punto arbitrario xx’ sobre las perpendiculares trazadas. Giramos el segmento ox, o’x’ hasta situarlo frontalmente en o’x$_1$. Sobre ese segmento llevamos la altura, que está en VM. Deshacemos a continuación el giro mediante una paralela a LT por v’$_1$, extremo de h, la cual nos determina el vértice v’, que referimos al PH en v. Solo resta trazar las aristas desde los vértices a los puntos que forman la base.

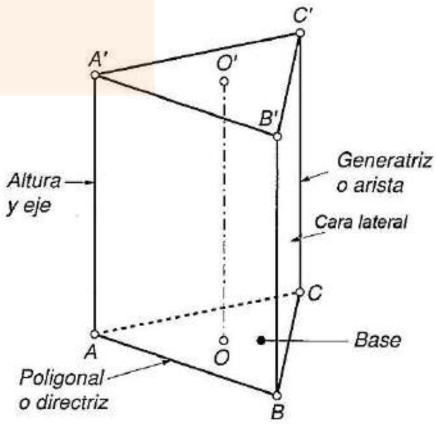
9.2.2. PRISMA

El prisma es una superficie radiada cuya generatriz es una recta que se traslada paralelamente a sí misma apoyándose en los puntos que forman dos directrices poligonales iguales contenidas en planos paralelos. En un prisma tenemos, por tanto:

-Dos bases poligonales iguales y paralelas

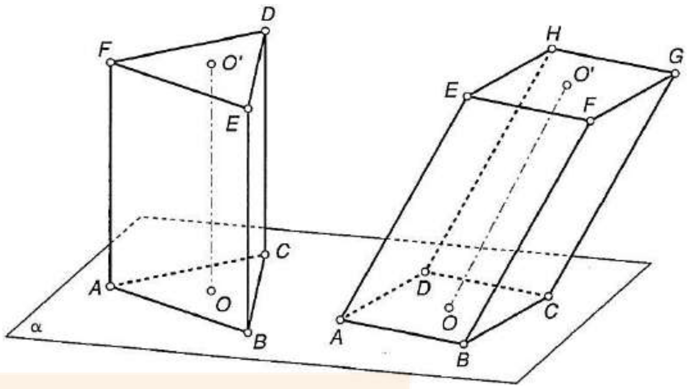
-Un mínimo de tres caras laterales con forma de paralelogramo.

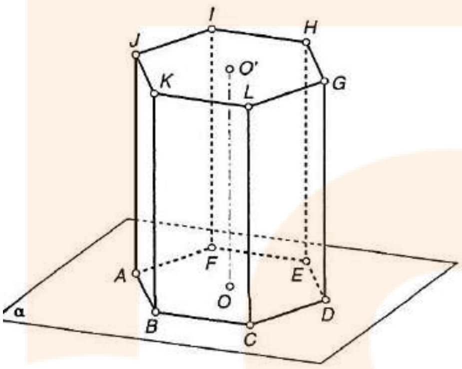
-La **altura** del prisma es la distancia entre los dos planos paralelos que contienen las bases



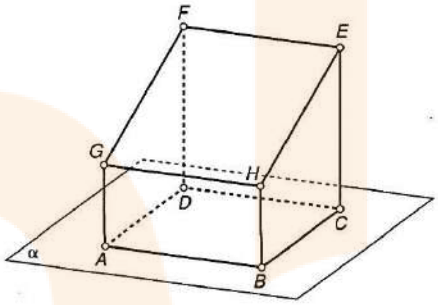
Clasificación

- **Prisma recto:** cuando sus aristas son perpendiculares a la base
- **Prisma oblicuo:** cuando sus aristas no son perpendiculares a la base
- **Prisma regular:** cuando es recto y además el polígono de la base es regular
- **Prisma irregular:** cuando es recto y además el polígono de la base es irregular
- **Tronco de prisma:** cuando un prisma es seccionado por un plano no paralelo a las bases, sin cortar a ninguna de ellas





Prisma regular

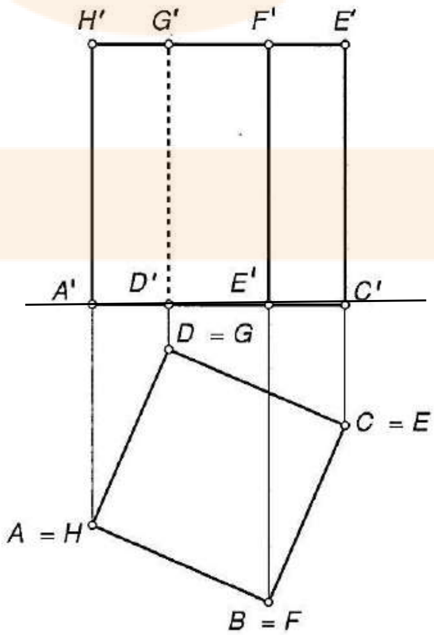


Tronco de prisma

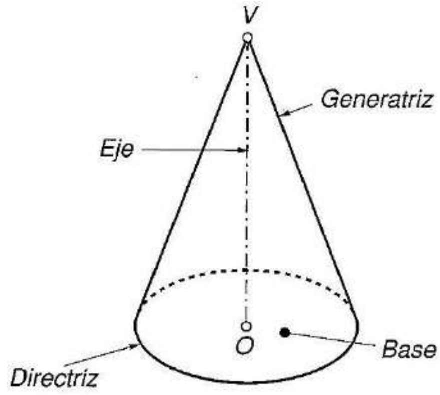
Prisma recto apoyado por su base sobre el PH

-Se sitúa primero la base sobre el PH, estando las dos bases confundidas. El cuadrado está en VM.

-Las proyecciones verticales de las bases se sitúan sobre dos horizontales, la superior a la altura dada. Las aristas se proyectan sobre el PV en VM, por ser paralelas a este plano.



9.2.3. EL CONO



Superficie radiada cuya generatriz es una recta que se traslada apoyando uno de sus puntos sobre los puntos que forma la directriz, que es una curva plana, mientras que otro de sus puntos se mantiene inmóvil en el punto v, vértice del cono. La perpendicular trazada desde el vértice v al plano que contiene la base es la altura, h.

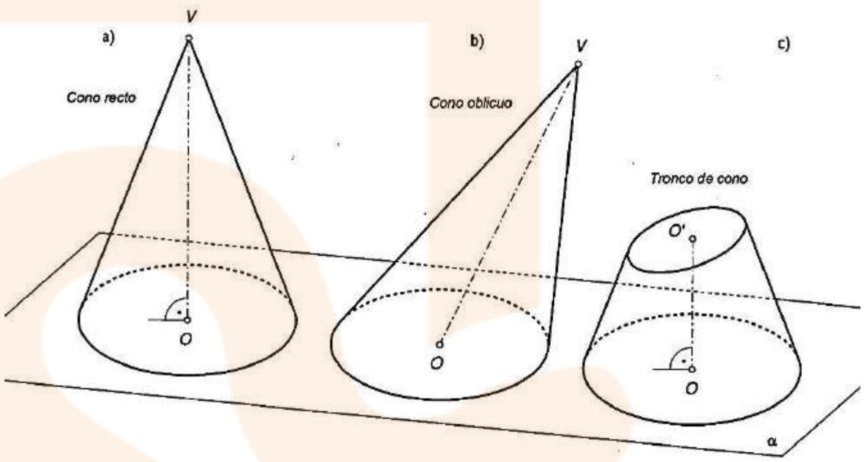
Si las directrices son circunferencias, se denominan **de revolución.**

Clasificación

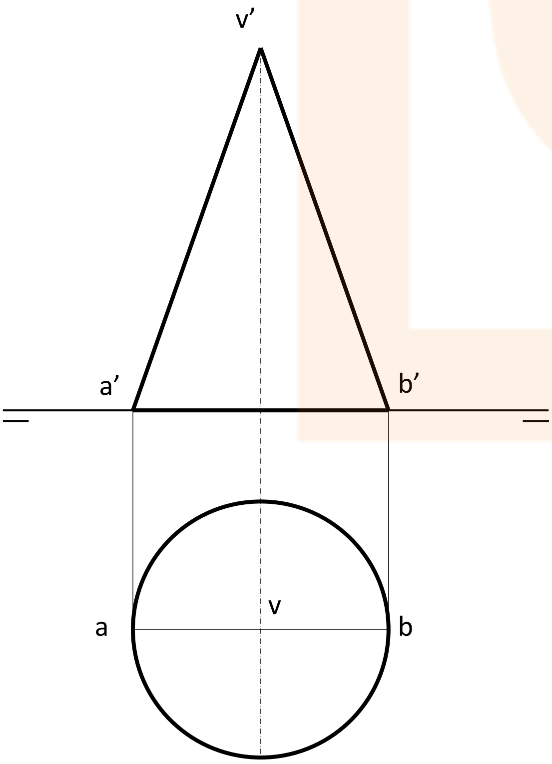
-Cono recto: cuando la recta que une el vértice y el centro de la base es perpendicular a ésta.

-Cono oblicuo: cuando la recta que une el vértice con el centro de la base es oblicua.

-Tronco de cono: se obtiene al seccionar un cono por un plano paralelo o inclinado a la base, sin pasar por el vértice ni cortar a la base.



Distintas posiciones del cono



1.-Cono recto apoyado por su base sobre el PH

-La base es una circunferencia de la que se referencian a LT los extremos del diámetro a y b. Se levanta una perpendicular desde el centro de la circunferencia de la base en planta, y se mide la altura para situar el vértice. Solo resta unir el vértice con a' y b'.

2.-Cono con la base en un plano oblicuo cualquiera

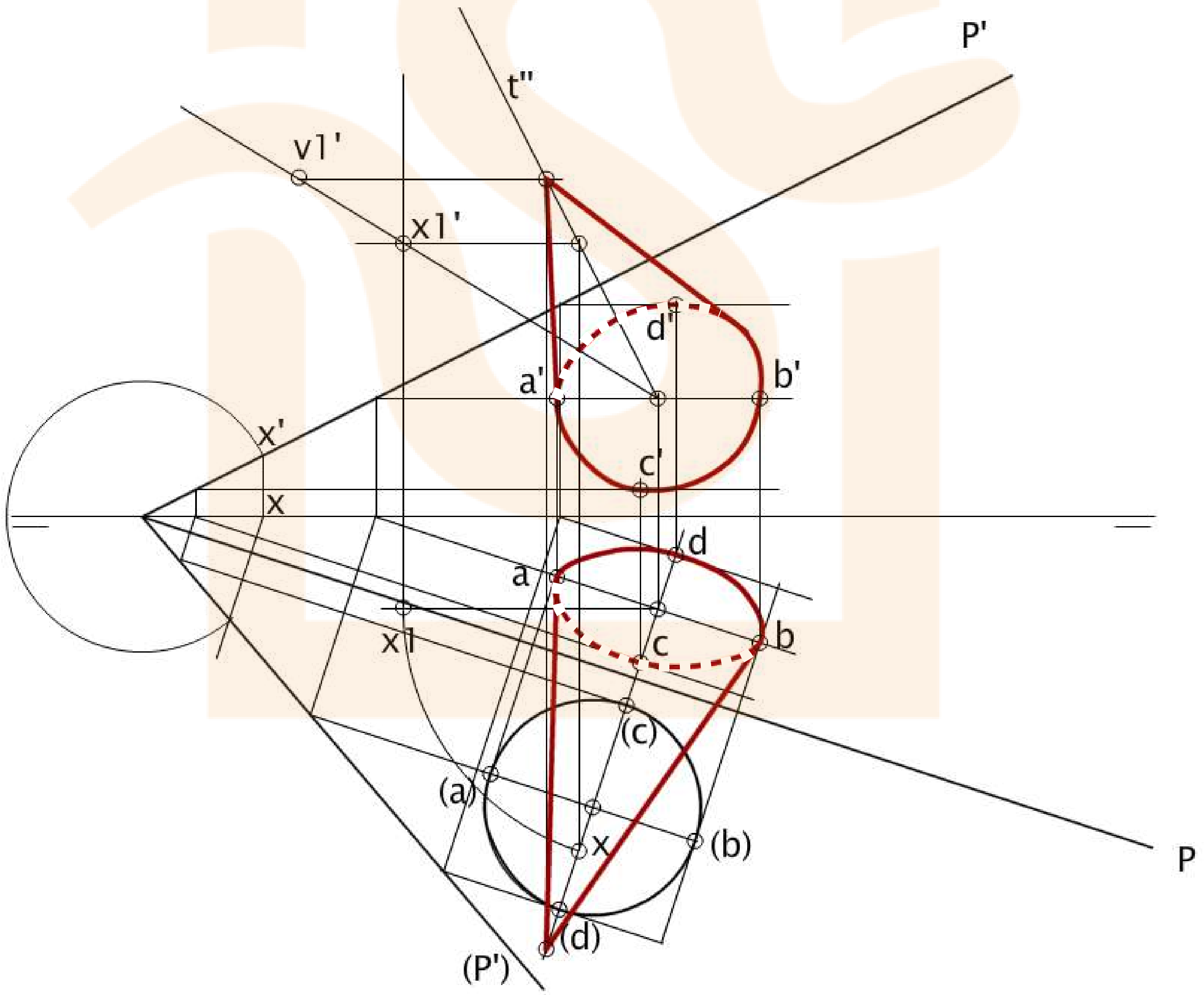
-Nos dan las trazas del plano, el radio de la base y la altura del cono. Abatimos el plano P, para poder representar la VM de la base, en la que trazamos los diámetros perpendiculares (a) (b) (c) y (d). Los desabatimos, utilizando horizontales auxiliares del plano desde cada uno de los puntos (en este caso necesitamos tres, una para (d), otra para (a), (o) y (b) y otra para (c).

-Una vez hallada la proyección horizontal referenciamos al plano vertical los puntos abcd que forman la base (que forman una elipse, en este caso), y desabatimos mediante arcos (a) (b) (c) y (d) sobre el PV.

-Podemos, para ser más precisos, dividir la circunferencia en x partes (8 por ejemplo) y realizar las operaciones indicadas para cada una de esas divisiones. Y es que, en realidad, **los procedimientos utilizados para el cono son similares a los empleados en la pirámide**.

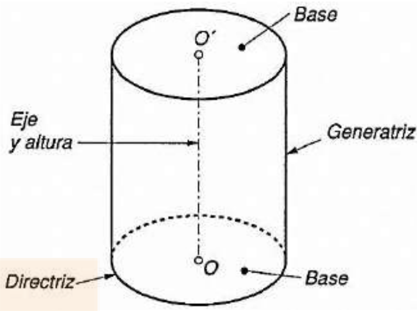
-Por los centros de las elipses, o y o', trazamos sendas perpendiculares a las trazas respectivas del plano, t y t'. Sobre estas rectas t y t' hay que medir la altura del cono para fijar el vértice. Hay que girarlo previamente a una posición favorable para medir sobre una de sus proyecciones la VM de la altura.

-Para ello, basta solamente determinar la altura h en proyecciones, para lo cual tomamos un punto arbitrario xx' sobre la perpendicular trazada desde oo'. El segmento obtenido ox-o'x' se gira hasta situarlo frontalmente en o'x'$_1$, que está en VM, y donde medimos la altura h, deshaciendo seguidamente el giro mediante una paralela a LT trazada por v'$_1$, extremo de h, que nos determina ya el vértice v' de la pirámide, que se refiere a v. Solo resta trazar las generatrices de su contorno aparente por v y v', tangentes a las elipses de las bases.



9.2.4. CILINDRO

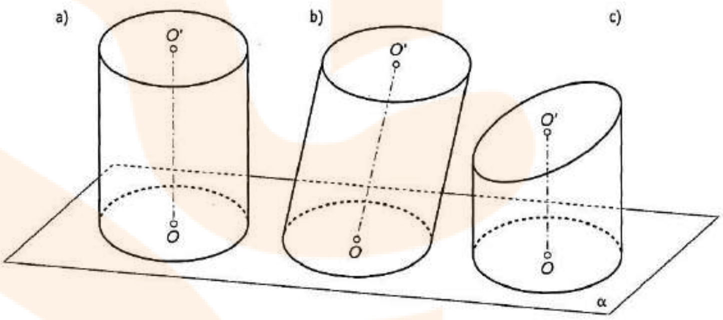
-Superficie radiada generada por una recta generatriz que se traslada de forma paralela a sí misma, apoyando uno de sus extremos sobre los múltiples puntos de una curva plana llamada directriz. Esta superficie está situada entre dos planos paralelos entre sí, que contienen las bases de dichos cilindros, y cuya altura es la distancia entre estos planos. Por tanto, un cilindro queda definido por su **base** y su **altura.** La recta que une los centros de las bases es el **eje** del cilindro. Teniendo en cuenta que el cilindro puede considerarse como un cono cuyo vértice es un punto impropio, coincide en muchos aspectos con él. Además, los procedimientos utilizados para su representación, y en particular para resolver secciones planas, son los mismos que para la pirámide y el prisma, basta considerarlos como prismas o pirámides con un número infinito de aristas.



Clasificación

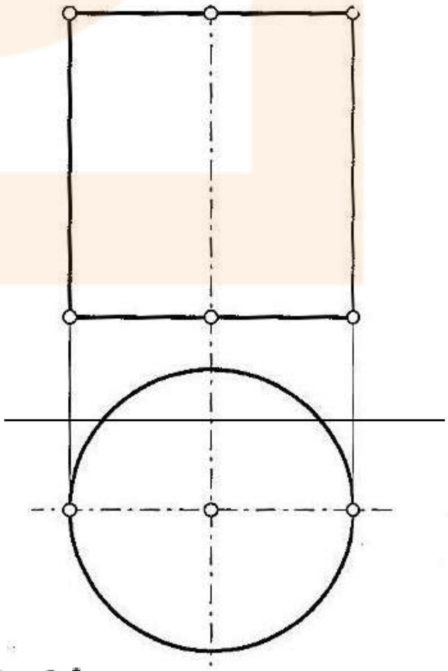
Si las directrices son circunferencias, se denominan **de revolución.**

- **Cilindro recto:** cuando sus aristas y el eje son perpendiculares a la base
- **Cilindro oblicuo:** cuando sus aristas y el eje son oblicuos a la base
- **Tronco de cilindro:** cilindro seccionado por un plano no paralelo a las bases y que no las corta. Las secciones obtenidas son elipses.



Cilindro recto apoyado por su base sobre el PH

-Las generatrices son perpendiculares y tangentes exteriores a las bases. La planta aparece en forma de circunferencia en VM. Su proyección vertical es un rectángulo de base igual al diámetro y su altura es igual a la del sólido.

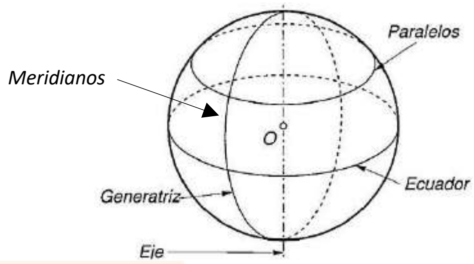


9.2.5. LA ESFERA

Superficie curva de revolución que se genera por el movimiento de una semicircunferencia que hace de generatriz, girando alrededor de uno de sus diámetros, que representa el eje de giro.

Sus principales propiedades son:

- Todos los puntos de su superficie equidistan del centro
- Cualquiera de sus secciones planas constituyen un círculo
- Cualquier plano que pase por su centro forma dos partes iguales o hemisferios



Se denominan **meridianos** las circunferencias máximas que se obtienen como sección por medio de planos secantes que pasan por el eje vertical de la esfera. Los **paralelos** son las circunferencias menores que se obtienen al seccionar la esfera por planos que no pasan por el centro y que sean perpendiculares a su eje. Si ese plano secante pasa por el centro, obtenemos el **ecuador.**

Proyecciones de la esfera

La proyección de la esfera sobre cualquiera de los planos de proyección presenta siempre el mismo contorno: una circunferencia del mismo radio que la esfera. No se distinguen líneas ocultas de líneas vistas, por lo que su única línea de representación es la circunferencia del contorno aparente. Por tanto, se proyecta en VM sobre los tres planos.

Representación de la esfera.

Representado su centro O por sus proyecciones diédricas las proyecciones de ésta están definidas por dos circunferencias máximas de radios iguales al radio de la superficie: en proyección horizontal se aprecia el **ecuador** (circunferencia horizontal que pasa por el centro O) y en proyección vertical un **meridiano** frontal.

En la figura 1 se aprecia la proyección horizontal de un punto C perteneciente al ecuador y la proyección vertical de un punto D perteneciente al meridiano frontal.

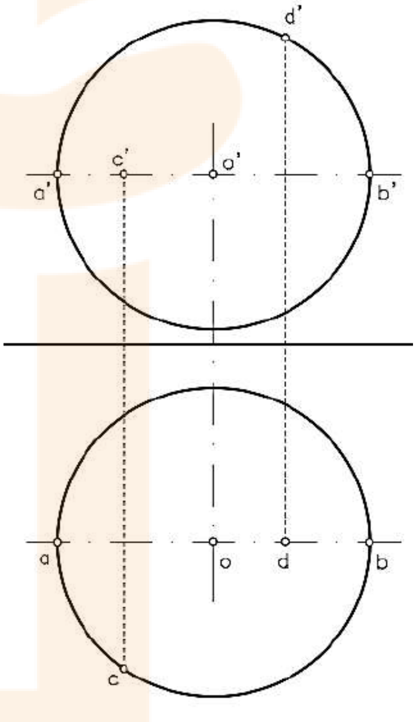


Fig. 1

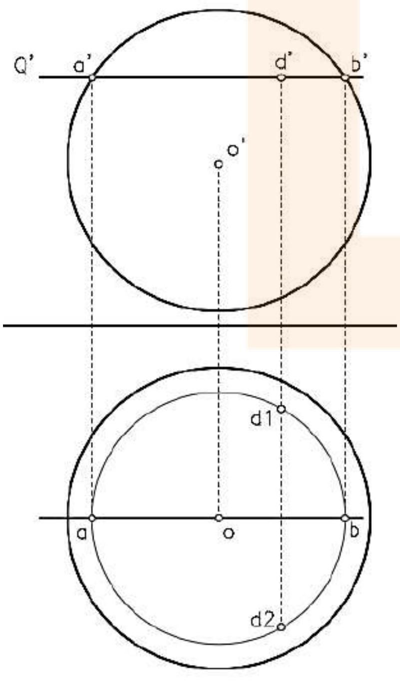


Fig. 2

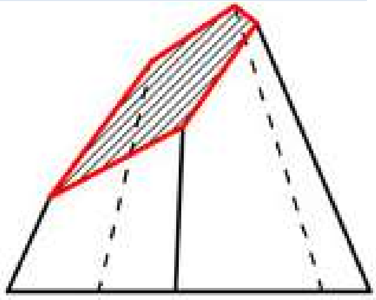
Determinación de puntos en la esfera.

Para determinar la proyección horizontal de un punto D dado por su proyección vertical trazaremos por él un plano auxiliar horizontal Q, éste generará una sección circular en la esfera de diámetro AB y centro O. La proyección horizontal de D estará sobre la circunferencia sección mencionada en d1 o d2.

Si se tratase de localizar la proyección vertical de un punto de la esfera dado por su proyección horizontal nos auxiliaríamos de un plano frontal. (Figura 2).

9.3. SECCIONES PLANAS

Cuando nos piden dibujar una **sección** normalmente nos dan un cuerpo de caras planas (poliedros: pirámide, cubo, prisma…) o de revolución (cono, cilindro, esfera) y nos dan también un plano por el que tenemos que cortar ese cuerpo. La sección plana sería el polígono formado por las intersecciones de ese plano con las caras del cuerpo. Los vértices de ese polígono son los puntos de intersección de las aristas del poliedro con el plano que lo corta.

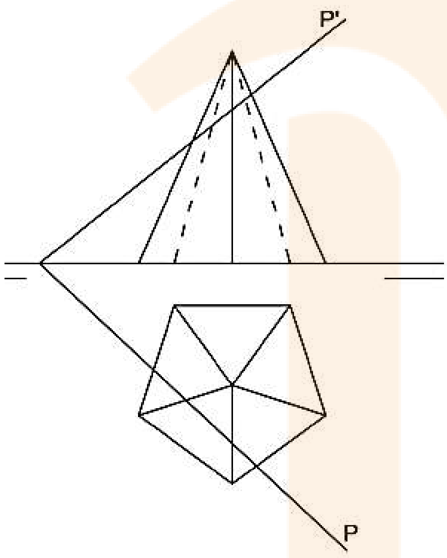


El objetivo es que dibujes el corte que realizaría el plano en ese poliedro. Dicho de otra manera, se trata de que encuentres los puntos que tienen en común el plano y el cuerpo. Esto lo podemos conectar directamente con temas de los que ya hemos hablado como **intersecciones de planos** o **de rectas con planos**, en los que igualmente se trataba de encontrar los puntos que eran comunes a ambos elementos. Así que utilizaremos razonamientos similares.

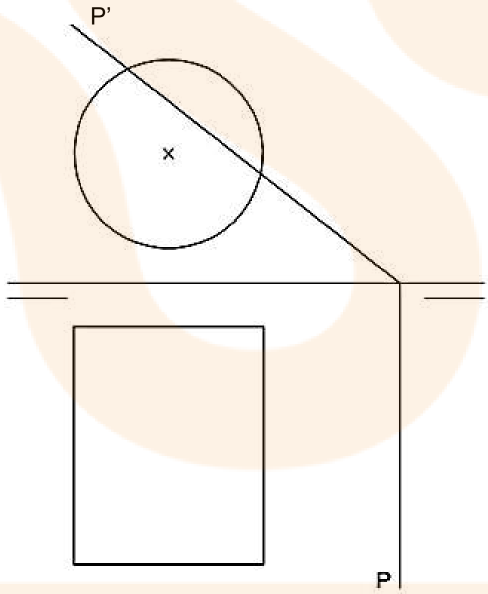
El plano sección normalmente suele ser **proyectante** u **oblicuo**, aunque puede haber otros casos que también veremos (plano de perfil, horizontal…):

- Si el **plano es proyectante**, trazamos **directamente** el polígono sección en la intersección de la traza proyectante del plano con las aristas del cuerpo (si el plano fuera horizontal o frontal tendríamos, además, la proyección no proyectante de la sección en VM).

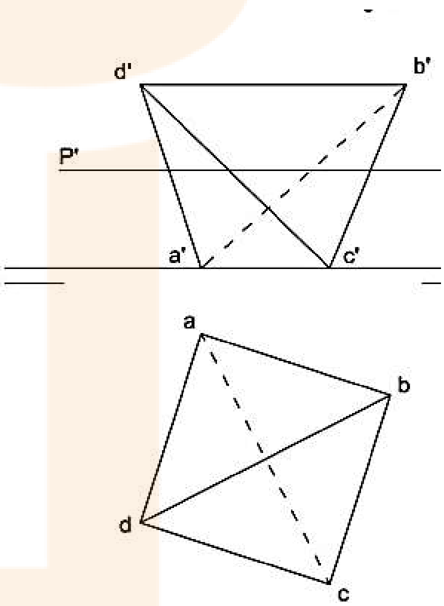
- Si el **plano es oblicuo**, efectuaremos un **cambio de plano** para conseguir la posición de plano proyectante de forma más fácil y rápida, ó directamente **por intersecciones** y homología.



Sección de pirámide por plano oblicuo



Sección de cilindro por plano proyectante vertical



Sección de tetraedro por plano horizontal

Una vez que encuentras las dos proyecciones de la sección es muy probable que te pidan que encuentres su verdadera magnitud. Puesto que se trata de una sección plana (realizada por un plano) podrás encontrar la verdadera magnitud por **abatimiento de ese plano**

9.3.2. SECCIONES DE POLIEDROS

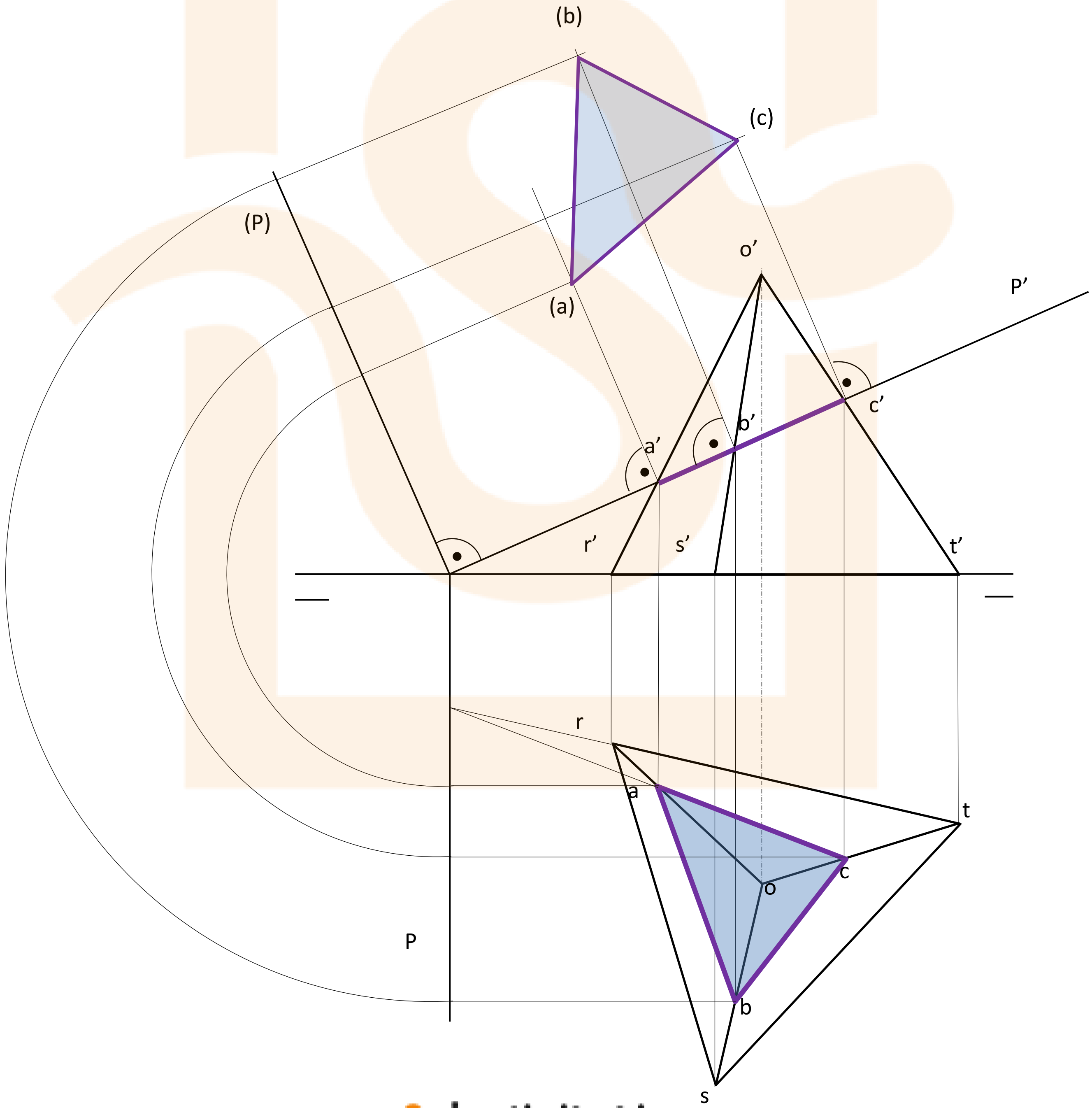
En primer lugar estudiaremos los poliedros (cuerpos con caras planas) y luego pasaremos a los cuerpos de revolución.

Sección plana del tetraedro por un plano proyectante vertical.

-La traza vertical del plano corta a la proyección vertical del tetraedro en a', b' y c'. Se refieren estos puntos a la planta. Sobre las aristas homólogas, uniendo los puntos, obtenemos la sección en planta abc. Su verdadera magnitud se determina mediante abatimiento del plano, tomando como charnela la traza P'.

-Hay que decir que el polígono de la base y el de la sección son homólogos, por lo que, si tenemos uno de los vértices de la sección podemos averiguar los otros por homología (esto se suele aplicar en el caso de que una de las aristas sea perpendicular a LT).:

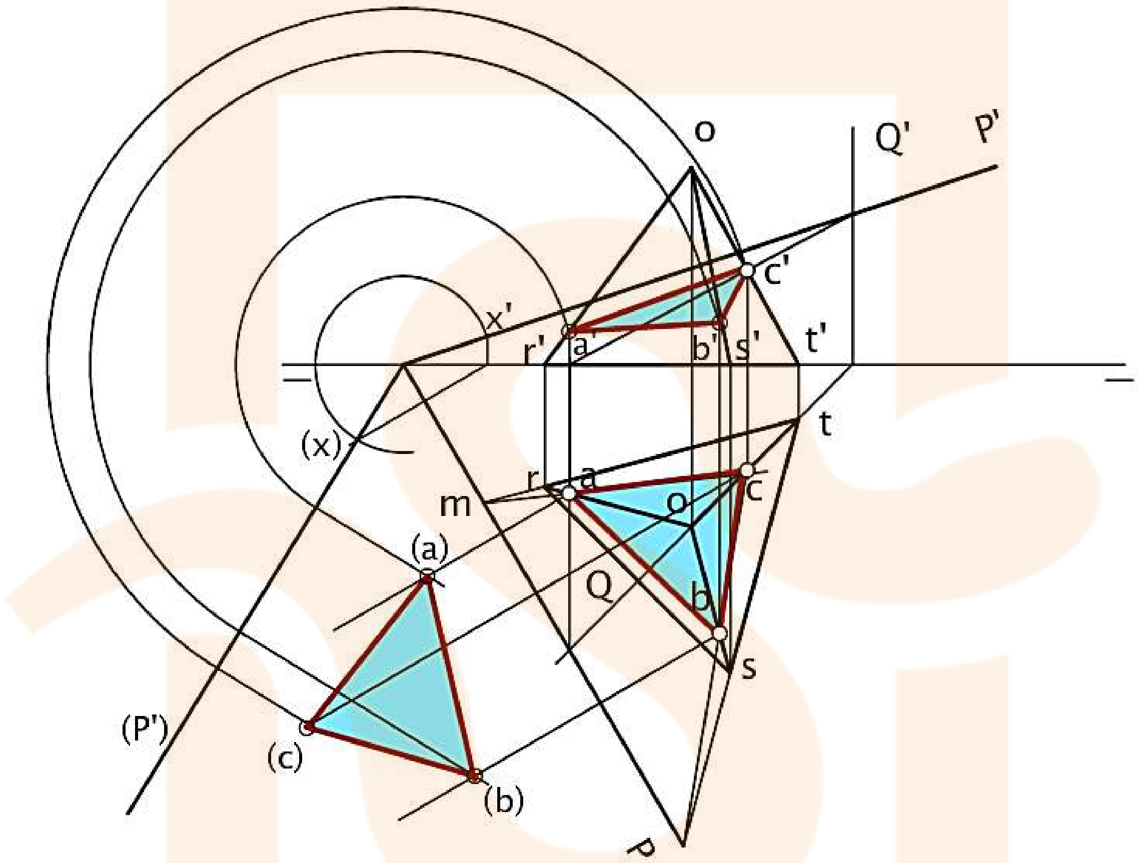
.-Los vértices de la base del poliedro y los de la sección se encuentran sobre rectas homólogas. Por eso, si obtenemos, por ejemplo, la proyección a de la sección, el vértice c se encontrará sobre la arista ot, en el punto donde es cortada por una recta que pase por a y por el punto m, prolongación de rt (lado de la base homólogo al de la sección) sobre P. Por este método, puede obtenerse también el punto b.



Sección plana del tetraedro por un plano oblicuo (mediante intersecciones): Como la sección no es más que la intersección entre una recta (una de las aristas) y un plano (el plano P), para obtener el vértice c'c nos hemos servido de un plano proyectante Q'Q que contenga a la arista ot, obteniéndose así la intersección de la arista ot-o't con el plano oblicuo PP'. Los demás vértices pueden obtenerse de forma similar, o por medio de una homología:

-Prolongamos tr hasta cortar a P, con lo que hallamos m. Unimos m con c, y el corte con la arista or nos da a. El punto b se halla de forma similar, prolongando también ts hasta P para obtener n, y uniendo n con c. El corte con *os* nos da b.

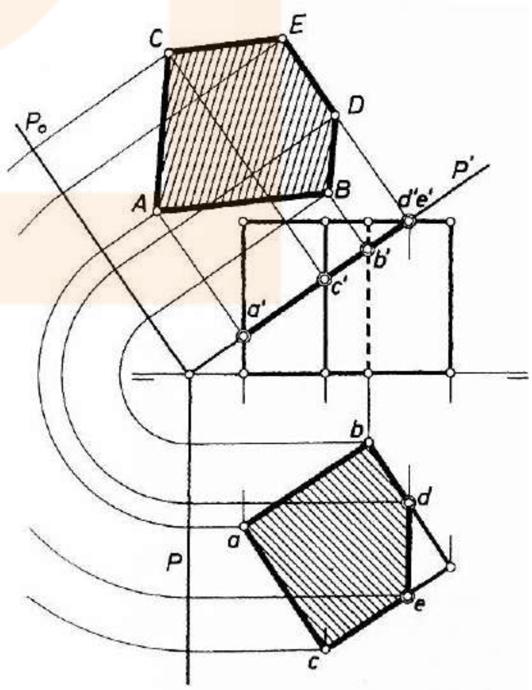
-Pasamos los puntos obtenidos abc a las aristas verticales, con lo que obtenemos la proyección vertical de la sección plana del tetraedro. Abatimos el plano P, para hallar la sección en verdadera magnitud.



Sección plana de un hexaedro

Sección producida por un plano proyectante

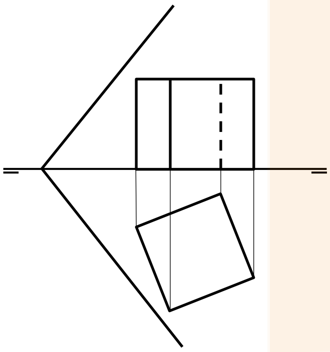
-Se determina directamente por los puntos donde la traza oblicua P' del plano corta a las aristas del poliedro. Mediante abatimiento hemos obtenido también la sección en VM.

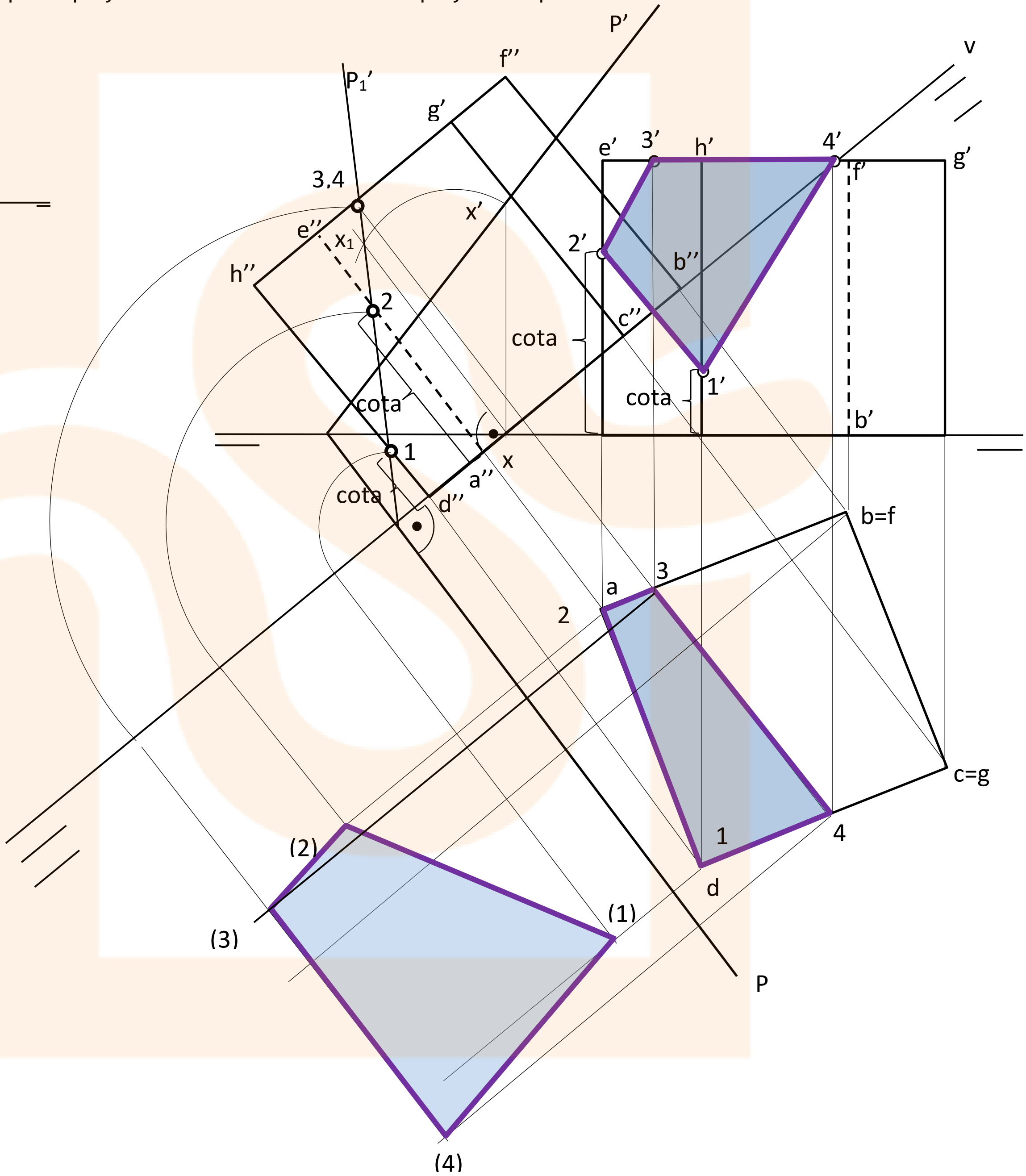


<u>Sección plana en el hexaedro por un plano oblicuo (mediante cambio de plano):</u> Aunque se podría realizar determinando la intersección de cada una de las aristas con el plano, lo más fácil (y esto es aplicable a todas las secciones planas) es colocar el plano en posición de plano proyectante mediante un cambio de plano vertical. De esta forma, la sección que produce el plano se verá como una recta, siendo así su determinación inmediata, como vimos en el ejercicio anterior.

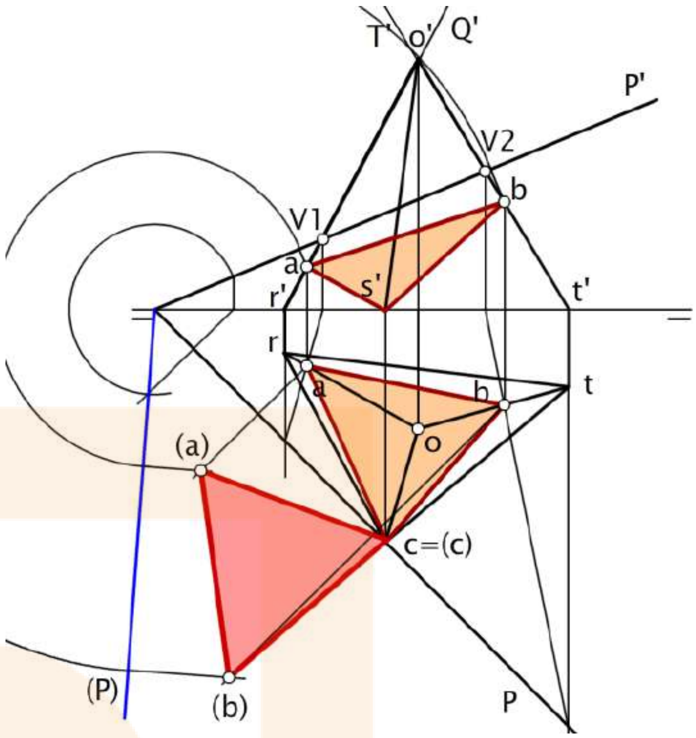
-Representamos una nueva LT perpendicular a la traza horizontal del plano P, de forma que ese plano P pasará a ser proyectante vertical (de canto). Trazamos la nueva traza vertical del plano P_1’ por medio de un punto x común a ambas LT y una perpendicular a la nueva LT desde la proyección horizontal de ese punto. Trazamos sobre este plano las proyecciones verticales del cubo. Los puntos en que P_1’ intersecciona con las aristas de la nueva proyección vertical son los vértices del polígono sección que, mediante perpendiculares a las respectivas LT pasamos a las dos proyecciones iniciales del cubo. Para pasar 1’ y 2’ sobre el plano vertical utilizamos las cotas de los puntos homónimos cambiados de plano, 1 y 2.

-Abatiendo el plano proyectante sobre uno de los de proyección podemos determinar la VM de la sección buscada.





Sección de una pirámide por un plano oblicuo

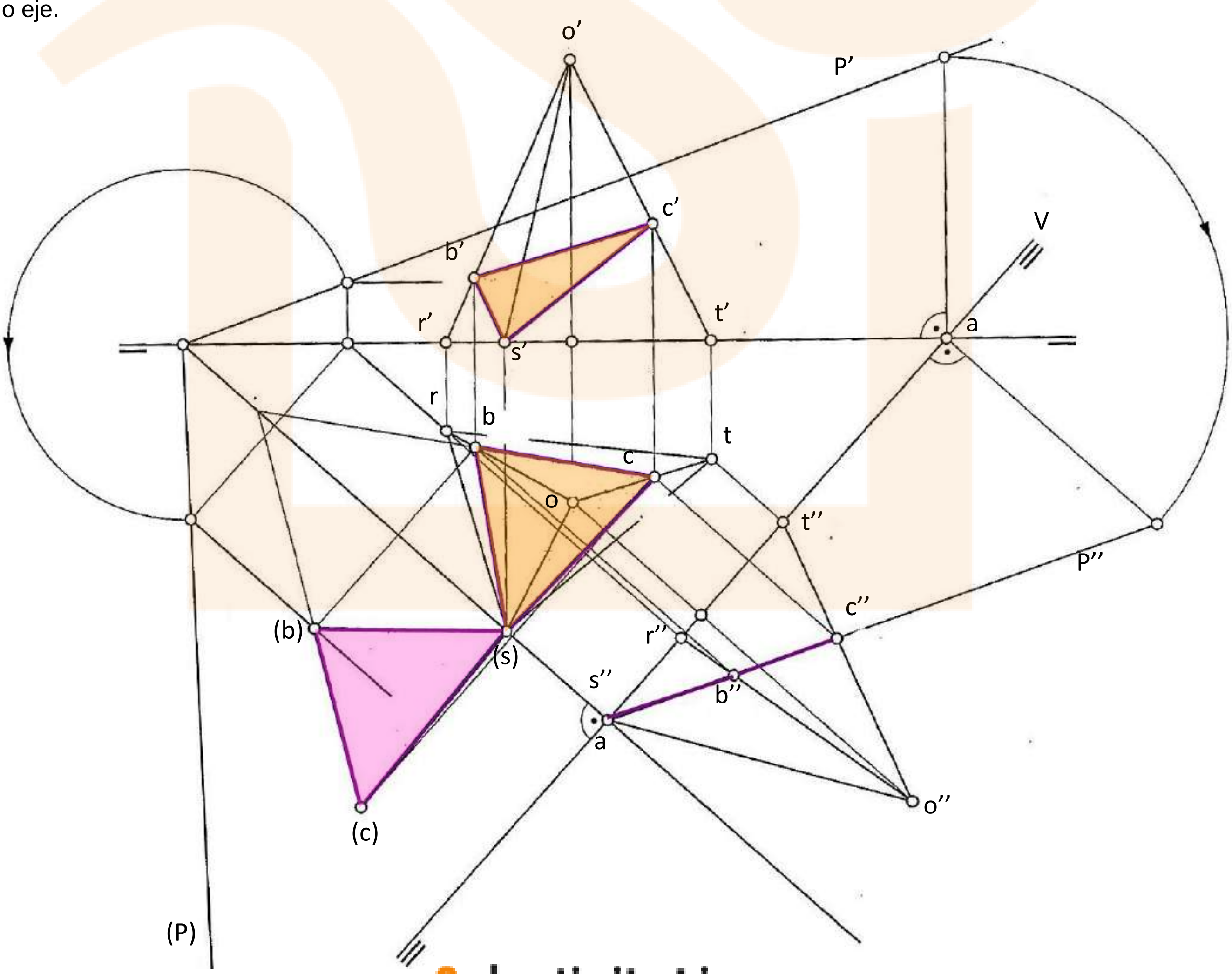


Por intersecciones: En este caso (aunque se podría hacer también por homología una vez hallado uno de los vértices) nos hemos auxiliado de planos de canto que contienen a las dos aristas laterales exteriores, Q' y T' (del punto s no hace falta, porque coincide con el mismo).

-Hallamos las intersecciones entre el plano P y los planos auxiliares T y Q. Donde cortan las proyecciones horizontales de éstas a las aristas de la pirámide en planta, estarán los vértices del plano-sección. Solo resta unir los puntos. Por último, se referencian a las aristas homónimas del plano vertical, y se halla la sección en verdadera magnitud, abatiendo el plano P.

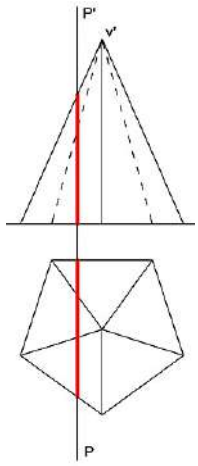
Mediante cambio de plano: realizaremos un **cambio de plano vertical**, para convertir el plano oblicuo P en un plano de canto (perpendicular al plano horizontal). Una vez obtenida la nueva proyección vertical de la pirámide, las intersecciones se hallan más fácilmente.

-Una vez que obtengamos la sección buscada, para determinar su VM se abate el plano que la contiene. Para ello, se puede utilizar la afinidad que se genera entre la sección en proyección sobre los planos horizontal o vertical, y su abatimiento sobre uno de ellos, siendo la charnela de abatimiento P, el eje de afinidad y la dirección perpendicular a dicho eje.



Otros casos

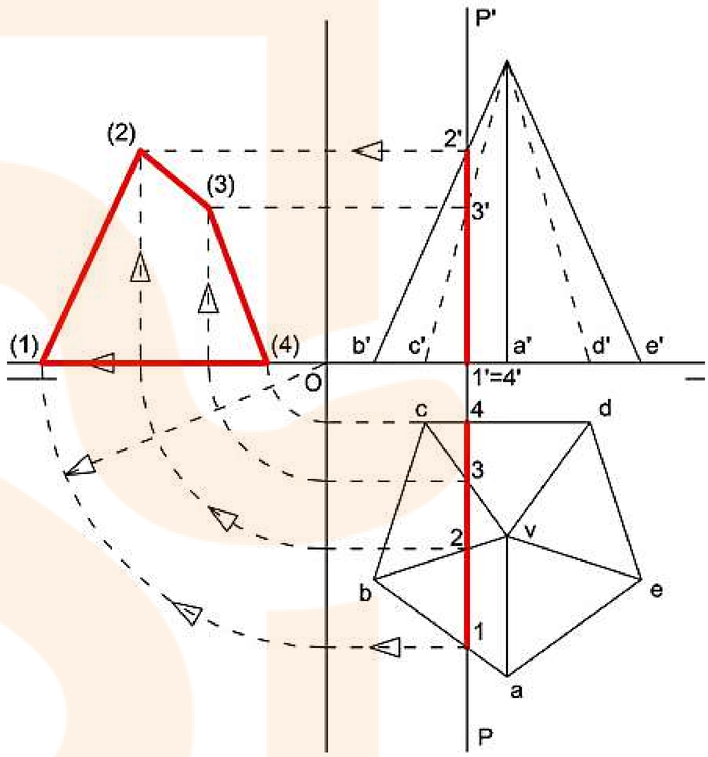
Sección de una pirámide por plano de perfil: La sección por un plano de perfil siempre produce dos proyecciones en sistema diédrico que son **rectas** coincidentes con las trazas del plano que empiezan y acaban junto con el contorno aparente de la pieza. Como ya hemos visto, cualquier elemento contenido en un plano de perfil tiene sus proyecciones sobre las trazas, así que el único objetivo es encontrar la **verdadera magnitud.**



La sección en proyecciones diédricas la puedes ver en el dibujo como dos rectas perpendiculares a la línea de tierra y esas son las que tenemos que abatir. Como ves, los extremos de las líneas rojas (sección) coinciden con el contorno aparente de la pirámide.

Para abatir correctamente esta sección conviene que pongas nombres a los vértices y que, de manera ordenada vayas llevando el corte de cada arista al abatimiento.

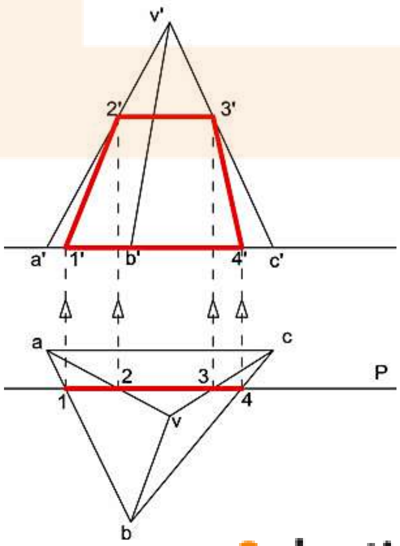
- Puedes ver en proyección horizontal que la traza P está cortando a la arista a-b en el **punto 1**. La proyección vertical de este punto 1 se encuentra en la arista a'-b' que es una arista sin altura, es decir, situada en la línea de tierra. Por tanto, llevaré el punto 1 al plano de perfil (abatimiento) utilizando el punto O como centro del arco de circunferencia y lo dejaré en la línea de tierra porque su cota=0. Así iremos haciendo sucesivamente con el resto de los 4 puntos de la sección.
- **El punto 2** en proyección horizontal corta a la arista b-v así que, como puedes ver en proyección vertical, este punto sí tiene altura. Fíjate en que la arista b-v es parte del contorno aparente de la pirámide en proyección vertical. Llévalo al perfil usando el mismo camino que antes hasta encontrar el punto (2)
- **El punto 3** contenido en la arista C-V tiene altura y se hace igual que el 2, mientras que el **punto 4** se hace igual que el 1 porque no tiene ninguna altura. Con los 4 puntos abatidos y unidos en el orden correcto tienes la sección de la pirámide por el plano de perfil.



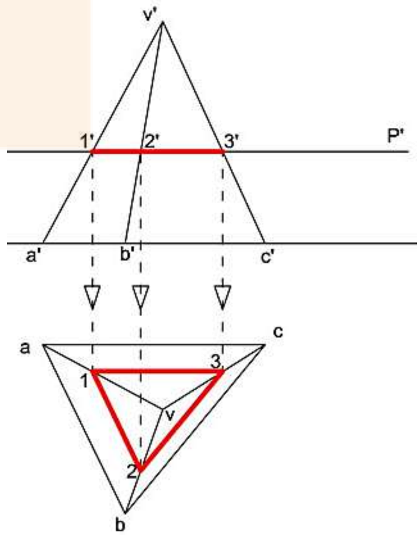
Sección pirámide por plano horizontal o frontal

Estos son probablemente los más sencillos y directos, ya que obtenemos la verdadera magnitud directamente. Como podrás comprobar, el método a utilizar es el mismo: ver cuáles son los puntos de corte de las aristas con el plano de sección y nombrar los vértices y llevar cada punto de manera ordenada.

En el caso de **plano horizontal**, simplemente encontrar los puntos donde el plano corta a las aristas en la proyección vertical y referenciarlos a su proyección horizontal.



En el caso del **plano frontal** es exactamente lo mismo. La traza del plano P corta a la pirámide en los puntos 1, 2, 3 y 4. El punto 1 pertenece a la arista a-b por lo que su proyección vertical estará en la arista a'-b'. De igual manera se obtienen el resto de puntos y la sección definitiva.



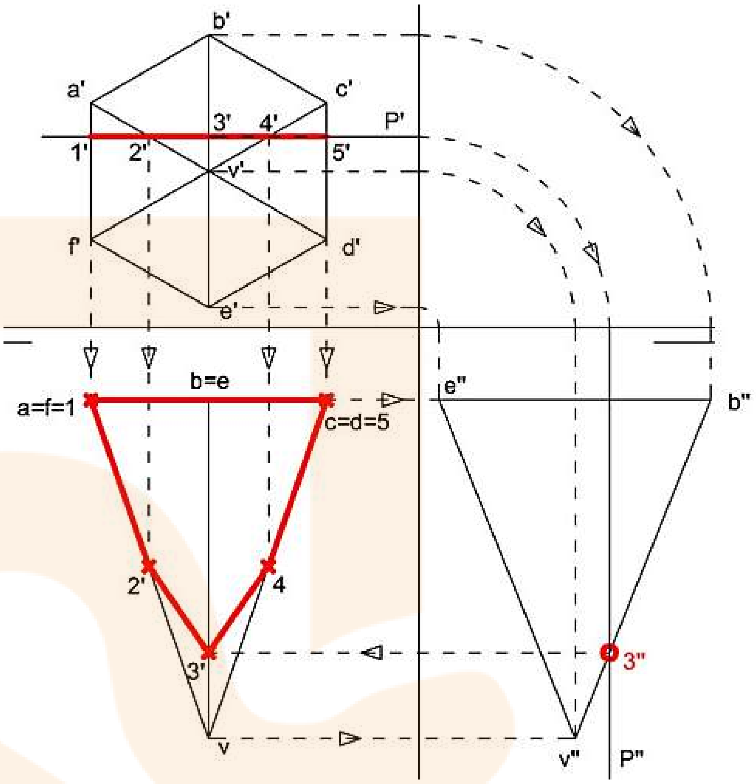
Sección de pirámide con arista de perfil por un plano horizontal

Aparentemente esta pirámide es tan sencilla como los ejercicios anteriores pero esconde un punto de dificultad que ahora veremos. Como siempre, ponemos nombre a los vértices, desde el A hasta el F y el vértice V. Está claro que el plano corta a la pirámide en 1’, 2’, 3’, 4’, 5’. Los **puntos 2 y 4** se encuentran directamente en las aristas a-v y c-v.

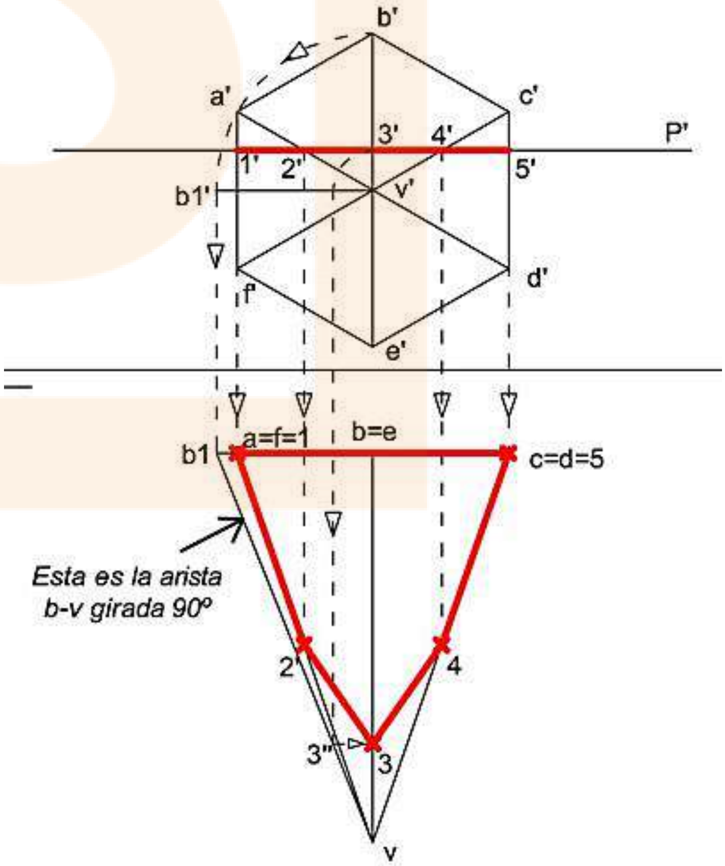
Por su parte, el **punto 1’** se encuentra en la arista a’-f’ que como puedes comprobar es de punta, es decir que cualquier punto de la recta tendrá su proyección horizontal en un único punto, donde están a y f. Lo mismo le pasa al punto 5.

El **punto complicado es el 3**, porque al bajar con una recta perpendicular a la línea de tierra no corta a la arista b-c. En estos casos tenemos 2 formas de resolver el ejercicio:

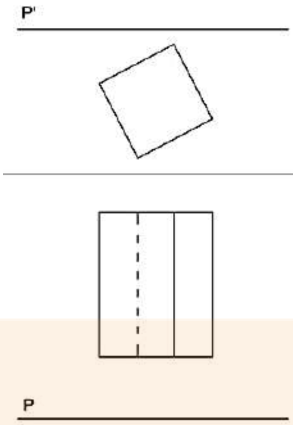
a) Por cambio de plano (plano de perfil): Colocaremos la arista B-V paralela al plano de proyección mediante un plano de perfil. He dibujado el cambio de plano completamente con la arista E-V porque quizá te resulta más fácil de entender, aunque como ves no sería necesario. Cuando llevas la arista y el plano P al perfil obtienes directamente la posición del punto 3’’ en el perfil y así tienes su posición en altura. Ahora solo tienes que llevarlo a la proyección horizontal.

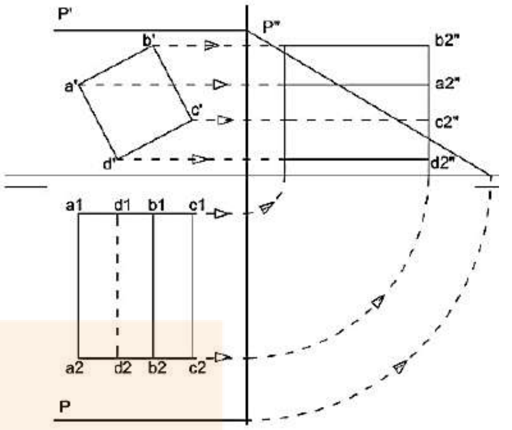


b) Por giro: Gira 90º la arista B-V alrededor de un eje de punta que pasa por V. Esto la situará en paralelo a la línea de tierra. Gira asimismo el punto de intersección 3’. El giro del punto B produce en proyección horizontal un desplazamiento horizontal hasta hacerlo coincidir con la vertical desde 3’. Sobre esta arista girada b1-V sí puedes llevar el punto 3 girado hasta su posición 3’’. Solo falta llevarlo a la proyección horizontal 3.

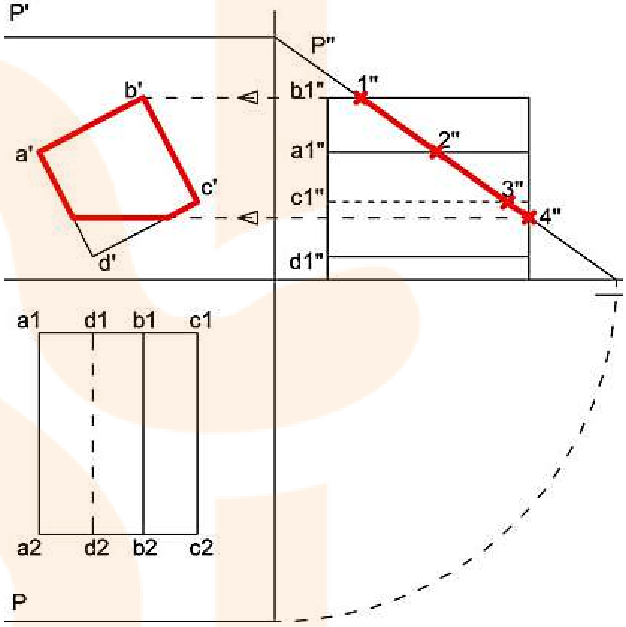


<u>Sección por plano paralelo a la línea de tierra:</u> Aparentemente este plano no corta a la pieza ya que ninguna de las trazas corta a las proyecciones del prisma. Pero si llevamos la figura al plano de perfil el plano corta completamente a la pieza.

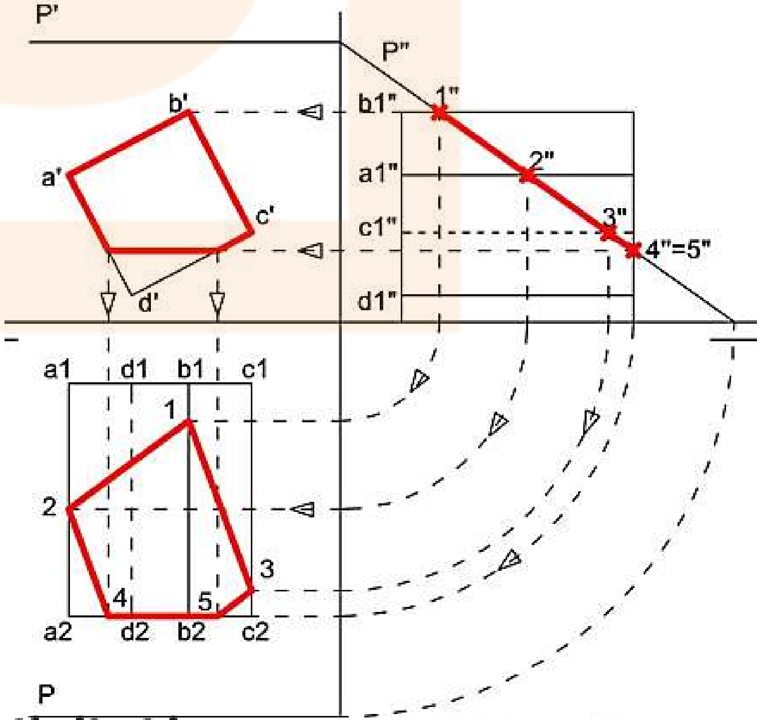




Una vez que tanto el plano como la pieza están en el perfil (acuérdate de poner nombre a los vértices para no equivocarte) es fácil hacer el corte como si fuera un proyectante. Cada punto de la sección tiene que ir a su correspondiente posición en las proyecciones horizontal y frontal.



Empecemos con la proyección vertical: Los puntos extremos de la sección en proyección vertical los determinan 1'' y 4''. El plano corta a la arista B que está en la parte superior. Esto quiere decir que en la proyección vertical se verá ese punto como cortado. Lo mismo ocurre con las aristas A y C con los puntos de corte 2'' y 3''. Por último, el límite por abajo lo define 4'' y como puedes ver el plano está cortando la base delantera del prisma, es decir, la cara a2-b2-c2-d2. Por tanto, cortará a las dos aristas que pasan por D, que son A-D y D-C en una línea horizontal.



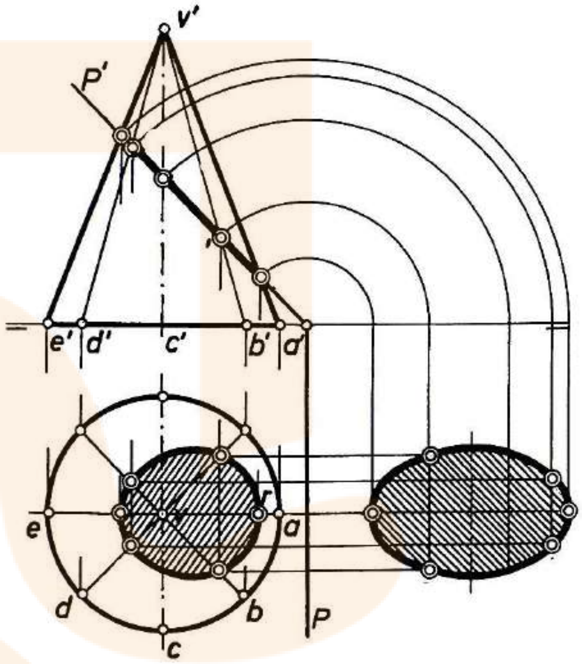
Para la proyección horizontal nos llevamos los puntos 1'', 2'' y 3'' desde el perfil hasta su arista correspondiente B, A y C respectivamente. El punto 4 que, como hemos visto, son en realidad dos puntos, se situará en la cara delantera. Para definir su posición en anchura la puedes bajar desde la proyección vertical.

Todavía nos restaría pasar la sección a su **verdadera magnitud.** Lo veremos en las láminas correspondientes.

9.3.3. SECCIONES DE CUERPOS DE REVOLUCIÓN

La sección que un plano produce en un cono puede adoptar las siguientes formas:

- **Circunferencia:** cuando el plano de sección es **perpendicular** al **eje** del cono.
- **Elipse:** cuando el plano de sección es **oblicuo** al **eje** y **no es paralelo** a ninguna **generatriz**.
- **Parábola**: cuando el plano de sección es **paralelo** a una **única generatriz** del cono
- **Hipérbola**: cuando el plano de sección es **paralelo** a **2 generatrices** del cono. (Este último caso se da cuando consideramos las dos ramas de un cono. Como solo veremos conos de una rama no es necesario que tengamos en cuenta este caso).
- **Triángulo**: cuando **el plano contiene al eje.**

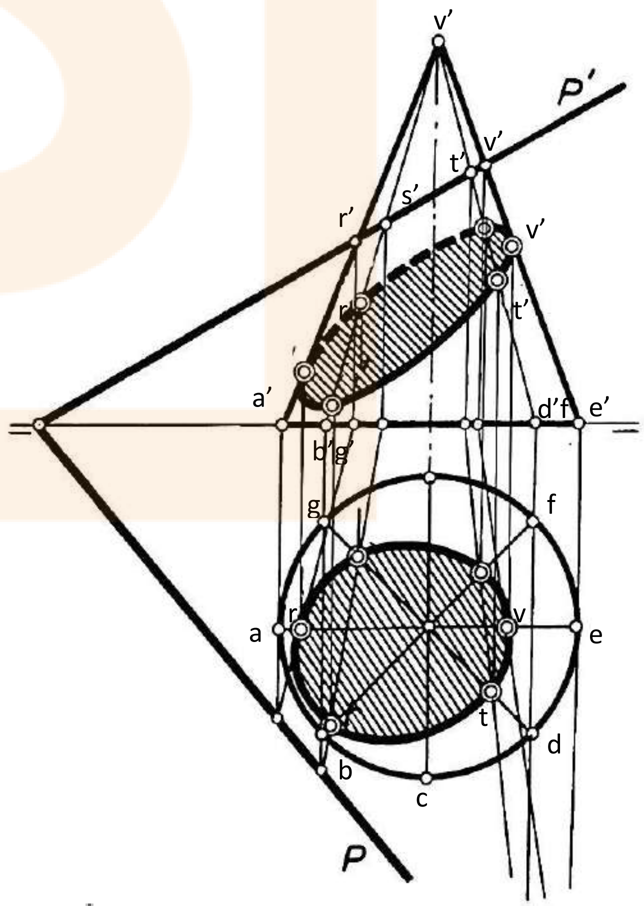


Sección plana de un cono recto apoyado por su base en el PH, por un plano proyectante vertical (por generatrices): Se divide la circunferencia de la base en 8 partes iguales (a 45º cada división), se dibuja la proyección vertical de cada una de esas 8 generatrices y se buscan los puntos en proyección vertical en que el plano corta a las generatrices. Por último, se pasan esos puntos a su proyección horizontal, a la generatriz correspondiente, y dibujamos la elipse que forman esas intersecciones.

-Para verla en VM, abatimos el plano.

Sección de un cono recto por un plano oblicuo: Se puede realizar mediante dos procedimientos:

- **Por intersecciones**
- **Mediante cambio de plano**



Por intersecciones: -Igual que en el caso anterior, trazamos varias generatrices auxiliares, y hallamos sus intersecciones con el plano mediante planos proyectantes que los contengan (por ejemplo, para hallar el punto de intersección r, nos auxiliamos del plano proyectante QQ', y hallamos la recta de intersección qq', que en su corte con av nos da r. Así sucesivamente).

-Una vez que tengamos la proyección de la elipse en planta, la referenciamos al PV, a cada una de las generatrices homónimas.

Mediante cambio de plano: realizaremos un cambio de plano hasta convertir al plano oblicuo en proyectante. La sección se aprecia así directamente sobre las nuevas proyecciones verticales del cono. La curva resultante es una **elipse.**

Para determinar la proyección horizontal de la elipse conocemos directamente el eje mayor AB (a’1, b’1) del que calcularemos sus proyecciones horizontales a y b directamente. El eje menor CD es eje de punta tras el cambio. Para determinar su proyección horizontal *nos auxiliaremos de un plano Q horizontal que contenga al punto medio O del eje mayor*. Este plano genera de sección recta en el cono una circunferencia de centro Z y diámetro XY, con centro en la proyección horizontal de Z trazamos la *circunferencia sección*. Por el punto -o- trazamos una perpendicular a la nueva línea de tierra que cortará a la circunferencia trazada, *la cuerda dc así obtenida determina la proyección horizontal del eje menor*. Trazamos la elipse por métodos geométricos.

Para determinar la proyección vertical de la elipse, calculamos las proyecciones verticales de los extremos de los ejes que en proyección vertical serán diámetros conjugados. Para hacerlo tendremos en cuenta que *las cotas de estos puntos son idénticas antes y después del cambio de plano vertical y que cada uno de ellos pertenece a una generatriz del cono que tendremos que dibujar en proyección vertical.*

Calculamos la **verdadera magnitud** de la sección abatiéndola a partir del plano P sobre uno de los planos de proyección. En el ejemplo de la figura se ha abatido el plano secante P sobre el plano horizontal de proyección.

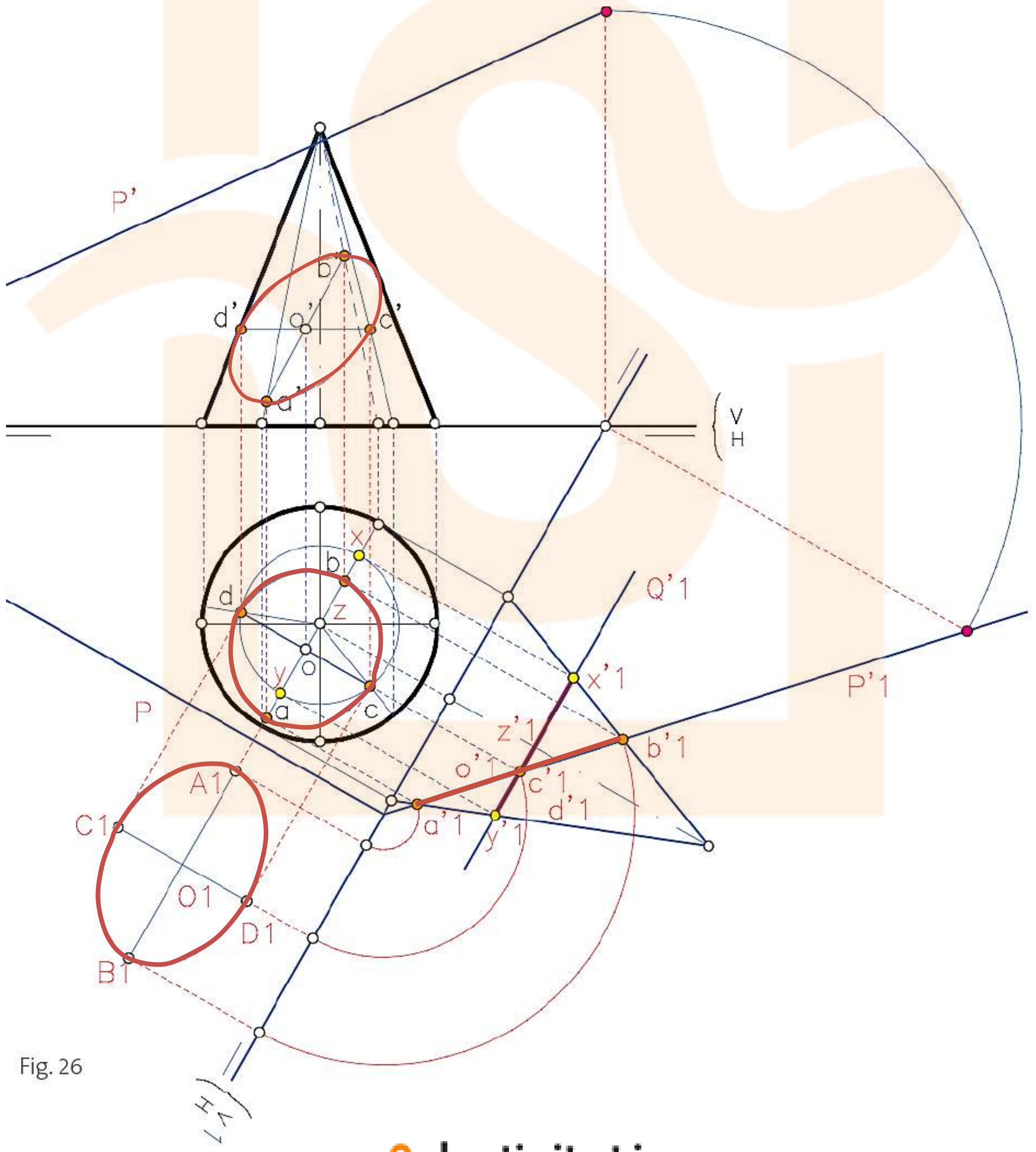
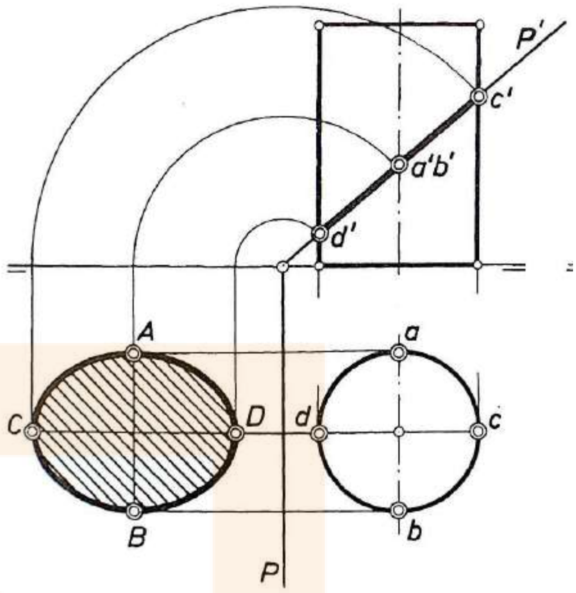


Fig. 26

Sección plana de un cilindro recto apoyado en el PH por un plano proyectante vertical

-Por abatimiento del plano secante, hallamos la VM de la sección.



Sección de un cilindro por un plano oblicuo.

El método más adecuado para resolver este ejercicio es realizar un cambio de plano hasta convertir el plano oblicuo dado en proyectante. La sección se calcula, realizado el cambio, como en el ejercicio anterior.

Para determinar las proyecciones verticales de los extremos A, B, C y D en la proyección vertical dada originalmente tendremos en cuenta que las cotas de estos puntos no varían en el cambio de plano pues se ha tratado de un cambio de plano vertical. Las proyecciones así obtenidas a', b', c' y d', son extremos de los diámetros conjugados de la elipse resultante de la sección. La elipse se trazará geométricamente.

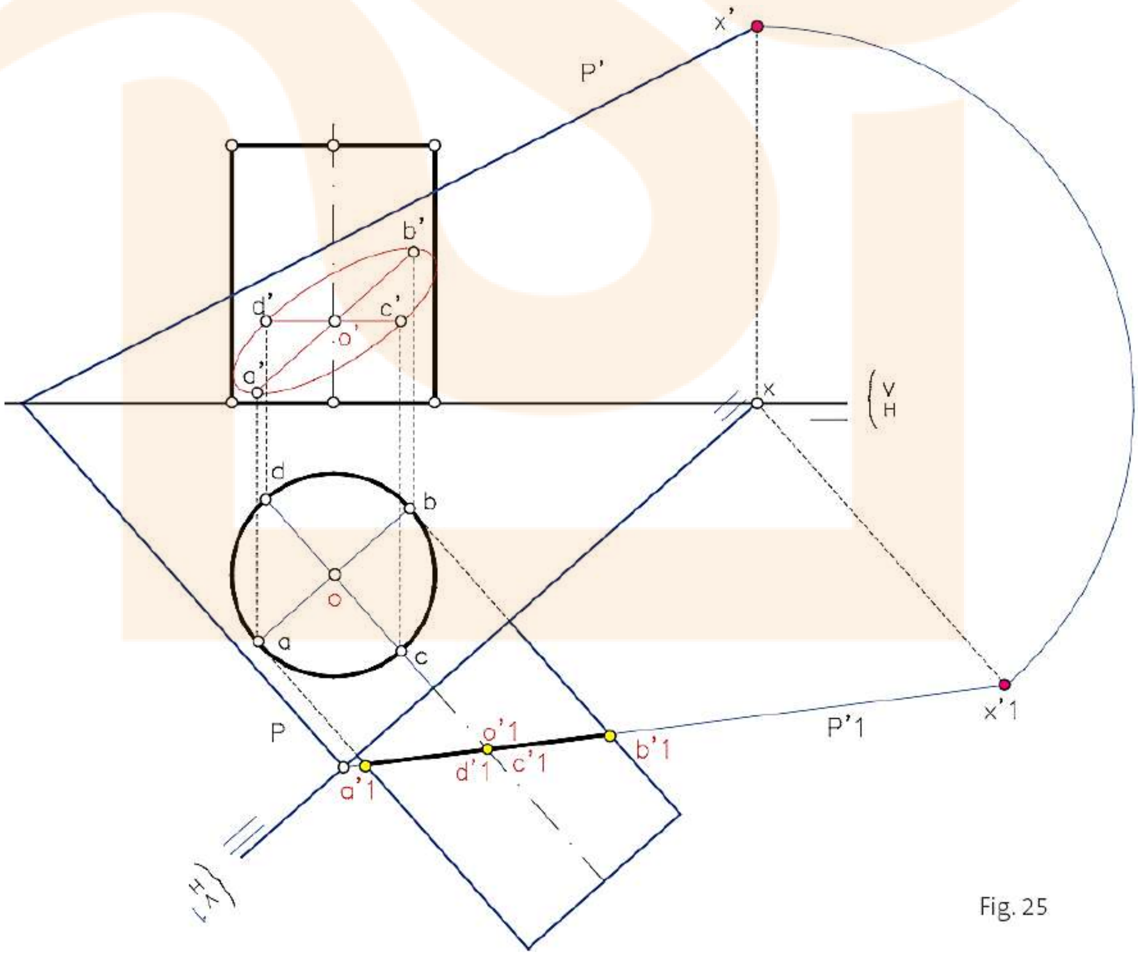
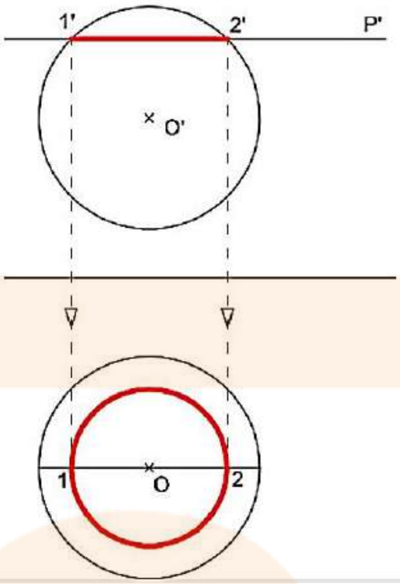


Fig. 25

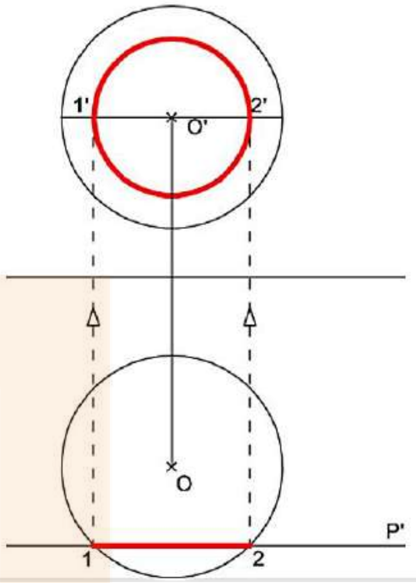
<u>Sección plana de la esfera:</u> La sección generada por un plano en la esfera es **SIEMPRE** una **circunferencia** que será de radio máximo igual al radio de la esfera cuando el plano secante contenga al **centro** de la esfera. La única dificultad es dibujarla correctamente, en su posición y con su diámetro adecuados.

<u>Sección de la esfera por planos paralelos a los de proyección:</u> Cuando la sección de una esfera viene dada por un plano frontal o uno horizontal, la sección siempre se ve en verdadera magnitud. El diámetro de la sección lo dan los extremos 1 y 2 de la sección, en la proyección en que se ve como una recta. Tendremos que llevar esos puntos 1 y 2 sobre el diámetro paralelo a la línea de tierra en la otra proyección.

Recuerda que el contorno aparente de la circunferencia en una proyección viene determinado por el diámetro paralelo a la línea de tierra en la otra proyección.



Sección por un plano horizontal



Sección por un plano frontal

<u>Sección de una esfera por un plano proyectante</u>: En este caso nuevamente la sección es una circunferencia pero ahora no se verá en verdadera magnitud, sino como una **elipse** en una proyección y como una recta en la otra.

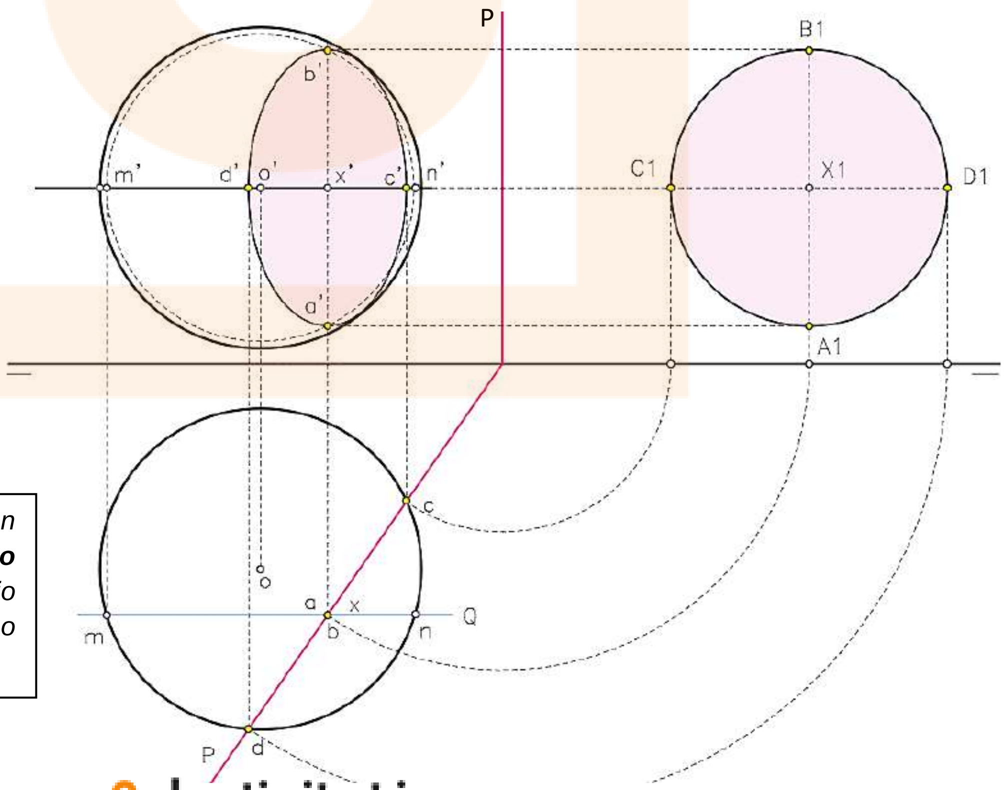
La sección generada en una esfera por un **plano proyectante** horizontal P se aprecia directamente en su proyección horizontal según un segmento c-d siendo c y d los puntos de intersección de la traza horizontal del plano con el ecuador y contorno aparente de la esfera.

En proyección vertical la sección se proyectará según una elipse de eje menor horizontal c'-d' y de eje mayor a'-b', para determinar los puntos a´y b´ trazamos una recta vertical por x, centro del eje menor CD hasta cortar a la sección circular en proyección vertical generada por el plano frontal Q que contiene a A, B y X en proyección horizontal. (Véase pertenencia de un punto a la esfera).

A partir de los ejes mayor y menor a´-b´y c´-d dibujamos geométricamente la elipse, proyección vertical de la sección.

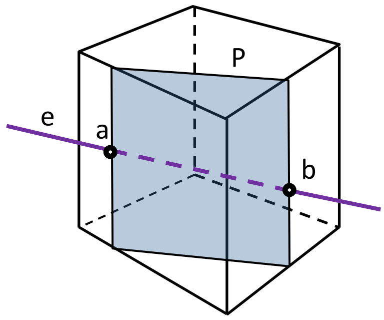
Podemos determinar la **verdadera magnitud** de la sección circular abatiendo los extremos de los ejes y trazando por ellos una circunferencia.

*Para calcular la sección generada en la esfera por un **plano oblicuo** cualquiera realizaremos un cambio de plano hasta convertir el plano secante dado en proyectante.*

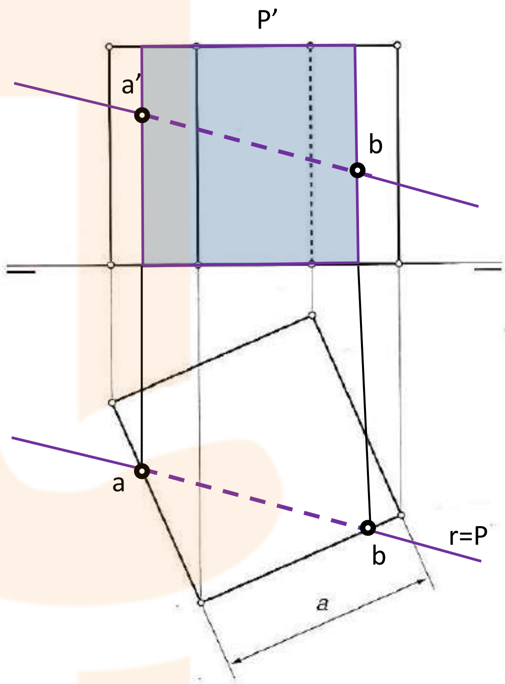


9.4. INTERSECCIÓN DE UNA RECTA CON UN POLIEDRO

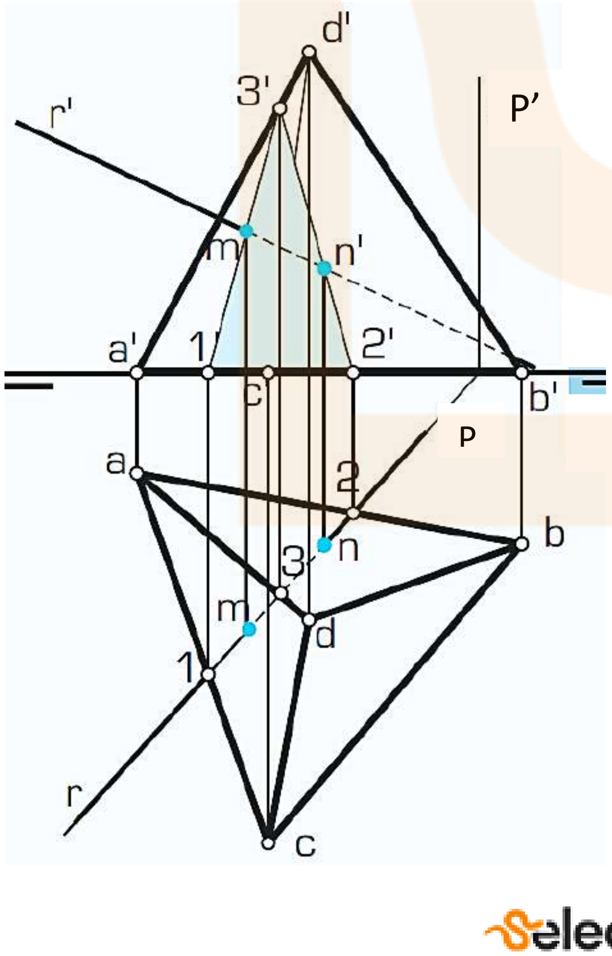
Determinar la intersección de una recta con un sólido consiste en buscar los puntos de entrada y salida de la recta con una superficie poliédrica. Se realiza tomando un plano que contenga a la recta, y determinando la sección plana que éste produce con el poliedro. Los puntos de corte de la recta dada con el polígono de la sección son los puntos de intersección buscados. El plano auxiliar puede ser un plano proyectante o un plano que, conteniendo a la recta, pase por el vértice del sólido o sea paralelo a sus aristas o generatrices, en el caso de sólidos de vértice impropio.

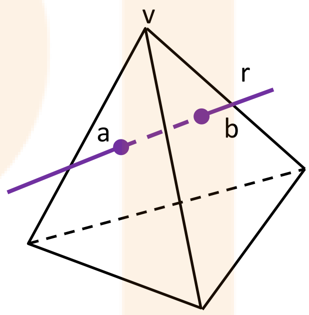


En este caso, el plano auxiliar tomado es proyectante horizontal, paralelo por tanto a las aristas del poliedro. Por ser proyectante horizontal, su traza P coincide con la proyección horizontal r de la recta. Los puntos de corte definidos en esa traza horizontal se refieren sobre la proyección vertical r’, determinando la intersección buscada.



Intersección de una recta con tetraedro





1. Se introduce el plano P-P’ proyectante horizontal que contiene a la recta.

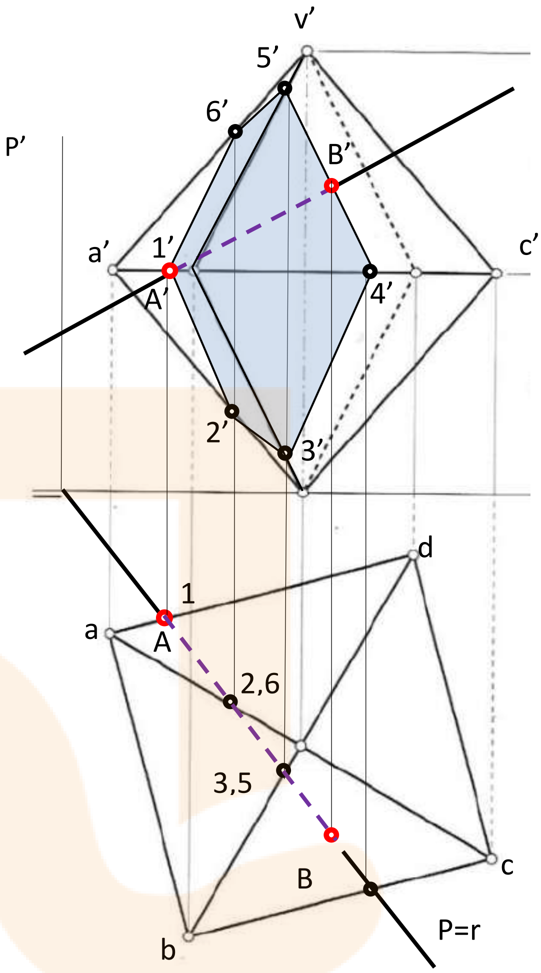
2. Se determina la sección que produce dicho plano en el cuerpo, siendo ésta el triángulo **1**-**2**-**3**.

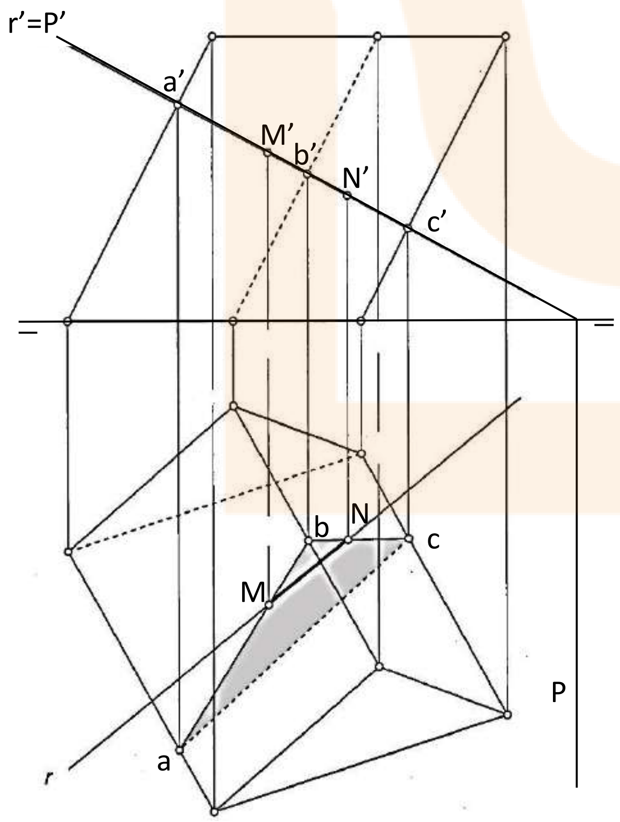
3. Donde la recta **R** encuentre a la sección triangular, se localizan los puntos **M** y **N** de intersección de **R** con el cuerpo, que se referencian también al plano vertical.

Intersección de una recta con un octaedro

Utilizamos en este caso un plano auxiliar vertical, cuya traza horizontal coincide con la proyección horizontal r de la recta.

-La intersección de la proyección horizontal del plano P con las aristas del poliedro (1,2,3,4,5,6) nos dan la posición de los vértices de la sección auxiliar, que se referencian al PV. Los puntos de intersección del polígono resultante con la recta nos dan los puntos de intersección buscados, que se referencian al PH. Ese segmento de recta que está entre estos dos puntos de intersección se traza con línea discontinua, para diferenciar la porción de recta que transcurre por el interior del sólido.





Intersección de una recta con un prisma

Tomamos un plano auxiliar P que contenga a la recta. Para facilitar el ejercicio, se puede elegir un plano proyectante horizontal o vertical. En este caso hemos utilizado un plano de canto que contiene a la recta r (también podría haberse hecho con un plano paralelo a las aristas del prisma) para conseguir una **sección recta**.

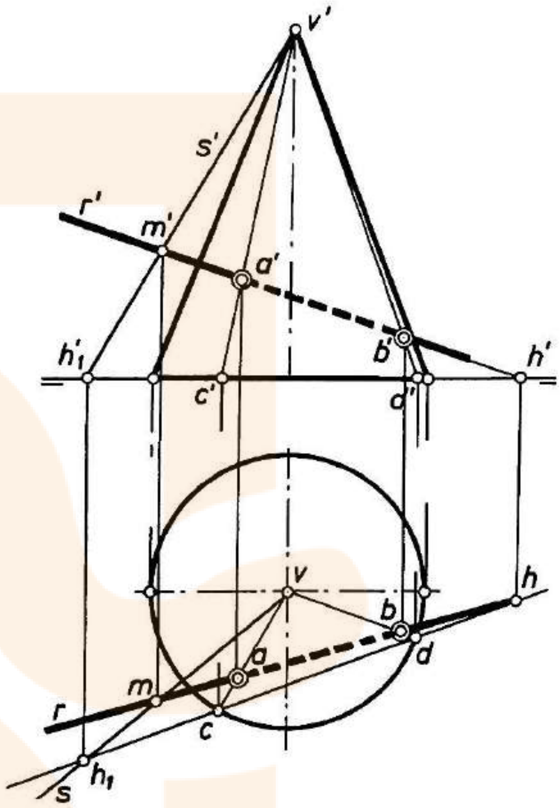
Hallamos los puntos de corte a’b’c’ de la traza vertical del plano P’ con las aristas del poliedro, las referenciamos al PH, obteniéndose la sección abc. Los puntos de intersección de esa sección con la recta, MN, son la solución buscada, que se referencia al PV.

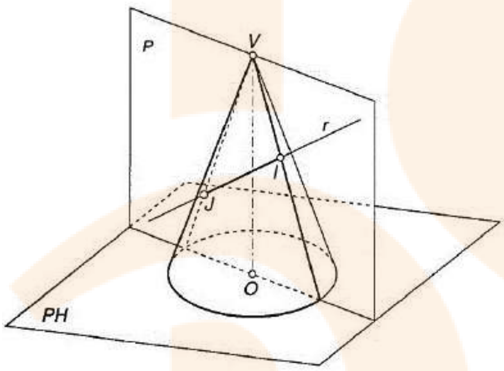
Intersección de una recta con un cono

Aunque el método general explicado al principio sirve también para cono y cilindro, en general los planos proyectantes producen secciones con forma de elipse o parábola y de esta manera el proceso es laborioso y, sobre todo, impreciso. Vamos a utilizar un método por el que conseguiremos siempre **secciones triangulares** en el cono y **secciones rectangulares** en el cilindro.

Para el cono el proceso es el siguiente:

1. Tomar un punto M(m'-m) cualquiera de la recta R dada.
2. Dibujar la recta S(s'-s) que une M(m'-m) con el vértice del cono V(v'-v)
3. Hallar y unir los puntos traza horizontales hr y hs de las rectas R y S.
4. La recta hr-hs es la traza horizontal de un plano que contiene a R y S y pasa por el vértice. La sección que produce este plano en el cono es triangular, pasa por el vértice y por los puntos de corte de la traza con la base del cono.
5. -cdv y c'd'v' son el plano sección. El corte de cv y dv con la recta son los puntos de intersección a y b, que se referencian al PV.

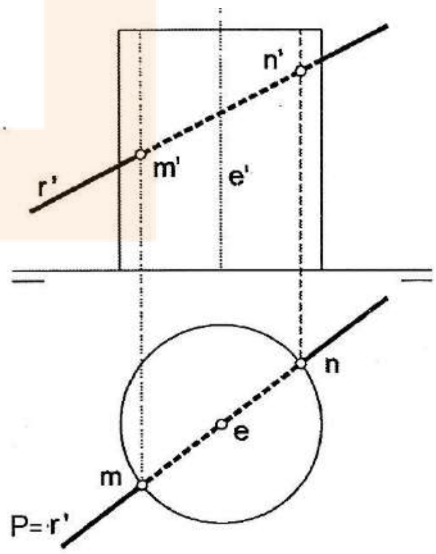




En este caso hemos utilizado también un plano que contiene a la recta R, solo que no es proyectante, sino que es un plano que contiene también al el vértice. Así tendremos siempre una sección triangular, que son más rápidas y precisas de dibujar. Hemos conseguido que el plano pase por el vértice porque hemos utilizado una recta S que corta a la recta R en el punto A y hemos hecho que esta recta S pase por el vértice.

Intersección de recta con cilindro recto

Hacemos coincidir con la recta r la traza horizontal de un plano auxiliar P, proyectante vertical. Su intersección con el cilindro son las dos generatrices m y n, que en proyección horizontal coinciden en la intersección de r con la proyección horizontal del cilindro. Referimos m y n a la proyección vertical. Sus intersecciones con r' son los puntos m' y n', puntos de entrada y salida de la recta en el cilindro.

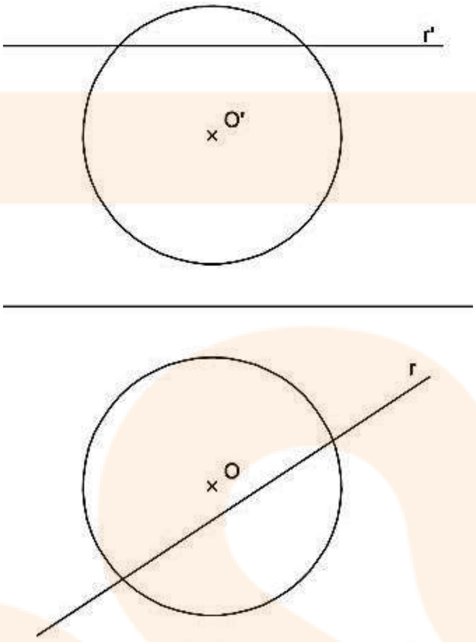


Intersección de rectas con la esfera.

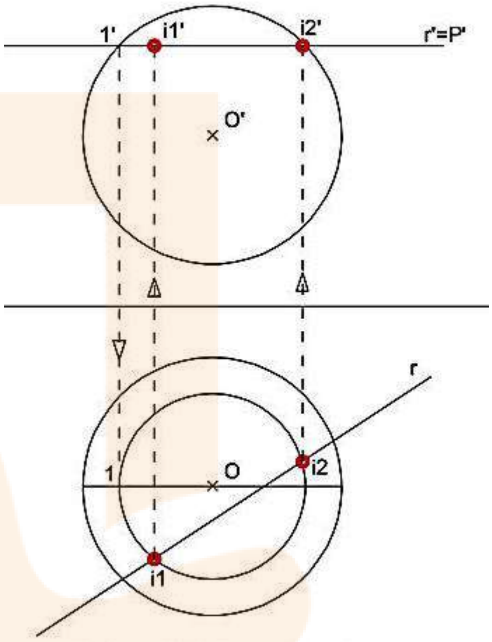
En función del tipo de recta dada procederemos según alguno de los dos métodos siguientes:

1.-Cuando la recta es **frontal u horizontal**: Este caso es muy sencillo y se hace aplicando el método general. Veamos una **recta horizontal**: utilizamos un plano horizontal P que la contiene y le hacemos su correspondiente sección. Para encontrar la sección de este plano encontramos el punto 1' en que P' corta al contorno de la esfera en proyección vertical. Este punto tiene su proyección horizontal 1 en el diámetro paralelo a la línea de tierra. Con centro en O y radio O-1 trazamos una circunferencia que es la sección del plano P sobre la esfera.

La intersección de r con esta circunferencia de sección da los 2 puntos de intersección i1 e i2 que tienen su proyección vertical en r'.



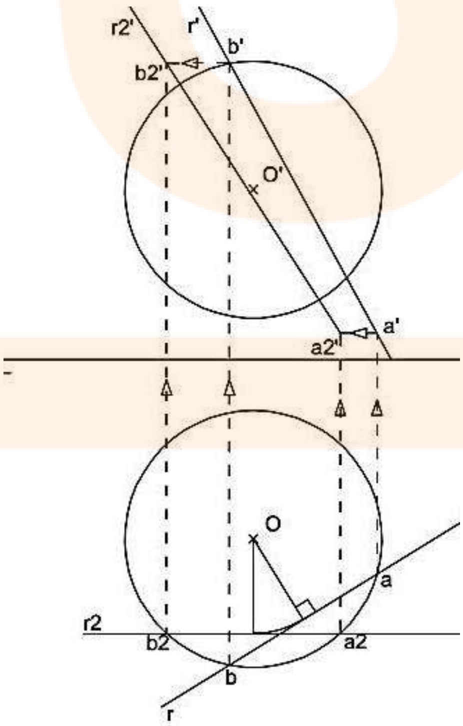
Intersección de una recta horizontal con una esfera



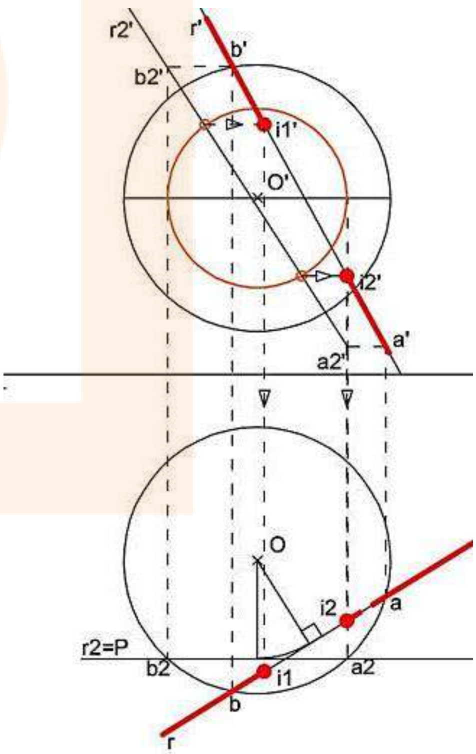
El plano P contiene a R. Sección del plano P sobre la esfera e intersección de esta sección con r.

2.-Si la recta es oblicua. Resolución mediante giro: Consiste en girar la recta R hasta colocarla como frontal R2. En este momento hacemos la sección que produce un plano P frontal que contiene a R2 sobre la esfera, que será una circunferencia vista en verdadera magnitud. La intersección de esta sección en forma de circunferencia con la proyección vertical r2' de la recta girada nos da los puntos de intersección en el giro.

Para encontrar los puntos definitivos I1 e I2 solo hay que deshacer el giro.



Método 3: Girar la recta hasta ponerla como frontal de plano. Para ello girar 2 puntos, A y B.



El plano P frontal contiene a R2 girada. La sección de P es una circunferencia. El corte de r2' con la circunferencia da las intersecciones. Deshacer el giro.