SISTEMA DIÉDRICO: PUNTO , RECTA , PLANO:

CLASES DE PROYECCIÓN:

Proyección de un punto sobre un plano es la intersección del rayo proyectante que pasa por el punto con el plano de proyección.
Existen las siguientes clases de proyección:
a) **Proyección cónica**. Todos los rayos proyectantes parten de un punto fijo llamado centro de proyección

b) **Proyección cilíndrica**. Todos los rayos proyectantes son paralelos a una dirección dada, es decir, el centro de proyección es un punto impropio (está en el infinito).
- Proyección cilíndrica oblicua. Los rayos son oblicuos respecto al plano de proyección
- Proyección cilíndrica ortogonal. Los rayos son perpendiculares al plano de proyección

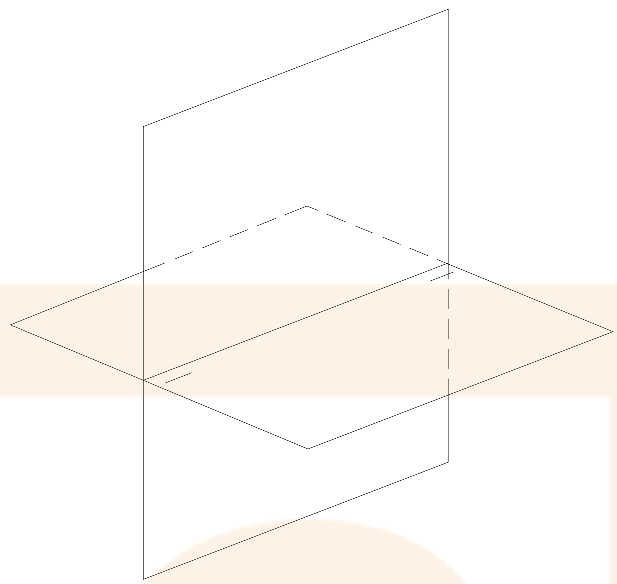
Sistemas de representación

Se denomina sistemas de representación a los diversos
procedimientos o sistemas para representar en. un plano objetos tridimensionales.
Los diversos sistemas de representación que vamos a estudiar son:
a) **Sistema diédrico:** proyección cilíndrica ortogonal.
b) **Sistema de perspectiva axonométrica**: proyección cilíndrica ortogonal.
c) **Sistema de perspectiva caballera**: proyección cilíndrica oblicua.
d) **Sistema cónico**: proyección cónica.

El Sistema diédrico

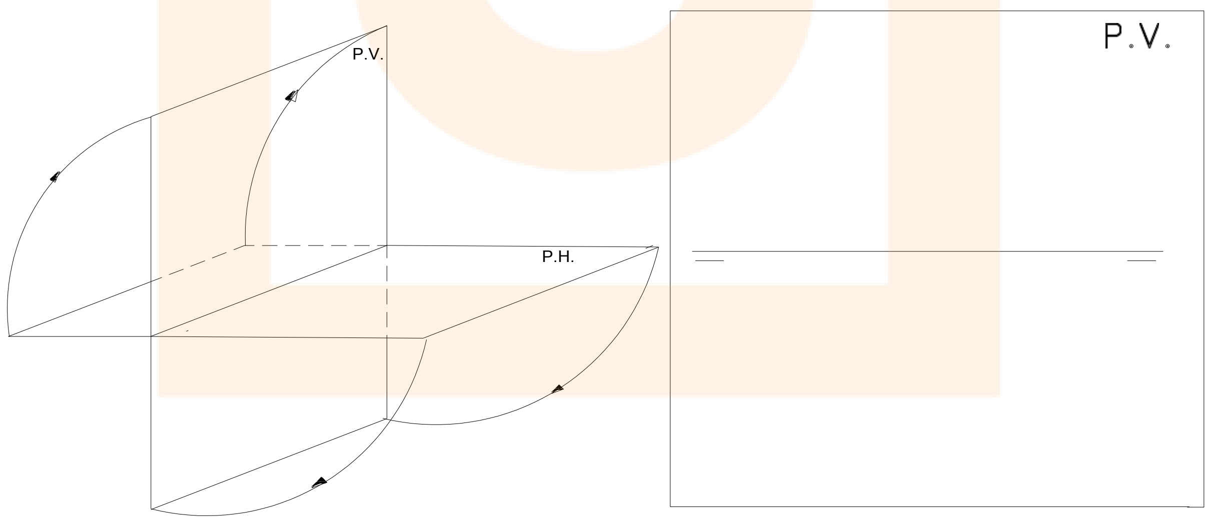
ELEMENTOS DEL SISTEMA DIÉDRICO

En la figura 4:
PH Plano horizontal de proyección.
PV Plano vertical de proyección.
PH y ***PV*** son perpendiculares.
LT Línea de tierra.
Es la intersección del ***PH*** y del ***PV.***
I Primer cuadrante o diedro.
II Segundo cuadrante o diedro.
III Tercer cuadrante o diedro.
IV Cuarto cuadrante o diedro.
β Primer bisector.
Es el plano que divide al 1^er^ y 3^er^ cuadrantes en dos partes iguales.
β Segundo bisector.
Es el plano que divide al 2.° y 4.° cuadrantes en dos partes iguales.
PHa Plano horizontal anterior.
PHp Plano horizontal posterior.
PVs Plano vertical superior.
PV¡ Plano vertical inferior.
Los puntos se designan con letras latinas mayúsculas ***(A,* B, C, ...),** las rectas con letras latinas minúsculas ***(a, b,* C, ...)** y los planos con letras griegas ***(Ω,β,**δ **, ...).**



REPRESENTACIÓN DEL PUNTO.

Vistos en el espacio los elementos que intervienen en el sistema diédrico, veamos ahora de qué forma se pueden representar los objetos sobre un papel valiéndonos de dichos elementos.
Supongamos que el plano horizontal es nuestra hoja de papel (fig. 6):
1 Se proyecta **ortogonalmente** el punto *A* sobre el plano horizontal en ***A₁***
2 Se proyecta **ortogonalmente** el punto *A* sobre el plano vertical en ***A₂****.*
3 Se abate el plano horizontal sobre el vertical en el sentido de las agujas del reloj.
Observación: puede considerarse igualmente que la hoja de papel es el plano vertical; en este caso, es el plano horizontal el que se abate sobre el vertical y en el mismo sentido de las agujas del reloj. Tanto en un caso como en otro se obtiene el mismo resultado, pero no deben mezclarse ambos criterios.
4 Si ahora se coloca el plano vertical de frente, se verá el rectángulo de la figura 6b, la línea de tierra y las dos proyecciones del punto.
'En adelante no se dibujará el rectángulo, pues ambos planos de proyección se consideran sin límites. La línea de tierra se representa con dos rayitas en sus extremos y por debajo de ella, indicando la parte anterior del plano horizontal.

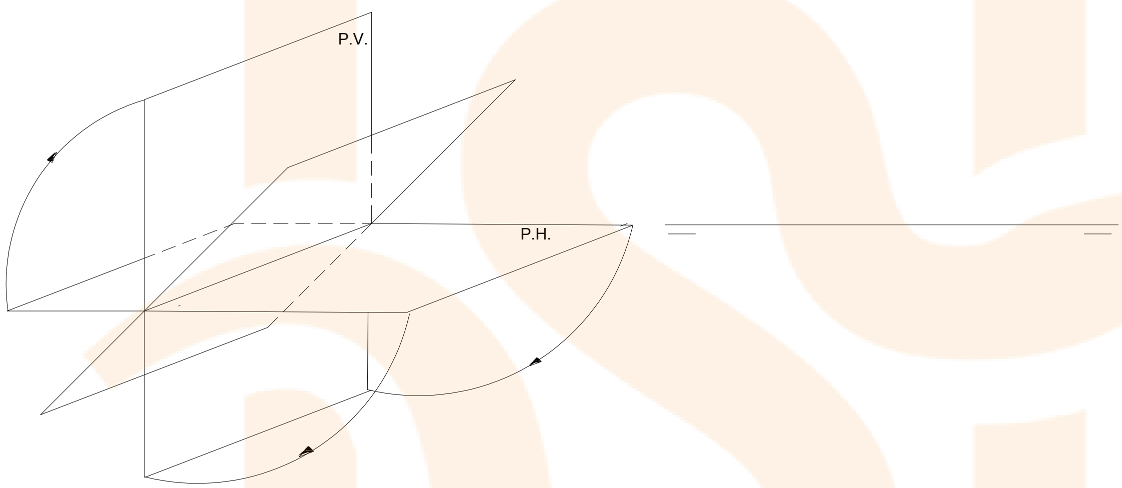


Definiciones sobre el punto

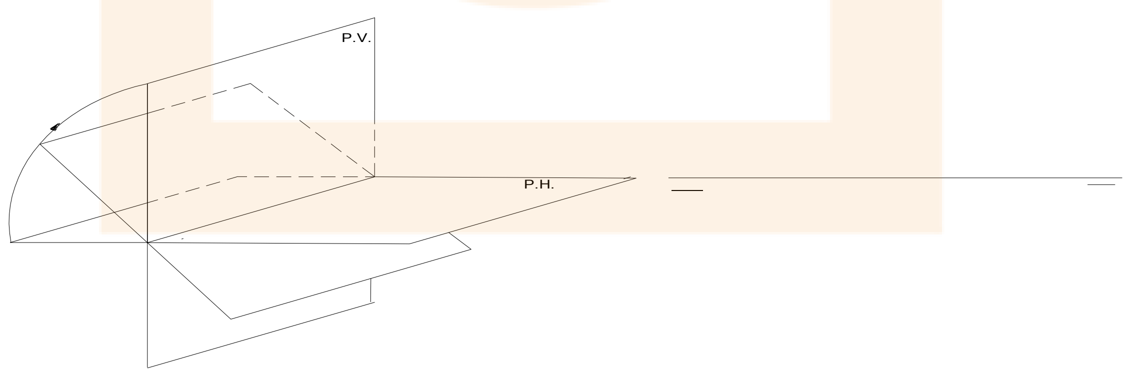
***A*₁** Proyección horizontal del punto: es la proyección sobre el plano horizontal.
***A*₂** Proyección vertical del punto: es la proyección sobre el plano vertical.
c Cota del punto: es la distancia del punto al plano horizontal, es decir, la distancia desde la proyección vertical del punto a la línea de tierra.
a Alejamiento del punto: es la distancia del punto al plano vertical, es decir, la distancia desde la proyección horizontal a la línea de tierra.
La línea ficticia que une ambas proyecciones se denomina línea de referencia del punto.

POSICIONES DEL PUNTO

Puntos situados en el primer cuadrante (fig. 7)
***A**:* Punto situado encima del primer bisector; la cota es mayor que el alejamiento.
B: Punto situado en el primer bisector; la cota es igual al alejamiento.
C: Punto situado debajo del primer bisector; la cota es menor que el alejamiento.

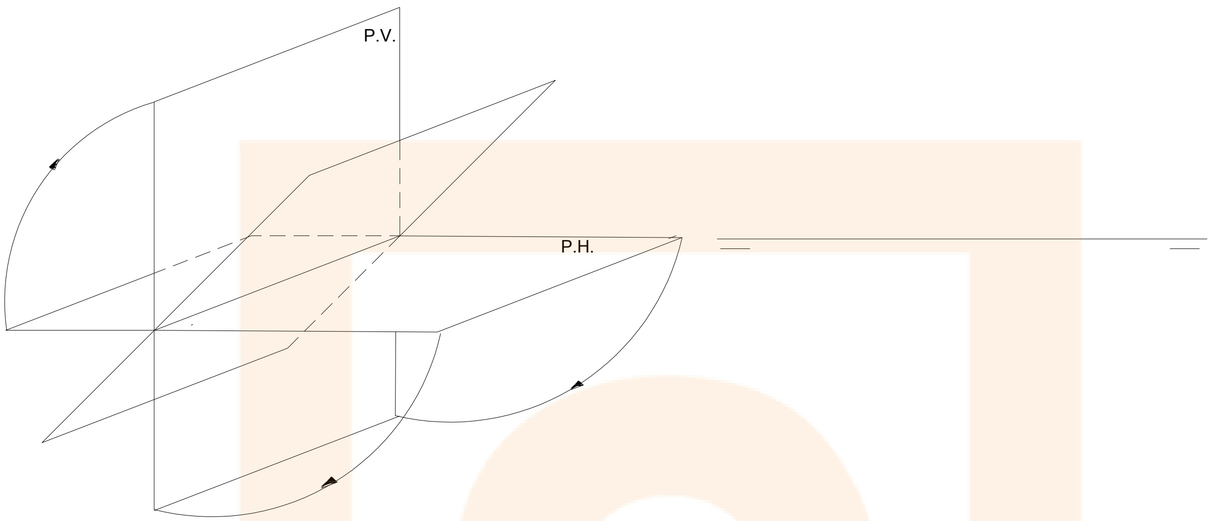


Puntos situados en el segundo cuadrante (fig. 8)
D: Punto situado debajo del segundo bisector; la cota es menor que el alejamiento.
E: Punto situado en el segundo bisector; la cota es igual al alejamiento.
F: Punto situado encima del segundo bisector; la cota es mayor que el alejamiento.

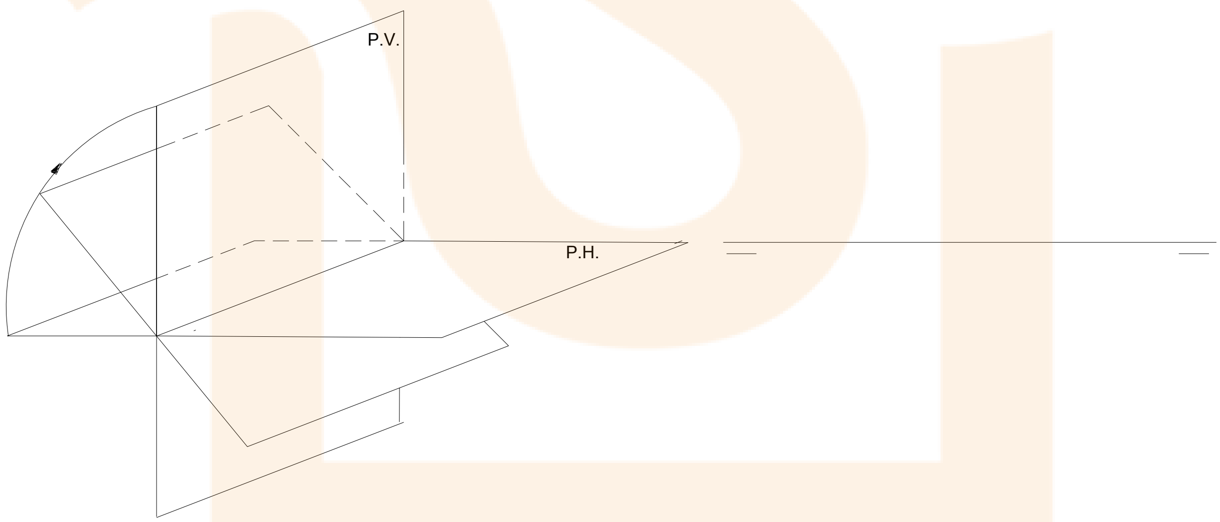


Puntos situados en el tercer cuadrante (fig. 9)

G: Punto situado encima del primer bisector; la cota es menor que el alejamiento.
H: Punto sit_ado en el primer bisector; la cota es igual al alejamiento.
I*:* Punto situado debajo del primer bisector; la cota es mayor que el alejamiento.

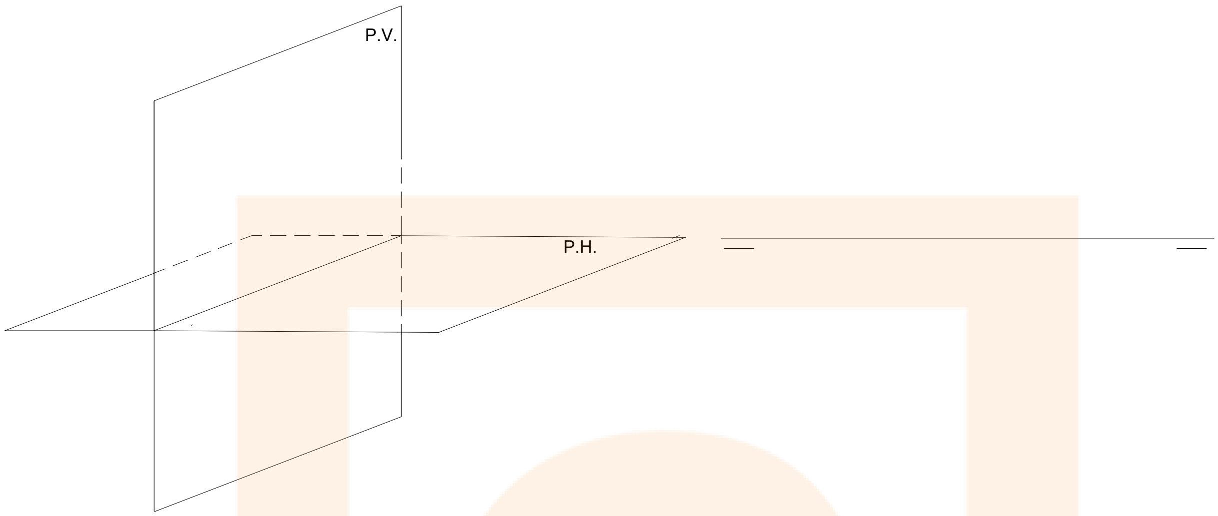


Puntos situados en el cuarto cuadrante (fig. 10)
J*:* Punto situado debajo del segundo bisector; la cota es mayor que el alejamiento.
K: Punto situado en el segundo bisector; la cota es igual que el alejamiento.
L*:* Punto situado encima del segundo bisector; la cota es menor que el a leja miento.



Puntos situados en los planos de proyección (fig. 11)
M*:* Punto situado en el plano horizontal anterior; la cota es cero.
N*:* Punto situado en el plano horizontal posterior; la cota es cero.
Q: Punto situado en el plano vertical superior; el alejamiento es cero.
R*:* Punto situado en el plano vertical inferior; el alejamiento es cero.

S: Punto situado en la línea de tierra; la cota y el alejamiento son cero.



REPRESENTACiÓN DEL PUNTO POR COORDENADAS

Origen

Se dibuja la línea de tierra y se determina sobre ella un origen. Dicho origen será el vértice de un sistema de ejes ortogonales ***(X, Y, Z),*** cuyos sentidos positivos y negativos son los indicados en la figura 12.

Representación del punto

El punto queda definido por sus coordenadas diédricas ***P(x,* y, *z*)*,*** cuyo significado es el siguiente (fig. 13):
x **Distancia al origen**. Indica la posición del punto respecto del origen.
Si es **+**, está a la derecha del origen.
Si es **-,** está a la izquierda del origen.
y **Alejamiento**. Indica la posición de la proyección horizontal *P1.*
Si es +, está por debajo de ***LT****.*
Si es -, está por encima de ***LT.***
Z Cota. Indica la posición de la proyección vertical ***P_2.*** Si es **+**, está encima de ***LT****.*
Si es **-**, está debajo de ***L T****.*

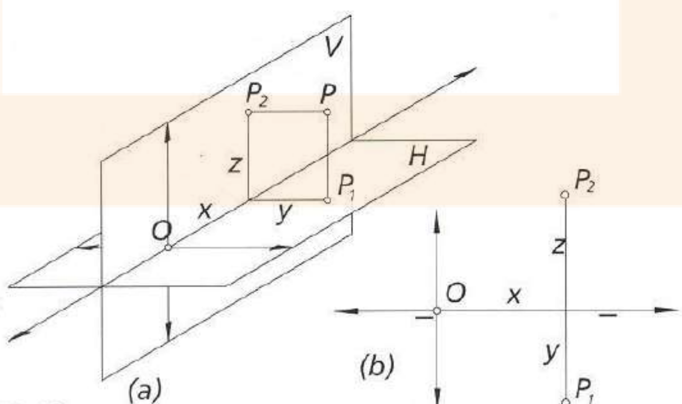
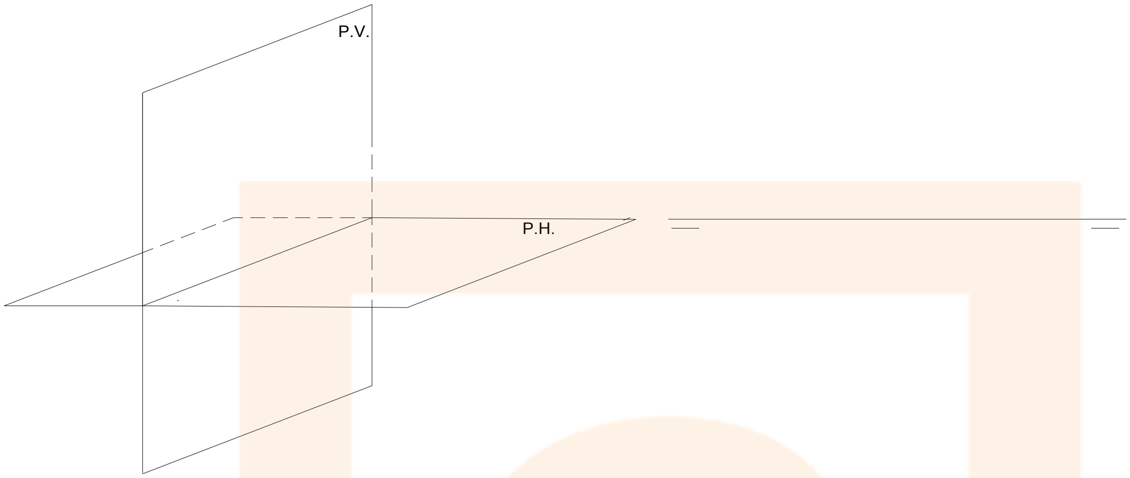
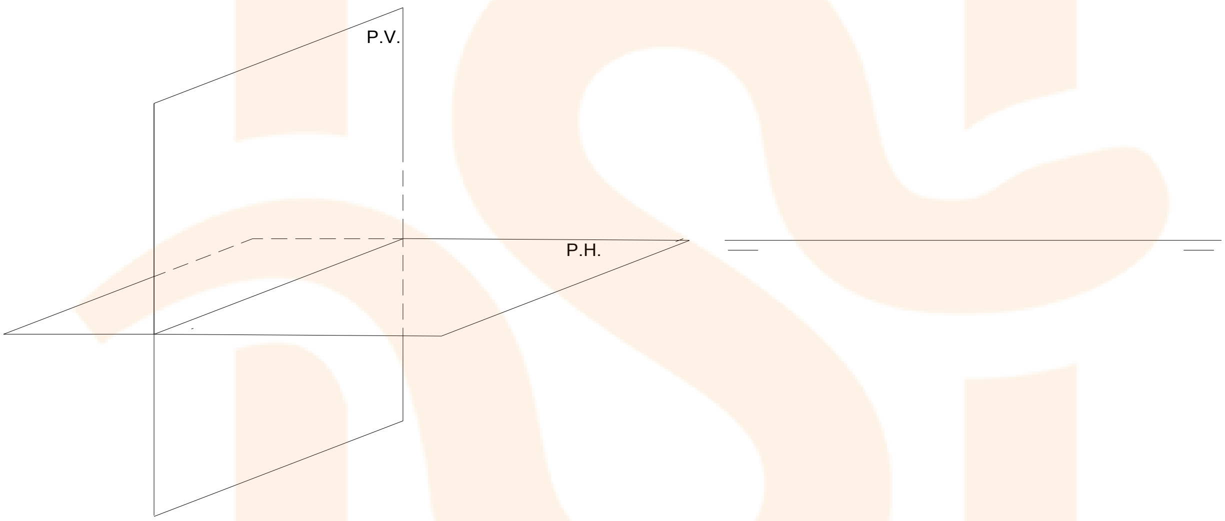


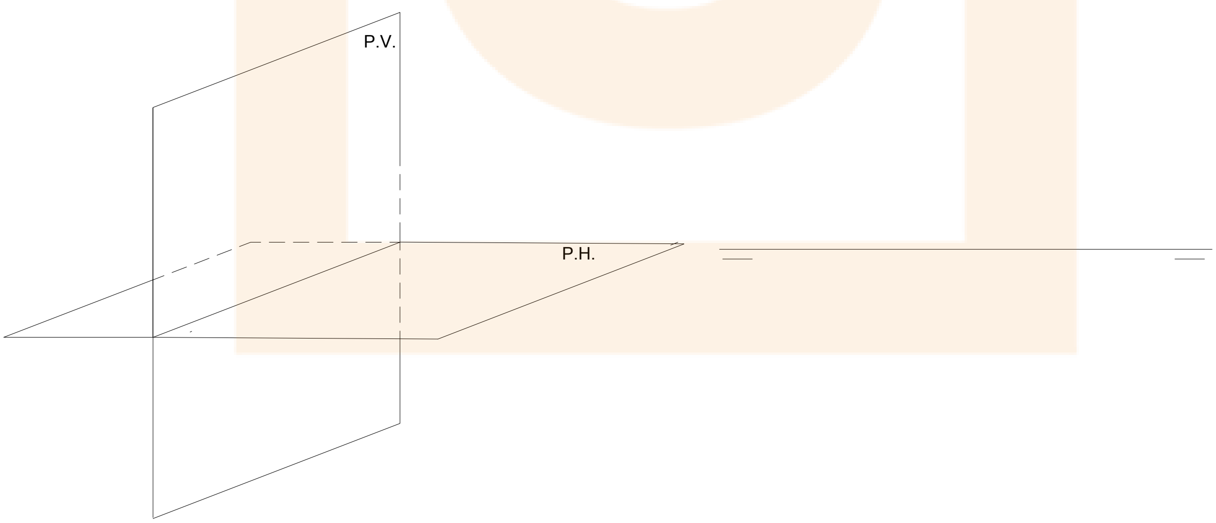
FIG. 13

Ejemplos

Representar los siguientes puntos (figs. 14-15-16):
A(4, 2, -3), *B(4,* O, 3) y C(O, -3, 2).



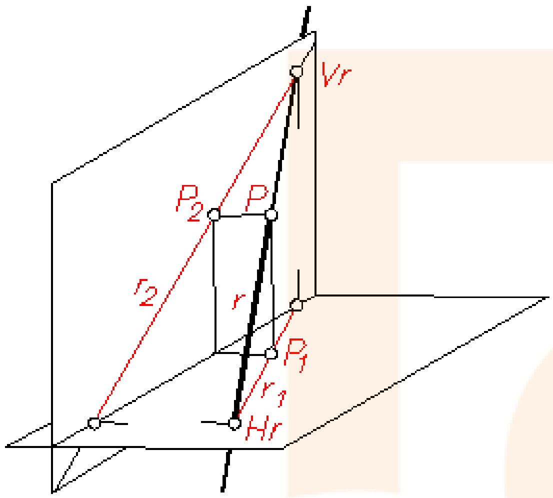




REPRESENTACIÓN DE LA RECTA

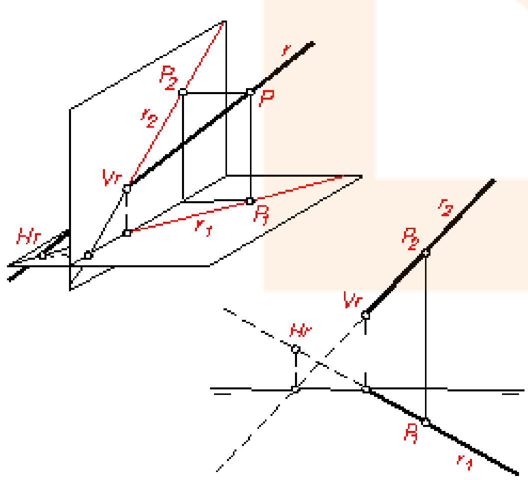
Supongamos de nuevo que el plano vertical es nuestra hoja de papel (fig. 18):

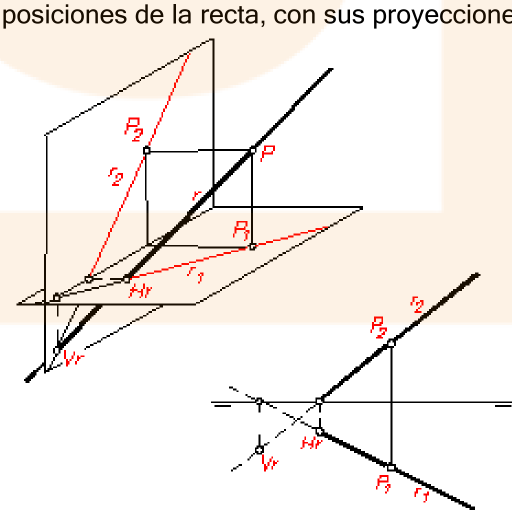
1 Se proyectan ortogonalmente todos los puntos de la recta sobre el plano horizontal en ***r_1***
2 Se proyectan ortogonalmente todos los puntos de la recta sobre el plano vertical en **r_2**
3 Se abate el plano horizontal sobre el plano vertical en el sentido de las agujas del reloj, como se ha hecho con el punto.
4 Si ahora se coloca el plano horizontal de frente, se verá la línea de tierra y las dos proyecciones de la recta.
Por tanto:
r_1 Proyección horizontal de la recta: es la proyección sobre el plano horizontal.
r_2 Proyección vertical de la recta: es la proyección sobre el plano vertical.



Traza horizontal de la recta *(H_r).*
Es la intersección de la recta con el plano horizontal. En diédrico se determina trazando, por el punto donde la proyección vertical **r_2** de la recta corta a la línea de tierra, la perpendicular hasta cortar a la proyección horizontal ***r_1***
La traza horizontal es un punto ***H_r(,Hr_1, Hr_2)*** que se encuentra en el plano horizontal y por tanto, tal como se ha visto antes, su proyección horizontal ***Hr_1*** coincide con el propio punto ***H_r*** y su proyección vertical ***Hr_2*** está en la línea de tierra. Generalmente, y para simplificar la notación, escribiremos simplemente ***Hr***.

Traza vertical de la recta *(V_r)*
Es la intersección de la recta con el plano vertical. En diédrico se determina trazando, por el punto donde la proyección horizontal ***r_1*** de la recta corta a la línea de tierra, la perpendicular hasta cortar a la proyección vertical **r_2**
La traza vertical es un punto ***Vr(Vr_1, Vr_2)*** del plano vertical y por tanto su proyección vertical ***Vr_2*** coincide con el propio punto ***Vr*** y su proyección horizontal está en la línea de tierra. Para simplificar la notación en adelante escribiremos simplemente ***Vr***.
En las figuras 19 y 20 pueden verse dos nuevas posiciones de la recta, con sus proyecciones y sus trazas.





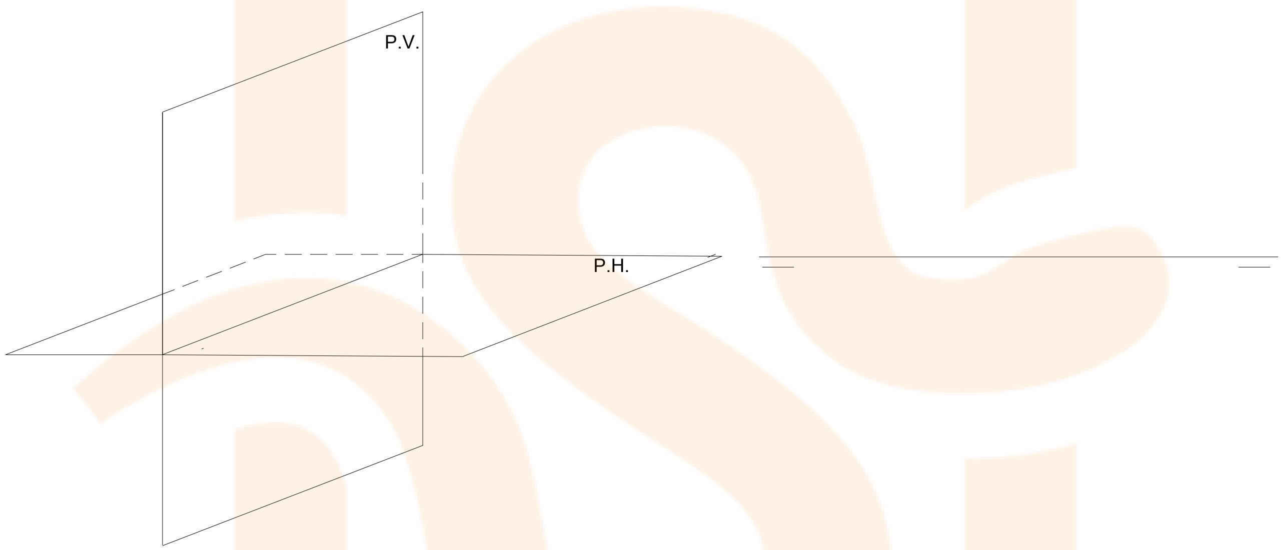
CONDICIONES PARA QUE UN PUNTO PERTENEZCA A UNA RECTA. PARTES VISTAS Y OCULTAS DE LA RECTA

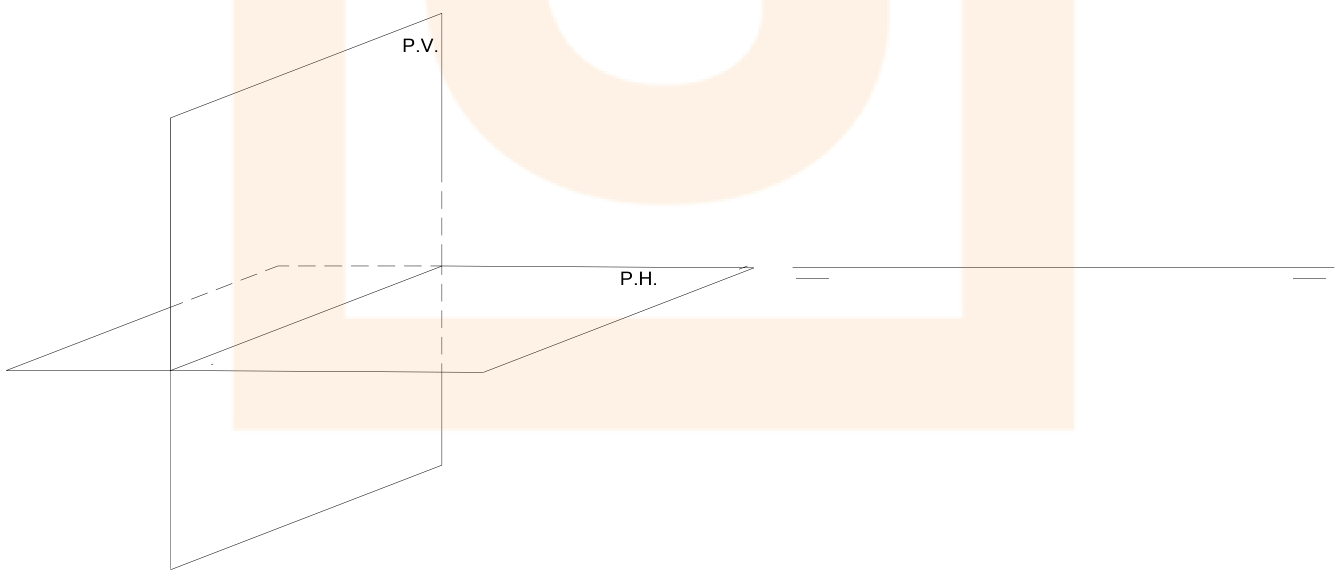
Dada una recta **r** (fig. 18), para que un punto ***P*** pertenezca a la recta, la proyección horizontal P_1 del punto debe estar en la proyección horizontal r_1 de la recta y la proyección vertical P_2 del punto debe estar en la proyección vertical r_2 de la recta.

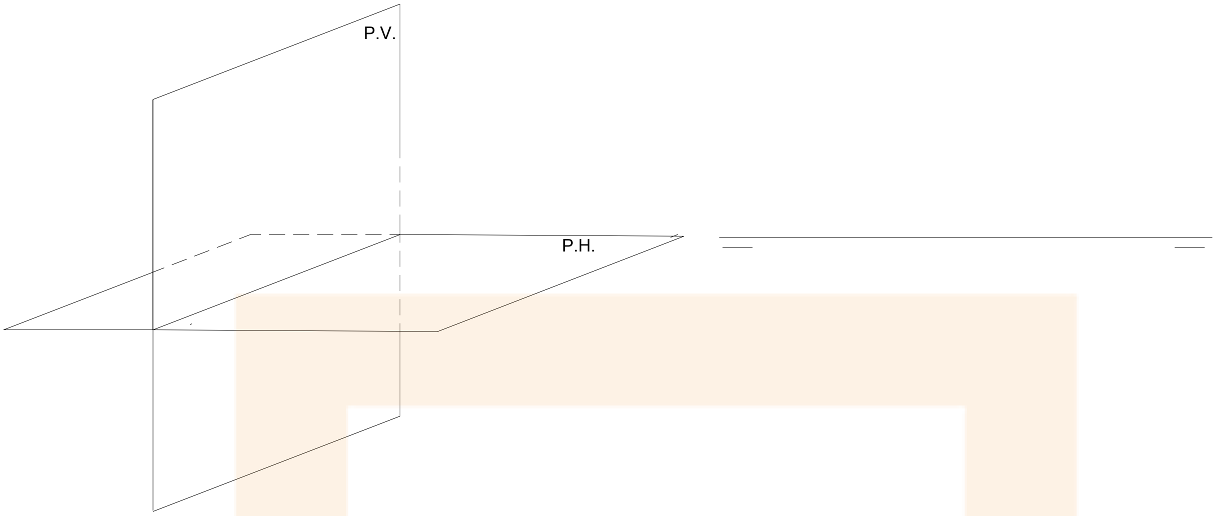
Partes vistas y ocultas

En sistema diédrico solo se considera visto todo aquello que se encuentra en el primer cuadrante; como una recta puede atravesar distintos cuadrantes, existen partes de ella que son vistas y partes que son ocultas. En una recta, los puntos que separan las partes vistas de las ocultas son sus trazas, pues son los puntos en los que la recta pasa a otros cuadrantes.

En las figuras **21, 22 Y 23** se han marcado las partes vistas y ocultas de tres rectas; para ello se ha dividido cada una de ellas en tres tramos separados por sus trazas y se han tomado tres puntos, ***A***(A_1, A_2), **B**$(B_1\ B_2)$ Y ***C***(C_1, C_2), situados en cada uno de dichos tramos. El tramo correspondiente al punto situado en el primer cuadrante (proyección horizontal A_1 por debajo de *LT y* proyección vertical A_2 por encima de *LT)* será el tramo visto por encontrarse todos sus puntos en el primer cuadrante.



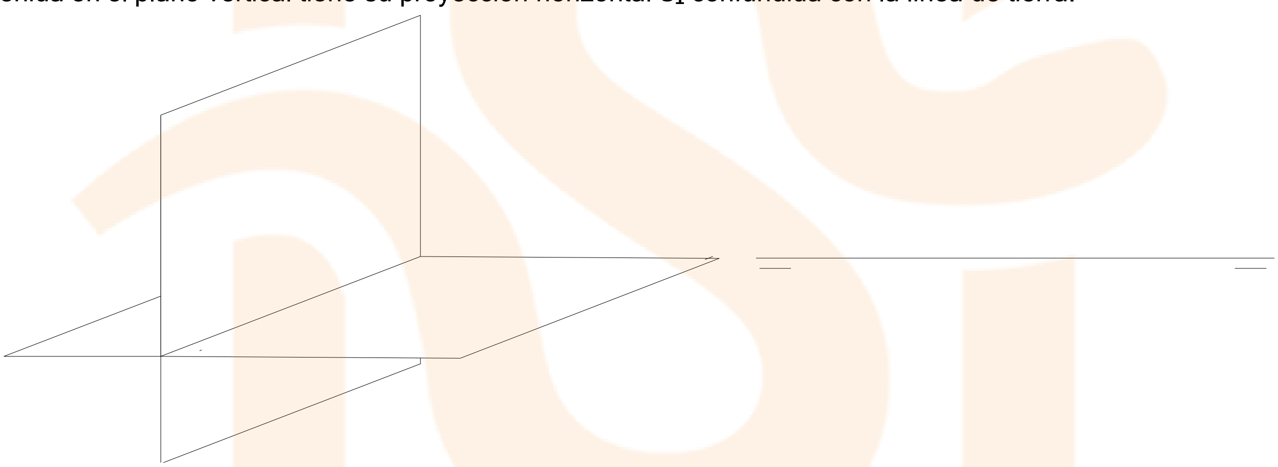




POSICIONES DE LA RECTA

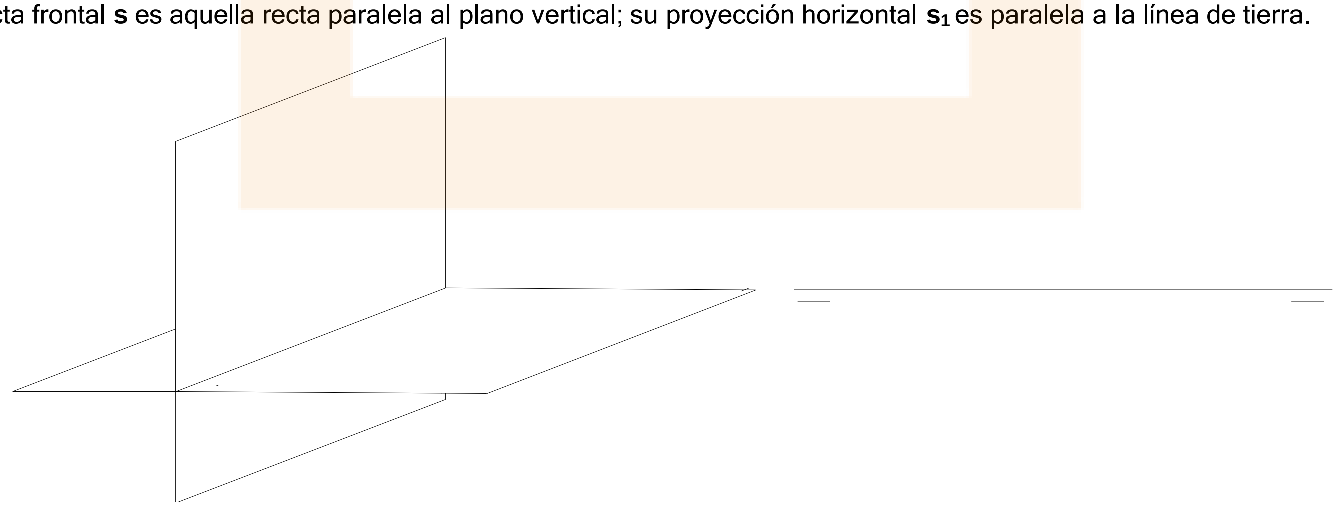
Rectas contenidas en los planos de proyección (fig. 24)

Una recta **r** contenida en el plano horizontal tiene su proyección vertical $\mathbf{r_2}$ confundida con la línea de tierra. Una recta **s** contenida en el plano vertical tiene su proyección horizontal $\mathbf{s_1}$ confundida con la línea de tierra.

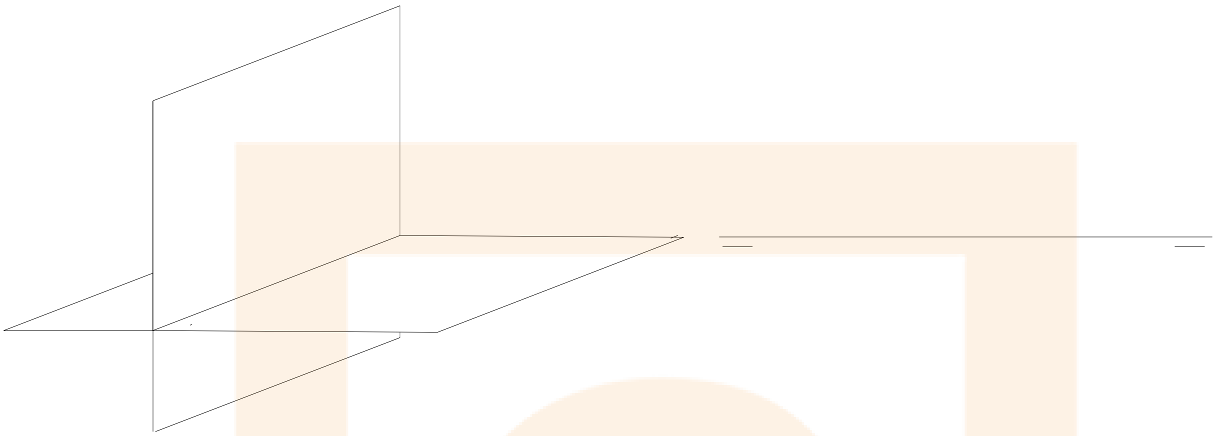


Rectas horizontal y frontal (fig. 25)

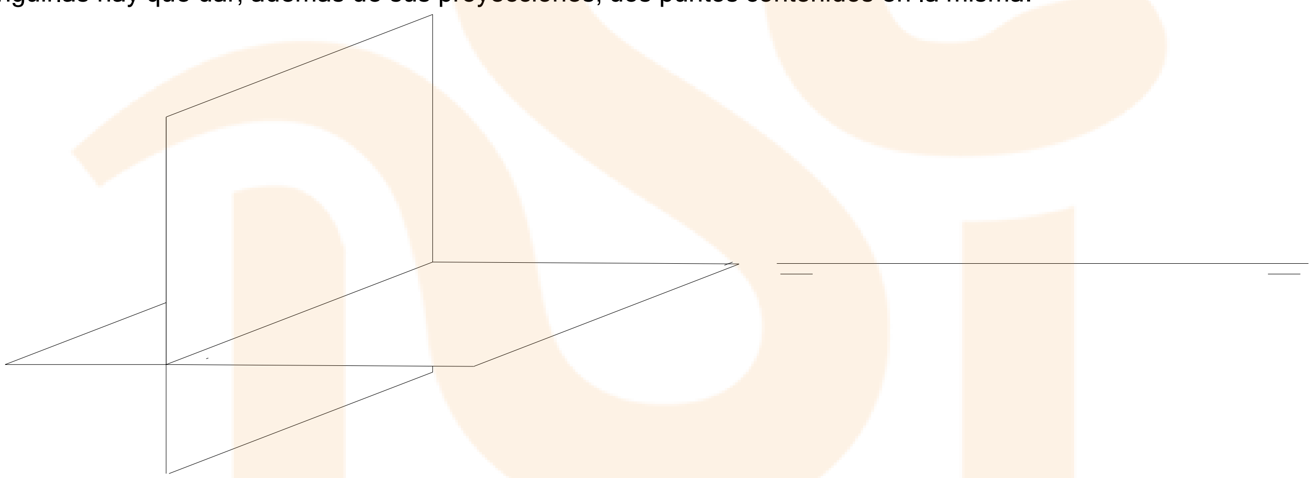
Recta horizontal **r** es aquella recta paralela al plano horizontal; su proyección vertical $\mathbf{r_2}$ es paralela a la línea de tierra. Recta frontal **s** es aquella recta paralela al plano vertical; su proyección horizontal $\mathbf{s_1}$ es paralela a la línea de tierra.



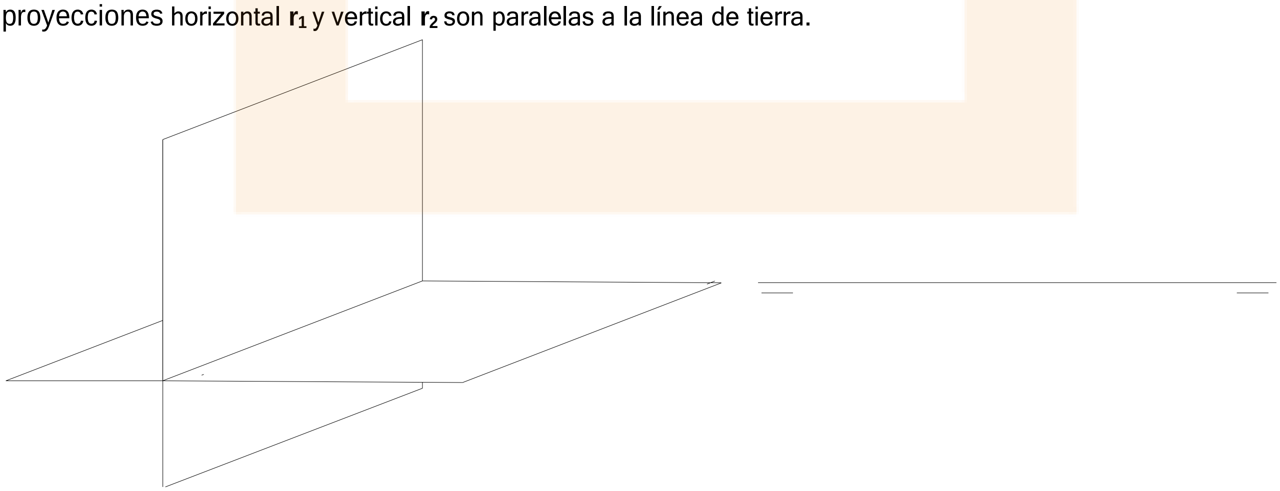
Rectas vertical y de punta (fig. 26)
Recta vertical **r** es aquella recta perpendicular al plano horizontal; su proyección horizontal $\mathbf{r_1}$ es un punto y su proyección vertical $\mathbf{r_2}$ es perpendicular a la línea de tierra.
Recta de punta **s** es aquella recta perpendicular al plano vertical; su proyección vertical **r2** es un punto y su proyección horizontal $\mathbf{s_1}$ es perpendicular a la línea de tierra.



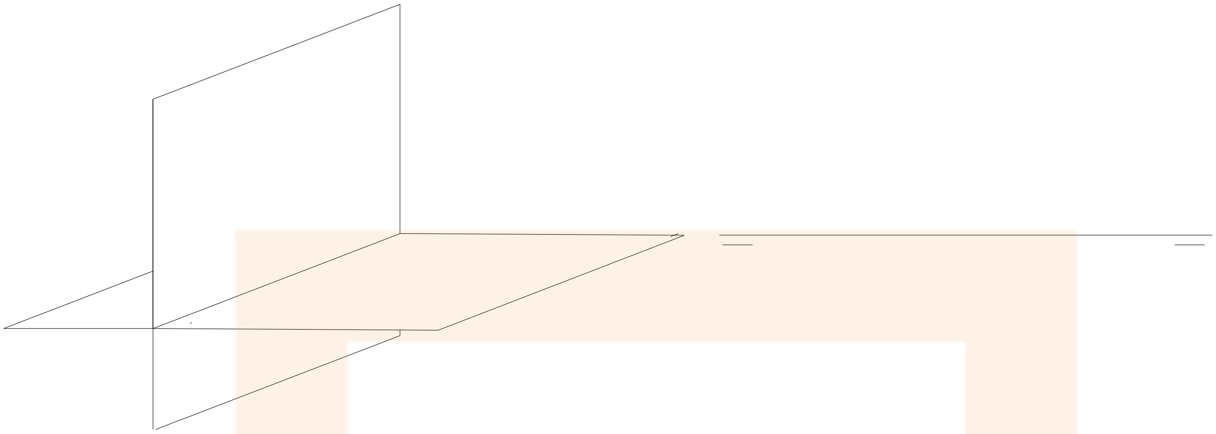
Recta de perfil (fig. 27)
Como se verá un poco más adelante, un plano de perfil es aquel que es perpendicular a los dos planos de proyección.
Se define la recta de perfil como la recta que está contenida en un plano de perfil. Las dos proyecciones de la recta son perpendiculares a la línea de tierra. Por tanto, como todas las rectas de perfil tienen la misma representación, para distinguirlas hay que dar, además de sus proyecciones, dos puntos contenidos en la misma.



Recta paralela a la línea de tierra (fig. 28)
Las proyecciones horizontal $\mathbf{r_1}$ y vertical $\mathbf{r_2}$ son paralelas a la línea de tierra.

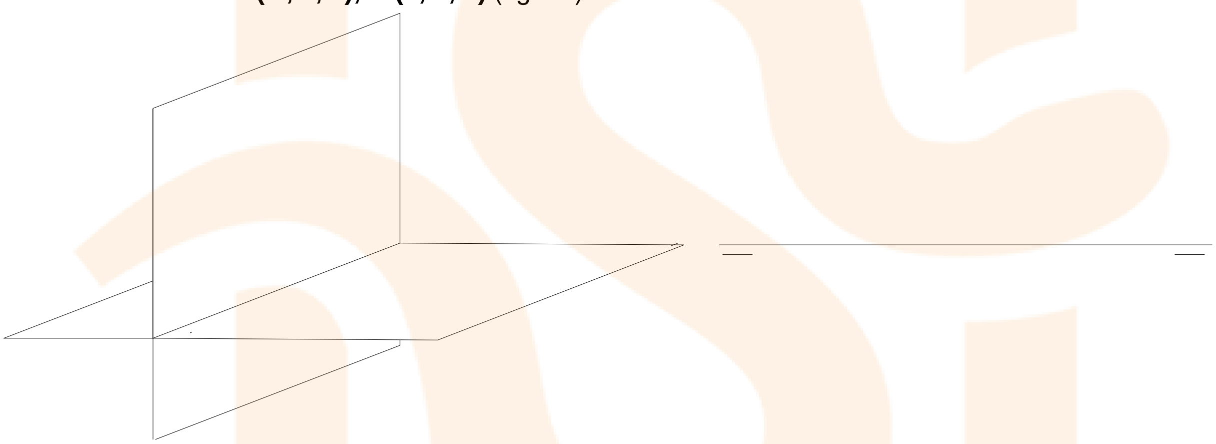


Recta que corta a la línea de tierra (fig. 29)
Las dos proyecciones r_1 y r_2 de la recta se cortan en la línea de tierra.



REPRESENTACiÓN DE LA RECTA POR COORDENADAS

La recta queda determinada por dos de sus puntos.
Ejemplo:
Representar la recta ***r: M* (O, 4, 1), *N* (6, 1, 3)** (fig. 30).

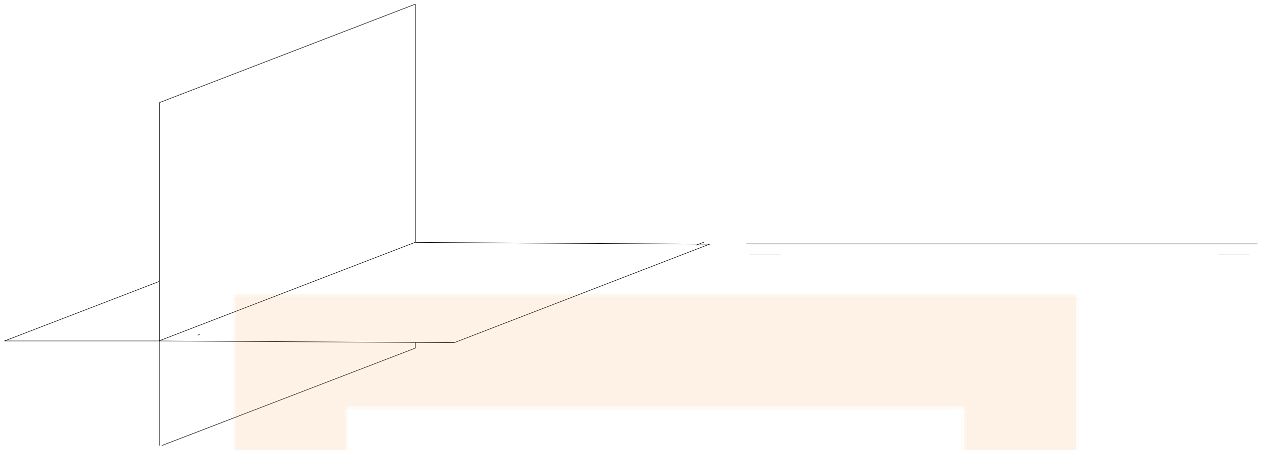


EL PLANO

LA REPRESENTACiÓN DEL PLANO

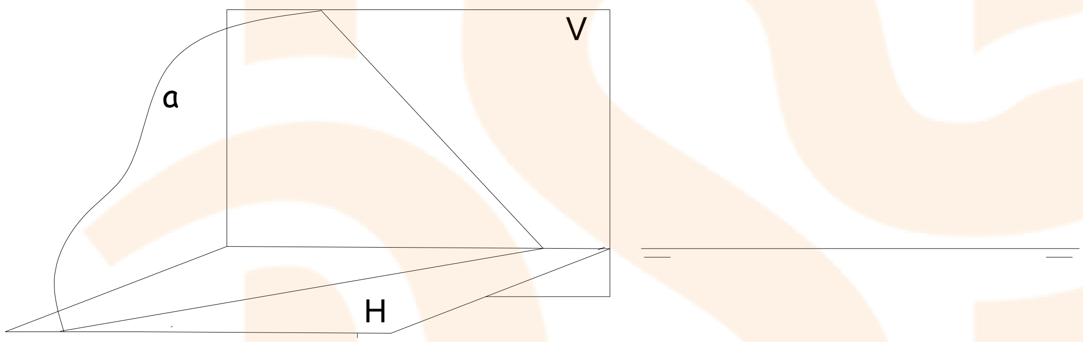
Los planos no pueden representarse como los puntos y las rectas, mediante sus proyecciones, pues si proyectáramos todos los puntos de un plano sobre el plano horizontal o el vertical no obtendríamos nada. Suponiendo el plano vertical como nuestra hoja de papel (fig. 34):

1 Las intersecciones del plano **α** con los planos de proyección son las rectas α_1 y α_2.
2 Se abate el plano horizontal sobre el vertical como se ha hecho con el punto y con la recta.
3 Si ahora el plano horizontal se coloca de frente, se verá la línea de tierra y las dos rectas de intersección
a_1 y a_2 como en la figura 34b.
Por tanto:
α_1 **Traza horizontal del plano**: es la intersección con el plano horizontal.
α_2 **Traza vertical del plano**: es la intersección con el plano vertical.
Las dos trazas de un plano se cortan siempre en un punto de la línea de tierra.
La *traza horizontal* es una recta que se encuentra en el plano horizontal y por tanto, tal como se ha visto anteriormente, su proyección horizontal coincide con la propia recta y su proyección vertical está en la línea de tierra. Para simplificar la notación, y por lo general, escribiremos simplemente α_1
La *traza vertical* es una recta del plano vertical y por tanto su proyección vertical coincide con la propia recta y su proyección horizontal está en la línea de tierra. Para simplificar la notación escribiremos α_2

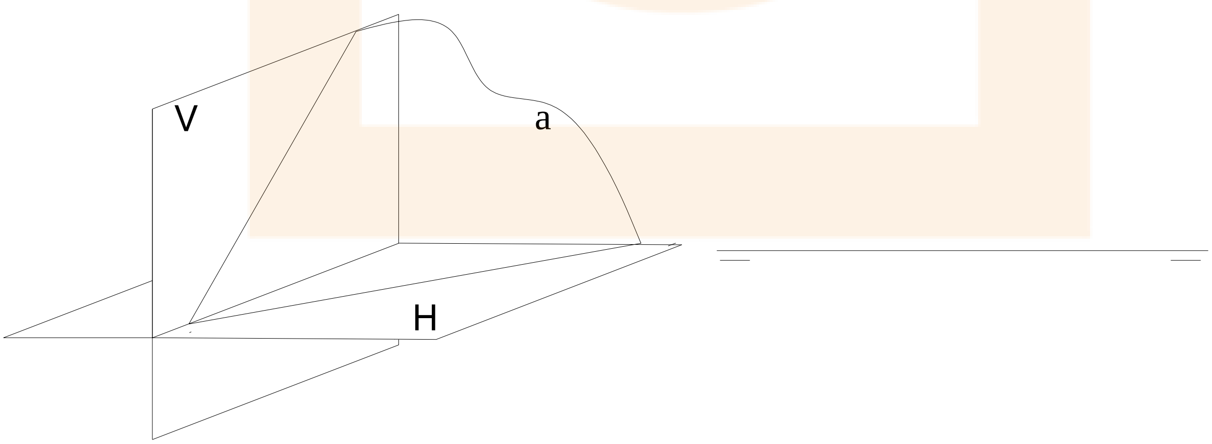


RECTAS CONTENIDAS EN UN PLANO

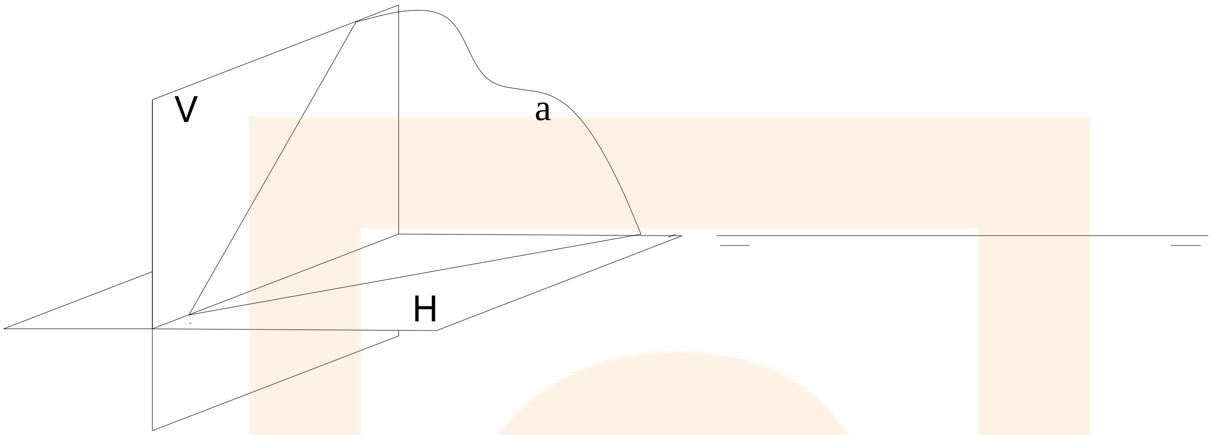
Dado un plano **α** (fig. 35), para que una recta **r** pertenezca a dicho plano, la traza horizontal ***H_r*** de la recta debe estar en la traza horizontal α_1 del plano y la traza vertical ***Vr*** de la recta debe estar en la traza vertical **α_2** del plano.
Para que un punto ***P*** pertenezca a un plano se podrá pasar por él una recta **r** que pertenezca a dicho plano, es decir, que cumpla las condiciones anteriores.



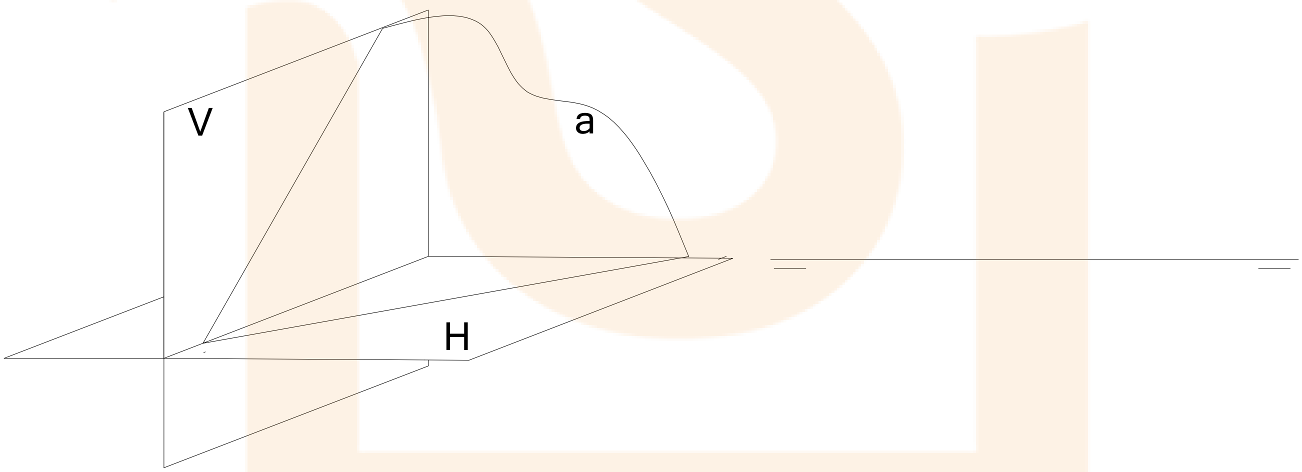
Recta horizontal del plano (fig. 36)
Es una recta que, perteneciendo al plano, es paralela al plano horizontal.
La proyección horizontal **r_1** de la recta es paralela a la traza horizontal **α** $_1$ del plano y la proyección vertical **r_2** de la recta es paralela a la línea de tierra.



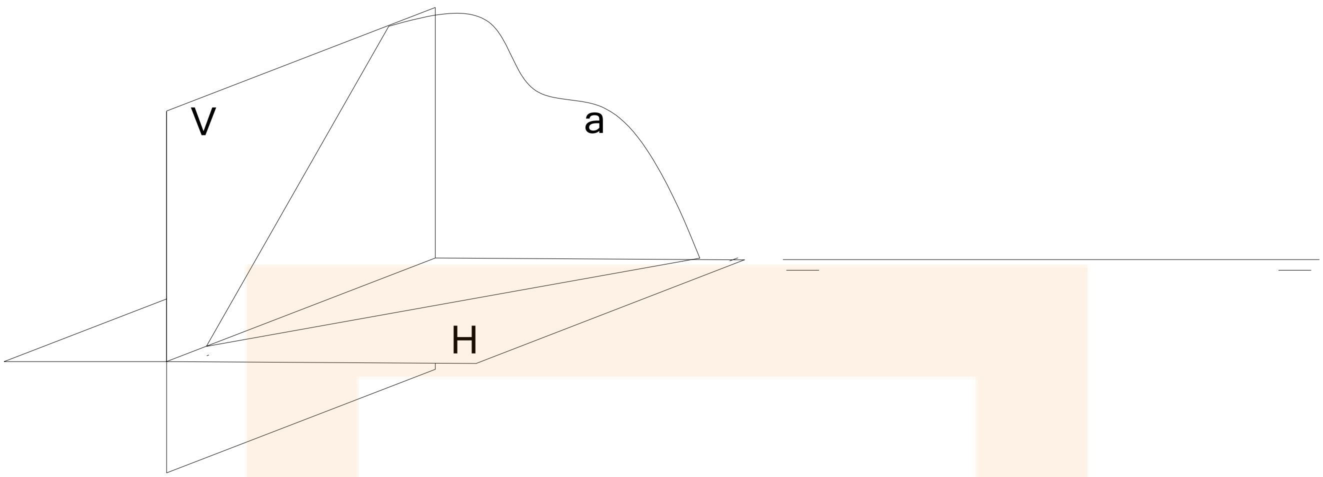
Recta frontal del plano (fig. 37)
Es una recta que, perteneciendo al plano, es paralela al plano vertical.
La proyección horizontal $\mathbf{r_1}$ de la recta es paralela a la línea de tierra, y la proyección vertical $\mathbf{r_2}$ de la recta es paralela a la traza vertical $\boldsymbol{\alpha}_2$ del plano.



Recta de máxima pendiente (fig. 38)
Es una recta que, perteneciendo al plano, forma el máximo ángulo posible $\boldsymbol{\varphi}$ con el plano horizontal.
La proyección horizontal $\mathbf{r_1}$ de la recta es perpendicular a la traza horizontal $\boldsymbol{\alpha}$ ***1*** del plano.

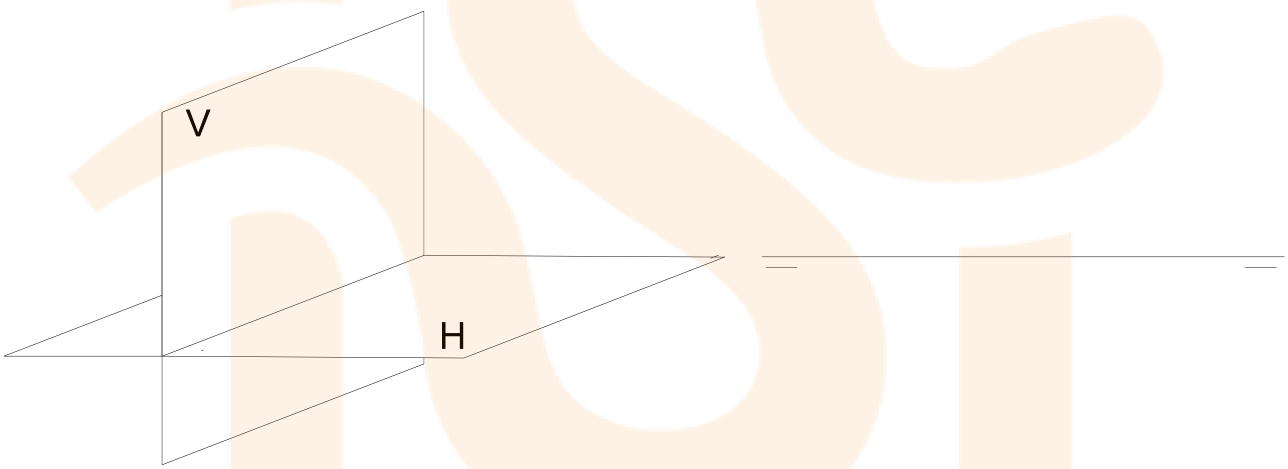


Recta de máxima inclinación (fig. 39)
Es una recta que, perteneciendo al plano, forma el máximo ángulo posible $\boldsymbol{\varphi}$ con el plano vertical.
La proyección vertical $\mathbf{r_2}$ de la recta es perpendicular a la traza vertical $\boldsymbol{\alpha_2}$ del plano.

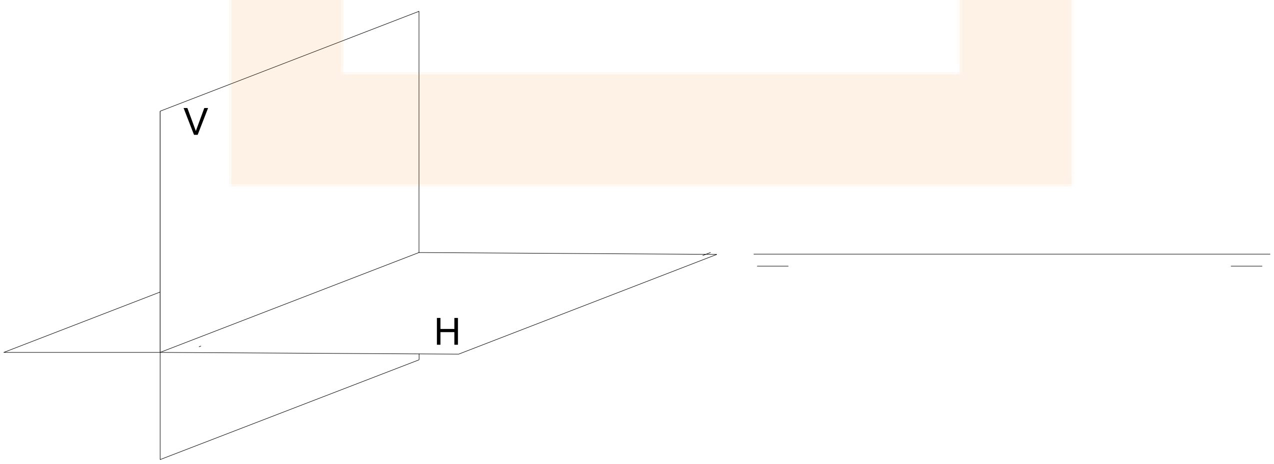


POSICIONES DEL PLANO

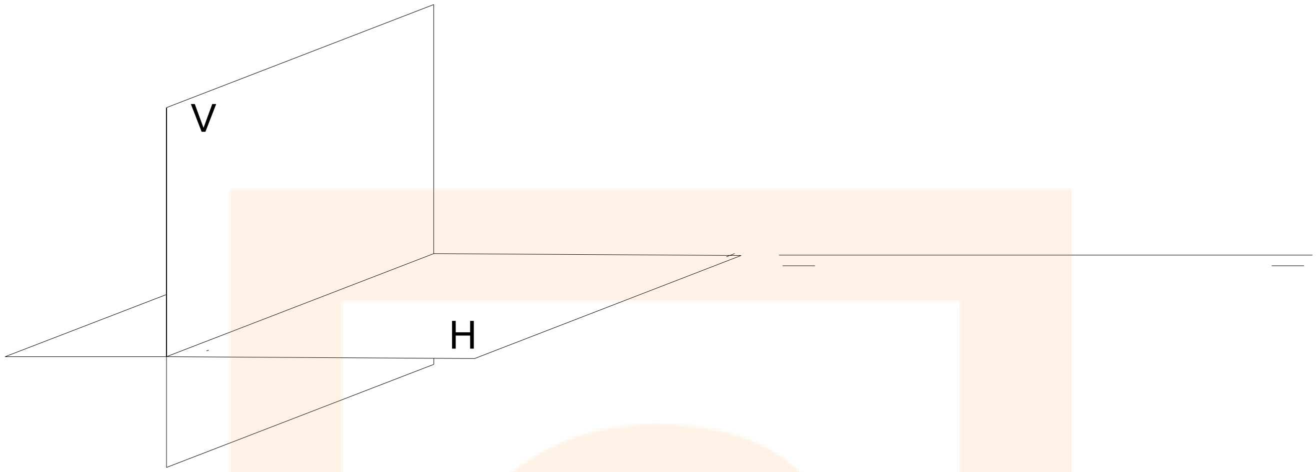
Plano proyectante horizontal (fig. 40)
Plano proyectante horizontal **α** es aquel que es perpendicular al plano horizontal; la traza vertical **α_2** del plano es perpendicular a la línea de tierra.



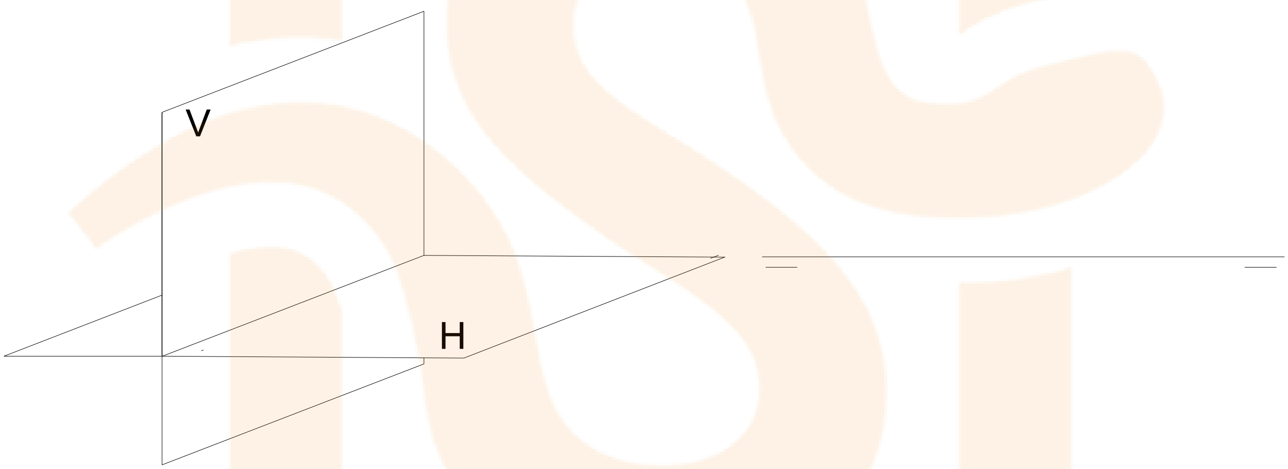
Plano proyectante vertical (fig. 41)
Plano proyectante vertical **α** es aquel que es perpendicular al plano vertical; la traza horizontal **α_1** del plano es perpendicular a la línea de tierra.



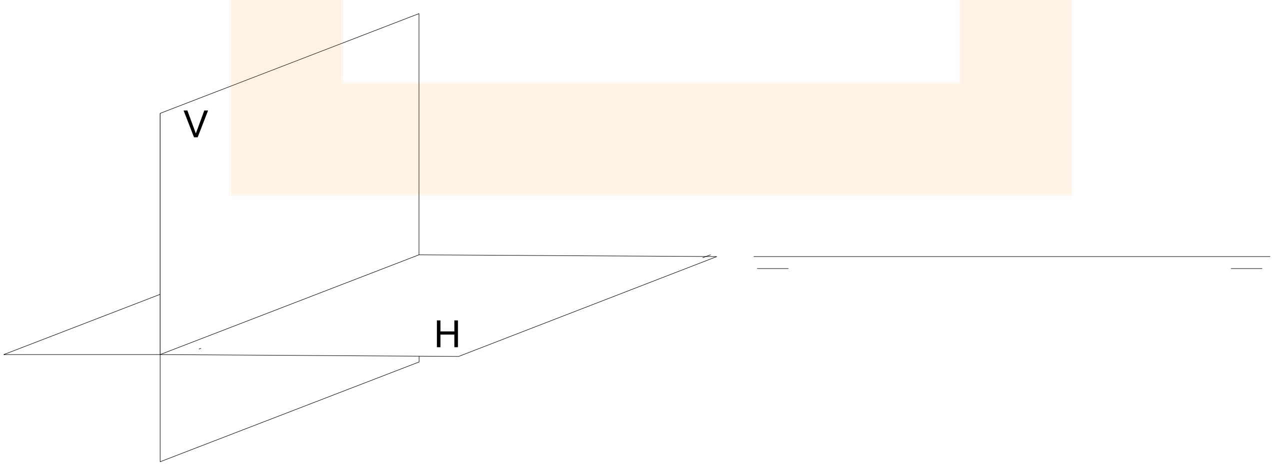
Plano de perfil (fig. 42)
Plano de perfil **α** es aquel que es perpendicular a los dos planos de proyección; las trazas horizontal $\boldsymbol{\alpha_1}$ y vertical $\boldsymbol{\alpha_2}$ del plano son perpendiculares a la línea de tierra.



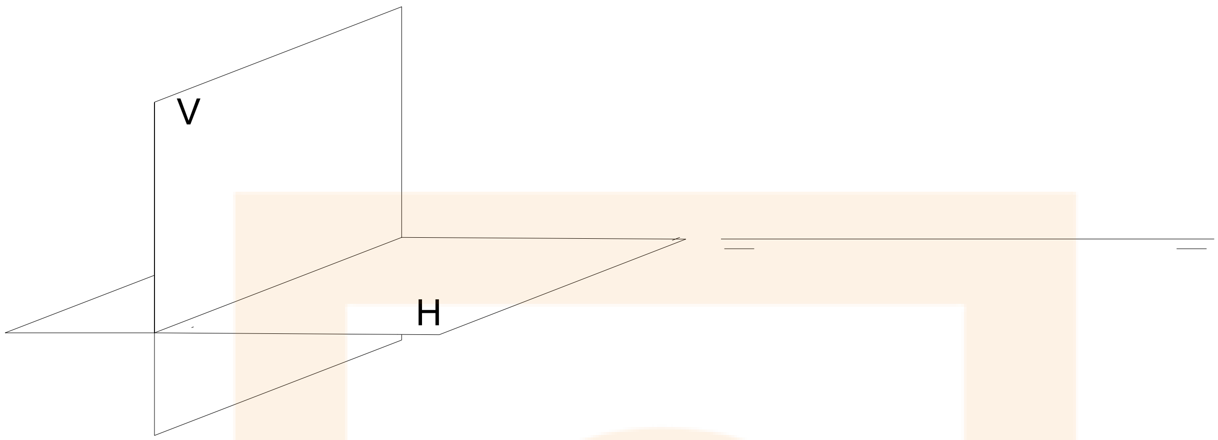
Plano horizontal (fig. 43)
Plano horizontal **α** es aquel que es paralelo al plano
horizontal; la traza vertical $\boldsymbol{\alpha}_{2}$ del plano es paralela a la línea de tierra y la traza horizontal está en el infinito.



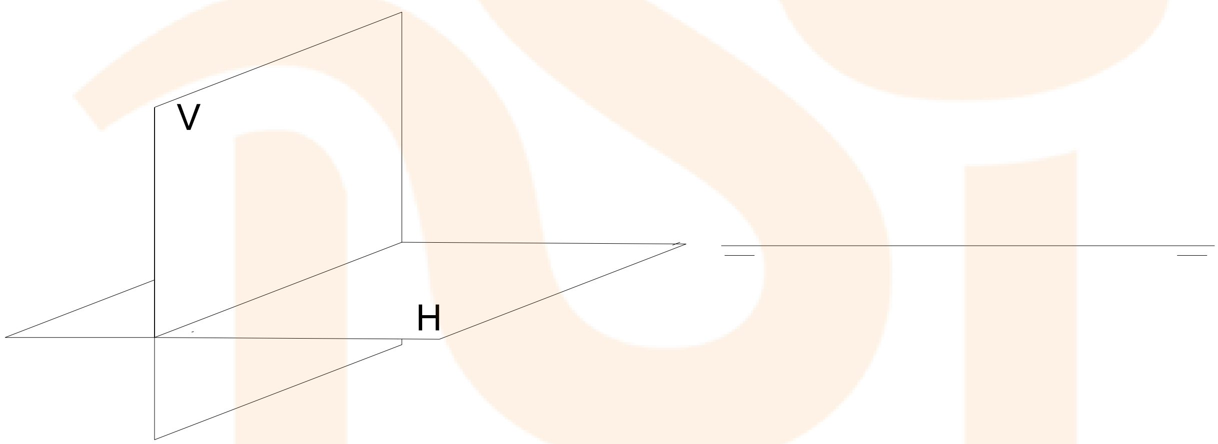
Plano vertical (fig. 44)
Plano vertical **α** es aquel que es paralelo al plano vertical; la traza horizontal $\boldsymbol{\alpha}_{1}$ del plano es paralela a la línea de tierra y la traza vertical está en el infinito.



Plano paralelo a la línea de tierra (fig. 45)
Es aquel plano α que es paralelo a la línea de tierra; las trazas horizontal α_1 Y vertical α_2 del plano son paralelas a la línea de tierra.

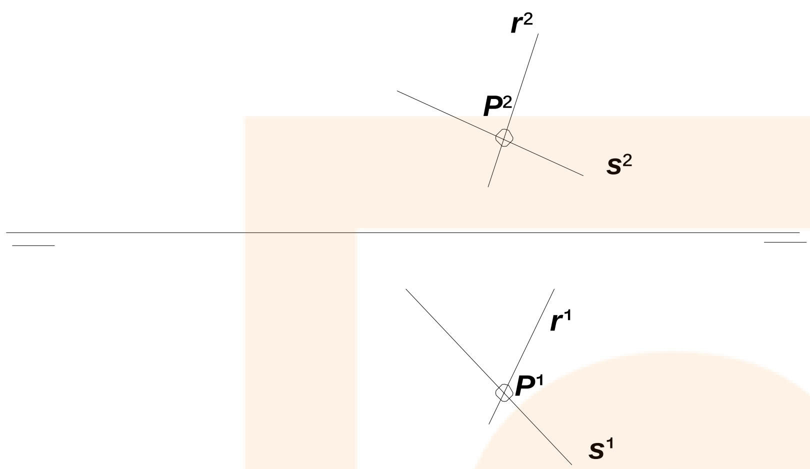


Plano que contiene a la línea de tierra (fig. 46)
Es aquel plano *a* que pasa por la línea de tierra; las dos trazas α_1 y α_2 se confunden con la línea de tierra. Cualquier otro plano β, que pasa por la línea de tierra, tiene la misma representación que α por tener sus trazas β_1 y β_2 en la línea de tierra; por tanto, para distinguir estos planos entre sí, además de sus trazas hay que dar las proyecciones de un punto que pertenece a cada uno de ellos.

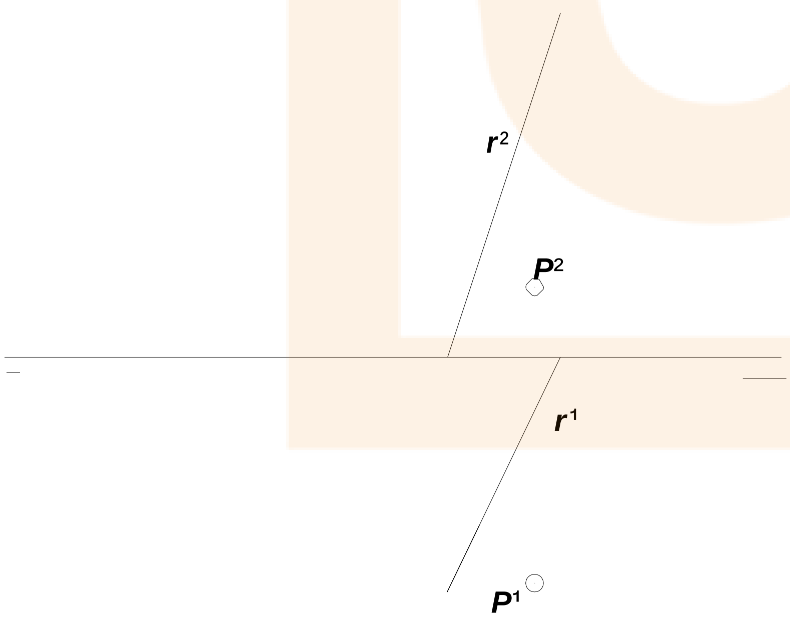


PLANO DEFINIDO POR DOS RECTAS QUE SE CORTAN

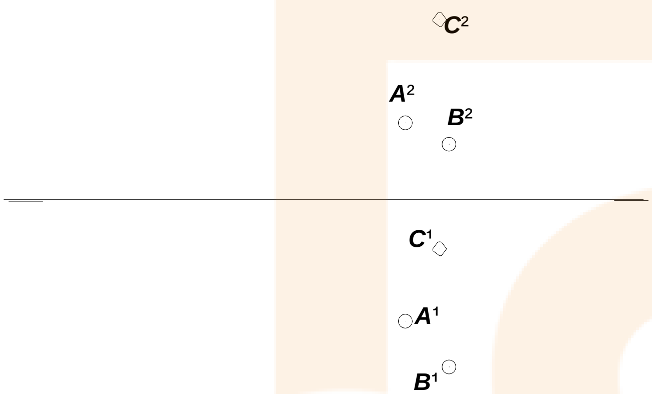
Las dos rectas ***r*** y **s** se cortan porque tienen un punto ***P*** común que pertenece a ambas; si las dos rectas no se cortasen, las intersecciones de sus proyecciones r_1-s_1 y r_2-s_2 no coincidirían en la misma perpendicular a la línea de tierra.
El plano α definido por ***r*** y **s** contiene a las dos rectas; por tanto, ambas deben cumplir la condición para que una recta pertenezca a un plano.
Dadas las rectas *r* y s que se cortan en el punto *P* (fig. 47):
1 Se hallan las trazas H_r y V_r de la recta ***r**.*
2 Se hallan las trazas H_s y V_s de la recta **s**.
3 La recta que une las dos trazas horizontales H_r y H_s de las rectas es la traza horizontal α_1 del plano *a* solicitado.
4 La recta que une las dos trazas verticales V_r y V_s de las rectas es la traza vertical α_2 del plano α.
Como comprobación, las dos trazas α_1 y α_2 se cortan en el mismo punto de la línea de tierra.



Trazar el plano definido por un punto y una recta.
Dado el punto ***P*** y la recta ***r*** (fig. 48):
1 Se elige un punto ***A*** arbitrario de la recta ***r****.*
2 Se unen los puntos ***A*** y ***P*** mediante la recta **s**.
3 Se procede como en el caso anterior, puesto que las rectas ***r*** y **s** se cortan en el punto ***A****.*

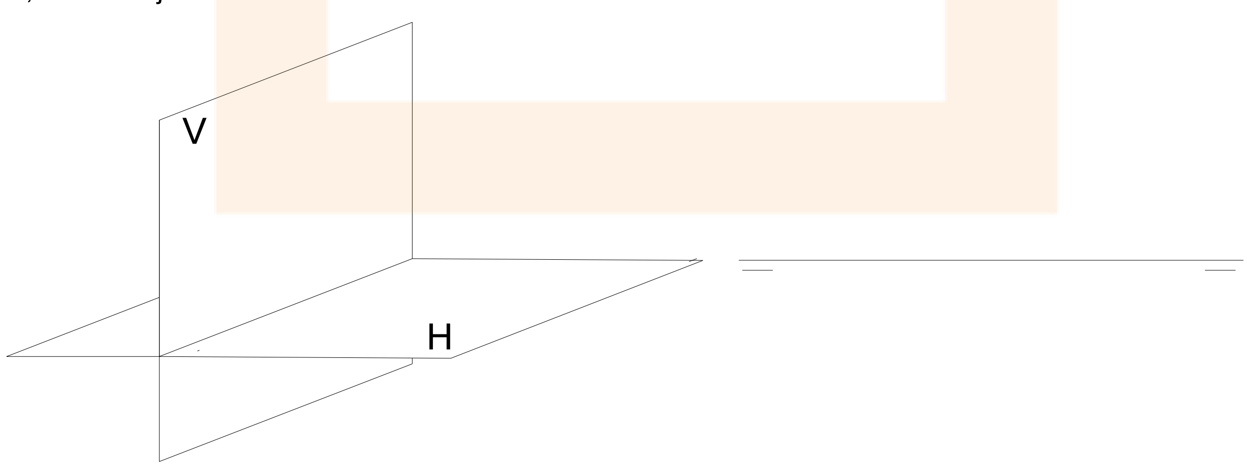


Trazar el plano definido por tres puntos.
Dados los puntos ***A,*** **B** y **C** (fig. 49):
1 Se unen dos puntos cualesquiera ***A*** y **B** mediante la recta **s.**
2 Se unen otros dos puntos arbitrarios ***A*** y ***C*** mediante la recta ***r****.*
3 Se procede como en el primer caso, puesto que las rectas ***r*** y **s** se cortan en el punto ***A****.*
El resultado hubiese sido el mismo si se hubiesen unido los puntos **B** y **C**; esta tercera recta puede servir de comprobación.

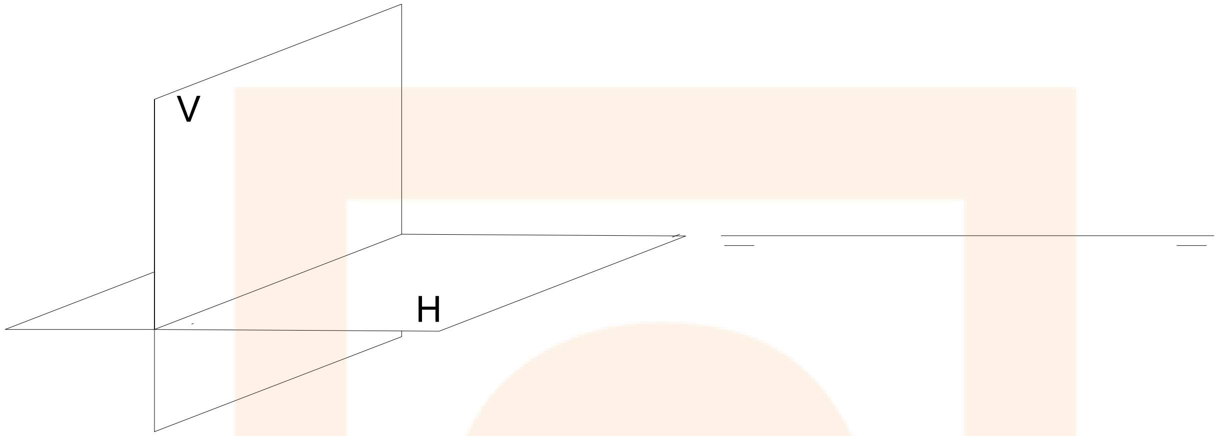


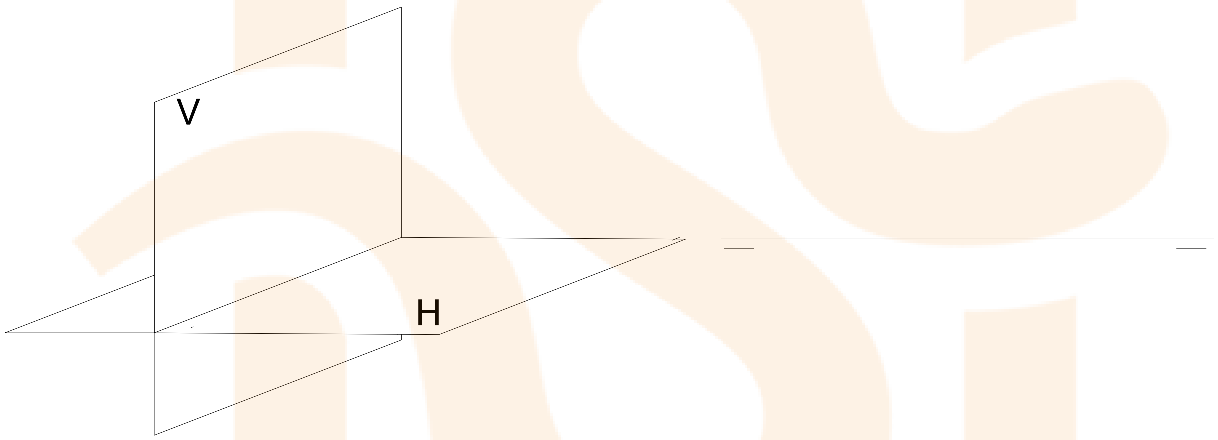
REPRESENTACiÓN DEL PLANO POR COORDENADAS

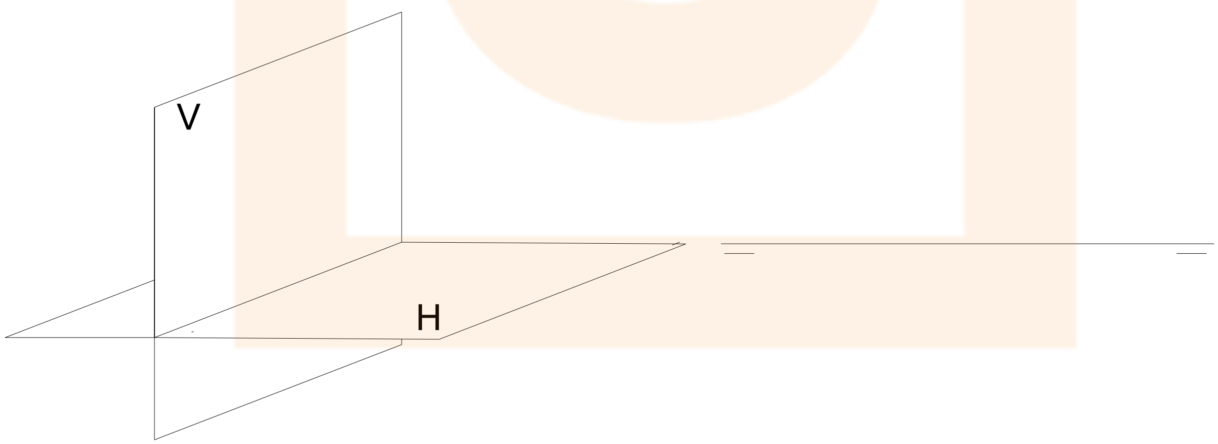
Como en el caso del punto, en la determinación del plano intervienen tres coordenadas **α** *(x,y,z)* , pero su significado es distinto (fig. 50):
x Distancia del origen al vértice del plano.
Si es +, el vértice está a la derecha del origen. Si es -, el vértice está a la izquierda del origen.
y Alejamiento de la traza horizontal α_1 en el origen.
Si es +, está debajo de *LT*
Si es -, está encima de *LT*
z Cota de la traza vertical α_2 en el origen.
Si es +, está encima de *LT*
Si es -, está debajo de *LT*



Ejemplos
Representar los siguientes planos (figs. 51-52-53):
α *(3,* 2, 3), **β** (-3, -3, 2) y γ *(-4,* 3, ∞).







TERCERA PROYECCIÓN

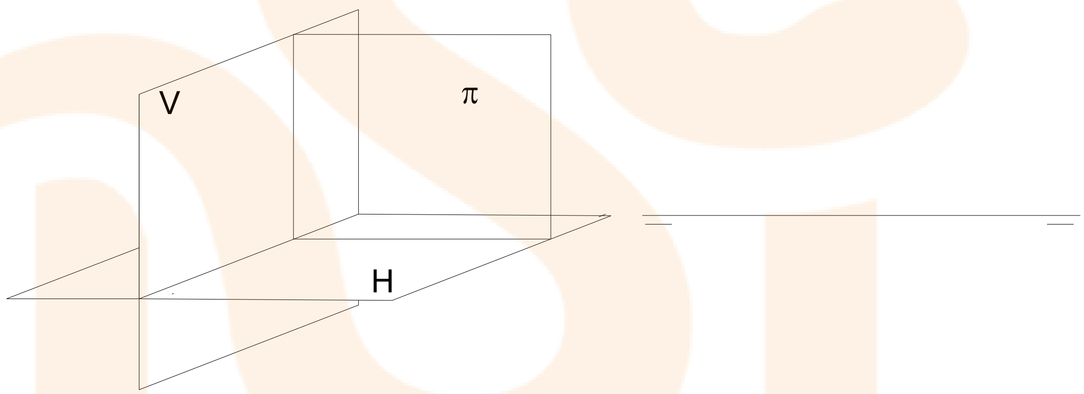
Para las representaciones en tercera proyección, además del plano horizontal y del vertical se necesita un tercer plano π de proyección, que es siempre de perfil.

REPRESENTACIÓN DE UN PUNTO

Dado un punto ***A*** cualquiera del espacio, se elige un plano de perfil π arbitrario y se proyecta el punto sobre él, abatiendo a continuación el plano π sobre el vertical. En diédrico, dado un punto ***A****,* y sus dos proyecciones A_1 y A_2 (fig. 60):

1 Se traza un plano de perfil π_1 cualquiera.
2 Por la proyección vertical A_2 se traza la paralela a la línea de tierra, dejándola indefinida.
3 Por la proyección horizontal A_1 se traza otra paralela a la línea de tierra, hasta cortar a la traza horizontal π_1 en **A'**.
4 Haciendo centro en el vértice **O** del plano π y radio ***OA'****,* se describe un arco hasta cortar a la línea de tierra en ***A".***
5 Por ***A"*** se traza la perpendicular a la línea de tierra hasta cortar a la horizontal trazada por A_2 en A_3**,**
tercera proyección del punto.

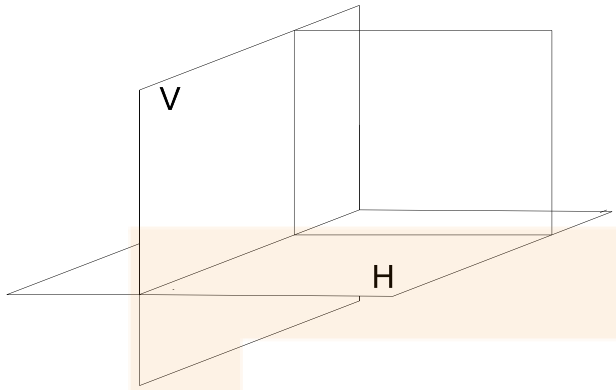
La tercera proyección de un punto sobre un plano de perfil es la vista de perfil que tiene un observador situado a la izquierda del sistema representado en la figura; por tanto, si se considera en diédrico a π_2 como si fuera el plano vertical visto de canto y la línea de tierra el plano horizontal visto también de canto, se observa que la distancia que hay desde A_3 a la línea de tierra es la cota del punto y que la distancia que hay desde A_3 hasta π_2 es el alejamiento del mismo.



REPRESENTACIÓN DE LA RECTA.

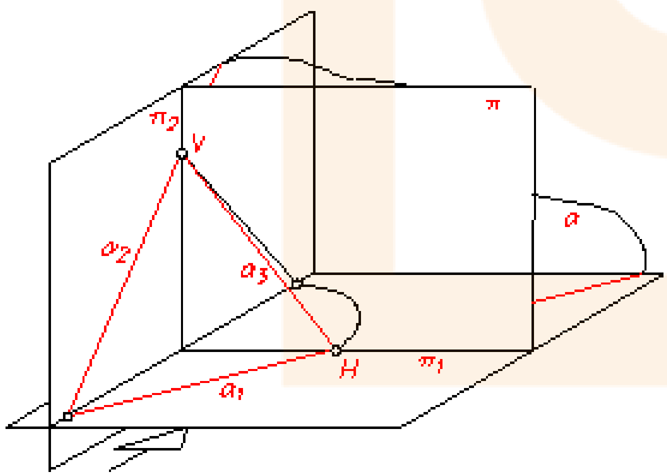
Dada una recta **r** cualquiera en el espacio, se elige un plano de perfil π arbitrario y se proyecta la recta sobre él, abatiendo a continuación el plano *re* sobre el vertical. En diédrico, dada una recta ***r****,* y sus dos proyecciones r_1 y r_2 (fig. 62):

1 Se traza un plano de perfil π cualquiera.
2 Se eligen dos puntos cualesquiera ***A*** y **B** Y se halla su tercera proyección A_3 y B_3, tal como se ha explicado en el punto anterior.
Si en vez de elegir dos puntos arbitrarios se eligen su traza horizontal H_r y su traza vertical V_r , el resultado es el mismo y se consigue una cierta simplificación.
3 Al unir las dos proyecciones A_3 y B_3 o bien la tercera proyección de sus trazas, H_{r3} y V_{r3} , según sea el caso, se obtiene la tercera proyección **r**3 de la recta ***r.***
La tercera proyección de una recta resulta útil en casos donde intervienen rectas de perfil. Por ejemplo, una aplicación inmediata de la tercera proyección es la de hallar las trazas de una recta de perfil dada por dos puntos.



REPRESENTACIÓN DEL PLANO

Dado un plano **α** cualquiera en el espacio, se elige un plano de perfil π cualquiera *y* se halla la intersección de ambos planos, abatiendo a continuación el plano π sobre el plano vertical.
En diédrico, dado un plano **α**, y sus dos trazas $\boldsymbol{\alpha_1}$ y $\boldsymbol{\alpha_2}$ (fig. 64):
1 Se traza un plano de perfil π cualquiera.
2 La intersección de las dos trazas verticales $\boldsymbol{\alpha_2}$ y π_2 es la traza vertical ***V*** de la recta de intersección.
3 La intersección de las dos trazas horizontales $\boldsymbol{\alpha_1}$ y π_1 es la traza horizontal ***H*** de la recta de intersección.
4 Haciendo centro en el punto **O** y con radio ***OH***, se describe un arco hasta cortar a la línea de tierra en **H".**
5 La recta que une ***H"*** con ***V*** es la tercera traza α_3 **del** plano **α**.
La tercera traza de un plano resulta muy útil en problemas donde intervienen planos paralelos a la línea, de tierra, o planos que la contienen.

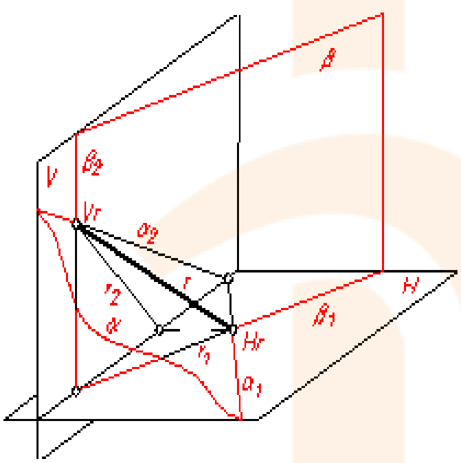


SISTEMA DIÉDRICO: INTERSECCIONES. PARALELISMOS. PERPENDICULARIDAD. DISTANCIA

INTERSECCIONES

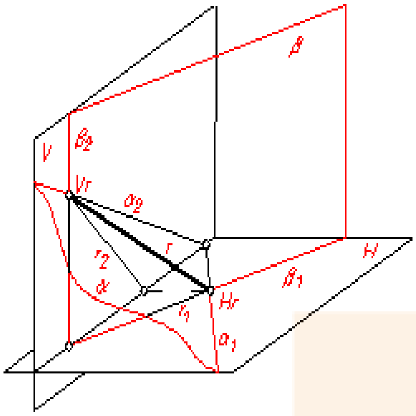
INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS CUALESQUIERA

La Intersección de dos planos siempre es una recta. La recta de intersección pertenece a los dos planos y por ello debe cumplir con cada uno las condiciones para que una recta pertenezca a un plano, es decir, las trazas de la recta deben estar en las trazas homónimas de cada uno de los planos, por tanto:
Dados los planos **α(α1-α2)** y **β(β1-β2*)***:
1 La intersección de las trazas horizontales **α_1 y β_2** determinan la traza horizontal ***H**,* de la recta **r** de intersección.
2 La intersección de las trazas verticales ***α1 y*** **β_2** determinan la traza vertical *V,* de la recta**.**
3 Se une la proyección horizontal ***V_{r1}*** de la traza vertical ***V_r*** con la traza horizontal ***H_r*** obteniendo así la proyección horizontal ***r_1*** de la recta.
4 Se une la proyección vertical ***H_{r2}*** de la traza horizontal ***H_r,*** con la traza vertical ***V_r*** hallando la proyección vertical ***r_2*** de la recta.



INTERSECCiÓN DE UN PLANO CUALQUIERA CON OTRO PROYECTANTE

El proceso a seguir es el mismo que en el caso anterior. Lo único a tener en cuenta en este caso es que la proyección horizontal de cualquier elemento situado en un plano proyectante horizontal se encuentra en la traza horizontal de dicho plano (fig. 2a), y viceversa, la proyección vertical de cualquier elemento que se encuentre en un plano proyectante vertical está en la traza vertical del plano.
Dados los planos **α(α_1-α_2*)*** y ***β(β1-β2)*** :
1 La intersección de las trazas horizontales **α_1** y **β_2** determinan la traza horizontal ***Hr*** de la recta ***r,*** y la intersección de las trazas verticales **α2** y **β2** definen la traza vertical ***Vr****.*
2 La proyección horizontal **r_1** se halla trazando por ***Vr*** la perpendicular a la línea de tierra y uniendo dicho punto con la traza horizontal ***Hr****.* Véase que por ser **β** un plano proyectante horizontal, esta proyección **r_1** coincide con la traza horizontal **β_1** del plano.
3 La proyección vertical **r_2** se halla trazando por *Hr* la perpendicular a la línea de tierra y uniendo dicho punto con la traza vertical ***Vr*** de la recta.
El proceso hubiera sido semejante si el plano **β** hubiese sido proyectante vertical.



INTERSECCIÓN DE UN PLANO CUALQUIERA CON OTRO PARALELO A LOS DE PROYECCIÓN

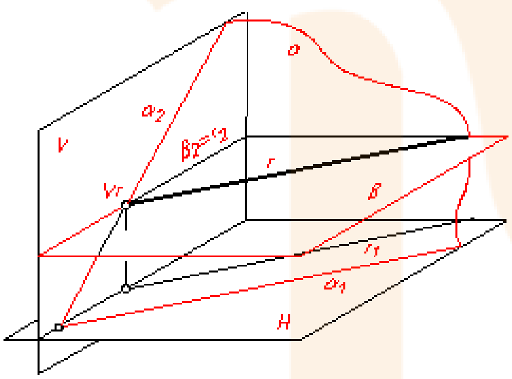
En este caso la recta de intersección, además de pertenecer al plano oblicuo (fig. 3a), es paralela al plano horizontal, es decir, se trata de una recta horizontal del plano que, como ya se estudió en el tema anterior, tiene su proyección horizontal paralela a la traza horizontal del plano y su proyección vertical paralela a la línea de tierra.

Dados los planos **$\alpha(\alpha 1\text{-}\alpha 2)$** y **$\beta(\beta 1\text{-}\beta 2)$**:

1 La intersección de las trazas verticales α_2 y β_2 de los planos define la traza vertical ***Vr*** de la recta de intersección.

2 La proyección horizontal **r_1** halla trazando por ***Vr*** la perpendicular a la línea de tierra y dibujando por dicho punto la paralela a la traza horizontal ***α_1*** del plano.

3 La proyección vertical **r2** halla trazando por ***Vr*** la paralela a la línea de tierra. El proceso hubiera sido semejante si el plano **β** hubiese sido paralelo al vertical.



INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS QUE PASAN POR EL MISMO PUNTO DE LA LíNEA DE TIERRA

Con frecuencia ocurren casos en los que no se puede disponer de la intersección de las trazas horizontales y de las trazas verticales de los dos planos. En el caso que nos ocupa sucede que los dos puntos de intersección coinciden en un mismo punto. Para solucionar estos problemas se acude a un tercer plano auxiliar (fig. 4a) que corta a los anteriores según dos rectas; estas, a su vez, se cortan en un punto perteneciente a los tres planos y, por tanto, a la recta de intersección de los dos planos dados.

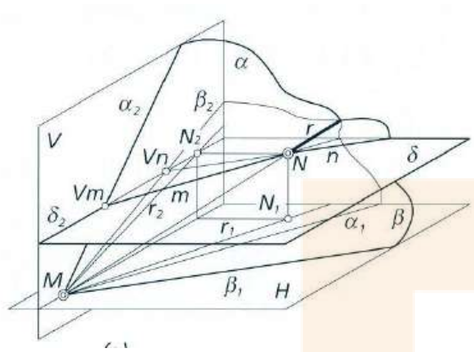
Dados los planos ***$\alpha(\alpha 1\text{-}\alpha 2)$*** y ***$\beta(\beta 1\text{-}\beta 2)$*** (fig. 4b):

1 Un punto de la intersección es el punto ***$M(M_1\text{-} M_2)$*** donde se cortan las trazas de los planos.

2 Para hallar otro punto, se traza un tercer plano auxiliar, en nuestro caso el plano horizontal $\zeta(\zeta_2)$.

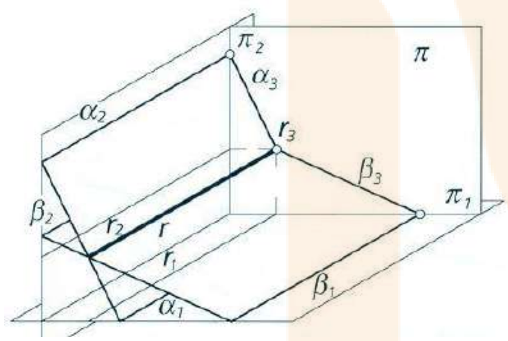
3 Se halla la recta ***m*** de intersección del plano **ζ** con el plano ***α***, que es una recta horizontal del plano *α.*

4 Se halla la recta ***n*** de intersección del plano **ζ** con el plano **β**, que es una recta horizontal del plano ***β****.*
5 Las rectas ***m*** y ***n*** se cortan en el punto ***N****;* uniendo los puntos ***M*** y ***N*** se obtiene la recta ***r****.*



INTERSECCiÓN DE DOS PLANOS PARALELOS A LA LíNEA DE TIERRA

Dos planos paralelos a la línea de tierra tienen sus trazas paralelas a ella y, por tanto, no se cortan; por esta razón no puede aplicarse el caso general visto anteriormente.
Para solucionar el problema se acude a un tercer plano auxiliar , en nuestro caso un plano de perfil, que corta a los anteriores según dos rectas que, a su vez, se cortan en un punto. Dado que la intersección de dos planos paralelos a la línea de tierra es una recta paralela a la línea de tierra, basta con el punto hallado para trazar la solución.
Dados los planos ***α(α1-α2)*** y ***β(β1-β2))***:
1 Se traza un plano ***π*** de perfil cualquiera.
2 Se hallan las terceras trazas $\boldsymbol{\alpha_3}$ **y** $\boldsymbol{\beta_3}$ de los dos planos dados.
3 La intersección de las trazas ***α3*** **y β3** determina la tercera proyección $\mathbf{r_3}$ de la recta (de intersección buscada.
4 Se hallan las proyecciones horizontal y vertical de la recta (que, como se ha dicho antes, es paralela a la línea de tierra y por tanto sus proyecciones r_1 y r_2 también.



INTERSECCiÓN DE RECTA Y PLANO

La intersección de una recta y un plano, salvo que sean paralelos entre sí, siempre es un punto. Para determinar dicho punto se sigue el siguiente proceso general:
En el espacio, dados el plano **α** y la recta **r**:
1 Se traza un plano **β** cualquiera que contenga a la recta ***r****.*
2 Se halla la recta **m** de intersección de los planos ***α*** y **β**
3 El punto ***P*** de intersección de las rectas **r** y **m** es el punto de intersección buscado.

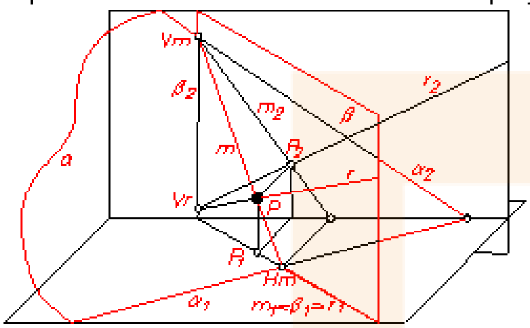
En diédrico, dados el plano ***α***$(\alpha_1$-$\alpha_2)$ y la recta ***r***$(r_1$-$r_2)$**:**
1 Se traza un plano cualquiera **β** que contenga a la recta ***r****.* Si el plano **β** se elige proyectante, las operaciones

se simplifican.

2 Se halla la recta m de intersección de los planos ***α*** y **β**, cuya proyección horizontal coincide con la traza horizontal del plano **β** por ser proyectante.

3 La proyección vertical ***P*₂** del punto de intersección se encuentra donde se cortan las proyecciones verticales **m_2** y **r_2'**

4 Como las proyecciones horizontales **m_1** y **r_1** coinciden, la proyección horizontal ***P_1*** se halla trazando la perpendicular a la línea de tierra desde la proyección vertical *P_2.*



INTERSECCIÓN DE TRES PLANOS

Dados tres planos ***α, β, y ζ***, pueden aplicarse dos procedimientos, os dejo la posibilidad de resolverlo por el que queráis:

a) Se halla la recta **r** de intersección de dos de los planos, por ejemplo el ***α*** y el **β**. Después se halla el punto ***P*** de intersección de la recta **r** con el tercer plano **ζ**.

b) Se halla la recta **r** de intersección de dos de los planos, por ejemplo el ***α*** y el **β**; a continuación se halla la rectas de intersección de otros dos planos, por ejemplo el **α** y el **β**. El punto ***P*** de intersección de las rectas **r** y **s** es el de intersección de los tres planos.

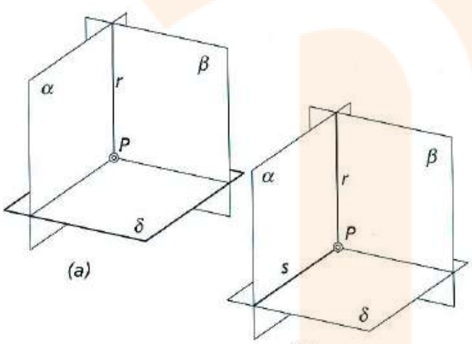
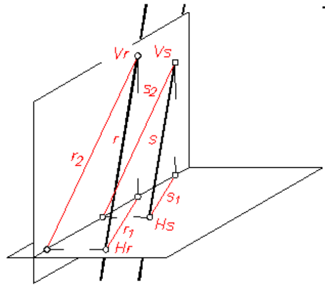


FIG. 7

paralelismo.

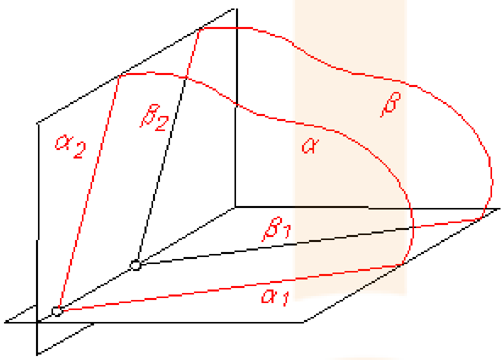
PARALELISMO ENTRE RECTAS

En diédrico, la condición para que dos rectas *r* y *s* sean paralelas es que sus proyecciones homónimas ***r_1*-*s_1*** y ***r_2*-*s_2*** sean paralelas entre sí, excepto las rectas de perfil que, además, deben ser paralelas sus terceras proyecciones.



PARALELISMO ENTRE PLANOS

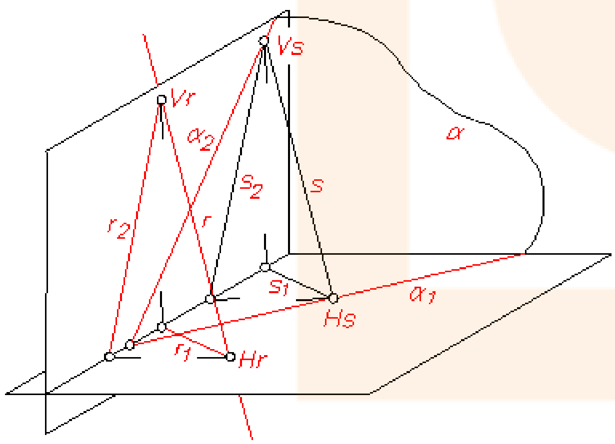
En diédrico, la condición para que dos planos α y β sean paralelos es que sus trazas homónimas α_1-β_1 y α_2-β_2 sean paralelas entre sí, excepto los planos paralelos a la línea de tierra que, además, deben ser paralelas sus terceras trazas.



PARALELISMO ENTRE RECTA Y PLANO

Una recta ***r*** es paralela a un plano ***α*** si en este existe al menos una recta ***s*** paralela a ***r*** . Por tanto, en diédrico deberá poderse trazar una recta que esté contenida en el plano ***α*** (las trazas de la recta deben estar contenidas en las trazas homónimas del plano) y cumpla la condición de ser paralela a la recta *s* (sus proyecciones homónimas deben ser paralelas).

Fijaos que las proyecciones de la recta y las trazas del plano, en diédrico, no guardan relación alguna entre sí.



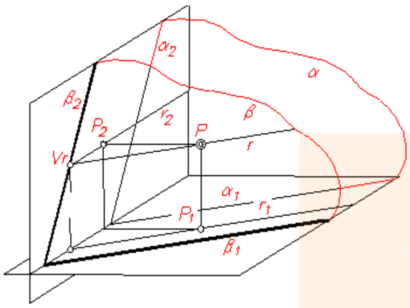
TRAZAR EL PLANO PARALELO A OTRO QUE CONTENGA A UN PUNTO

Dados el plano **α(α1-α2)** y el punto ***P(P1-P2)***:

1 Se traza una recta **r** que contenga al punto ***P*** de forma que dicha recta pertenezca al plano solución; para ello, se elige una recta horizontal de manera que su proyección horizontal $\mathbf{r_1}$ sea paralela a la traza horizontal

α_1 Y que, por tanto, será paralela también a la traza horizontal β_1 del plano que se busca, pues ambos deben tener sus trazas paralelas.

2 Por la traza vertical V_r de la recta (se dibuja la traza vertical β_2 paralela a la traza vertical α_2 del plano dado. 3 Por el vértice del plano (punto donde la traza vertical β_2 corta a la línea de tierra), se dibuja la traza horizontal β_1, paralela a la traza α_1



Perpendicularidad

En diédrico, al revés de lo que ocurre en paralelismo, dos rectas que son perpendiculares, o dos planos que son perpendiculares, no guardan relación especial entre sí; es decir, que si en diédrico se da el caso de que las proyecciones homónimas de dos rectas son perpendiculares, no significa que dichas rectas sean perpendiculares en el espacio; y si las trazas homónimas de dos planos son perpendiculares, tampoco significa que ambos planos sean perpendiculares.

PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTA Y PLANO

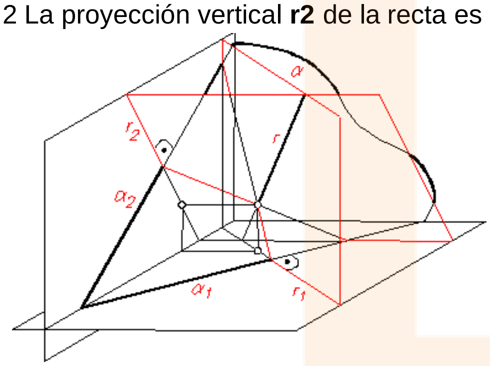
Si una recta r es perpendicular a un plano α, la proyección r_1 de la recta sobre otro plano π es perpendicular a la intersección de ambos planos.

En diédrico, si se considera que el plano π es el plano horizontal y después se considera que es el plano vertical, se obtienen las condiciones para que una recta y un plano sean perpendiculares.

Dados el plano $\alpha(\alpha 1\text{-}\alpha 2)$ y la recta **r(r1-r2):**

1 La proyección horizontal $\mathbf{r_1}$ de la recta es perpendicular a la traza horizontal **α1** del plano, y

2 La proyección vertical **r2** de la recta es perpendicular a la traza vertical α_2 del plano.



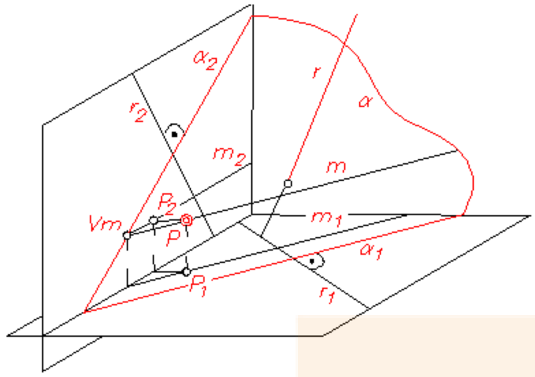
TRAZAR EL PLANO PERPENDICULAR A UNA RECTA Y QUE CONTENGA A UN PUNTO

Dados el punto ***P(P1-P2)*** Y la recta $\mathbf{r(r_1\text{-}r_2)}$ (fig. 22):

1 Por el punto ***P*** se traza una recta que pertenezca al plano solución; para ello, se elige una recta horizontal **m** cuya proyección horizontal $\mathbf{m_1}$ sea perpendicular a $\mathbf{r_1}$ Y que, por tanto, será paralela a la traza $\boldsymbol{\alpha_1}$ del plano que se busca (pues $\mathbf{r_1}$ y α_1) deben ser perpendiculares),

2 Se halla la traza vertical $\mathbf{V_m}$ y por este punto pasa la traza vertical α_2 perpendicular a $\mathbf{r_2}$

3 Por el vértice del plano (punto donde $\boldsymbol{\alpha_2}$ se corta con la línea de tierra) se dibuja la traza horizontal **α1** perpendicular a $\mathbf{r_1}$**.**



Distancias

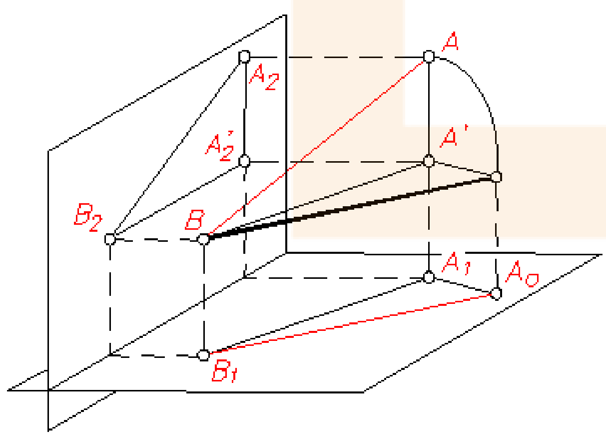
Cuando en diédrico se habla de distancias, se entiende que se trata de hallar la verdadera magnitud de la mínima distancia que existe entre dos elementos, es decir, lo que mide el segmento que los une.

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Si se tienen dos puntos ***A*** y **B** en el espacio, es evidente que la distancia que los separa no es la misma que la distancia que hay entre sus dos proyecciones horizontales A_1 y B_1, salvo que el segmento ***AB*** fuese paralelo al plano horizontal. Lo mismo ocurre con la proyección vertical del segmento.

El problema de resolver la distancia real entre los puntos ***A*** y **B** se soluciona trazando por uno de los dos puntos, el de menor cota por ejemplo, una recta paralela al plano de proyección . De esta forma se obtiene un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la distancia que se busca. Si a continuación se abate el triángulo alrededor del lado paralelo al plano de proyección, hasta colocarlo paralelo a este, la proyección del triángulo entonces estará en verdadera magnitud.

Sean los puntos ***A*** (A_1-A_2) y **B** (B_1-B_2):
1 Por la proyección vertical B_2 del punto **B** de menor cota se traza la paralela a la línea de tierra hasta cortar a la línea de referencia del punto ***A*** en A'_2.
2 Por la proyección horizontal A_1 del otro punto se traza la perpendicular a la proyección horizontal A_1B_1 del segmento.
3 Sobre la perpendicular anterior se lleva la diferencia de cotas $A_1A_o = A'_2A_2$ entre ambos puntos.
4 El valor A_oB_1 de la hipotenusa del triángulo obtenido es la verdadera magnitud de ***AB***.
También se puede tomar como cateto la proyección vertical A_2B_2 **siendo el otro** cateto la diferencia de alejamiento de los dos puntos.



DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO

Sean el punto ***P*** y el plano *α* :

1 Por el punto ***P*** se traza la recta ***r*** perpendicular al plano ***α****.*

2 Se halla el punto ***M*** de intersección de la recta ***r*** con el plano ***α****.*

3 Aplicando el procedimiento para hallar la distancia entre dos puntos, explicado anteriormente, se halla la distancia entre los puntos ***P*** y ***M****.*

No creo que exista dificultad para realizar en diédrico las operaciones mencionadas, pues son pasos ya estudiados.

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Dados el punto ***P*** y la recta ***r*** :

1 Por el punto ***P*** se traza el plano *α* perpendicular a la recta ***r****.*

2 Se halla el punto ***M*** de intersección de la recta ***r*** con el plano **α***.*

3 Aplicando el procedimiento para hallar la distancia entre dos puntos, se determina la distancia entre los puntos ***P*** y ***M****.*

DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS PARALELAS

Dadas las rectas ***r*** y **s**:

1 Se traza un plano ***α*** cualquiera perpendicular a las dos rectas ***r*** y **s.**

2 Se halla el punto ***M*** de intersección de la recta ***r*** con el plano ***a.***

3 Se halla el punto ***N*** de intersección de la recta **s** con el plano ***a.***

4 Aplicando el procedimiento para hallar la distancia entre dos puntos,. se determina la distancia entre los puntos ***M*** y ***N.***

DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS PARALELOS

Dados los planos *α* y **β** :

1 Se traza una recta ***r*** cualquiera perpendicular a losdos planos ***α*** y **β**

2 Se halla el punto ***M*** de intersección de la recta *r* con el plano ***α.***

3 Se halla el punto ***N*** de intersección de la recta *r* con el plano **β**.

4 Aplicando el procedimiento para hallar la distancia entre dos puntos, se determina la distancia entre los puntos ***M*** y ***N.***

NOTA>COMO VERAS HAY DOS RECUADROS PARA TRAZAR LOS DIBUJOS DE LAS PRESENTACIONES, EN ESTA OCASION, EL PRIMERO ES PARA HACER LOS TRAZADOS A MANO ALZADA DURANTE LAS CLASES Y, EL SEGUNDO **PARA REALIZARLOS CON LOS INSTRUMENTALES DE DIBUJO PERO YA EN CASA**

S. DIÉDRICO: ABATIMIENTOS, CAMBIOS DE PLANO Y GIROS

Abatimientos

GENERALIDADES
Abatir un plano sobre otro fijo es hacer coincidir el primero con este al girarlo alrededor de su recta de intersección. La recta de intersección, que se toma como eje de giro, se denomina *charnela.*

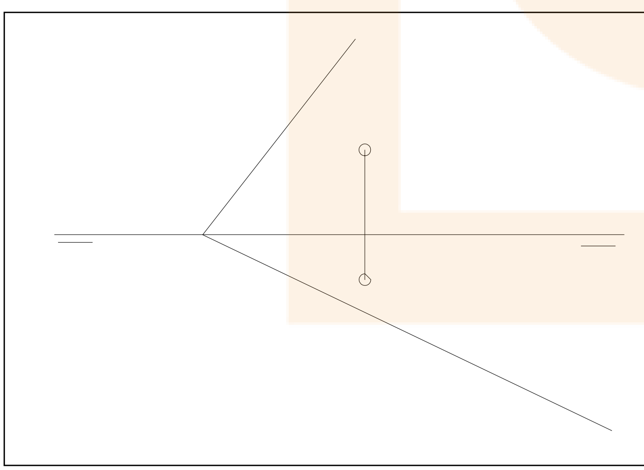
En diédrico,- si se abate un plano **α** sobre el plano horizontal, la charnela es su traza horizontal $\boldsymbol{\alpha_1}$, Si se abate sobre el plano vertical, la charnela es $\boldsymbol{\alpha_2}$. *Hay que tener en cuenta que cuando hablamos de abatir un punto una recta, lo que en realidad abatimos es el plano que contiene el elemento que queremos abatir.*

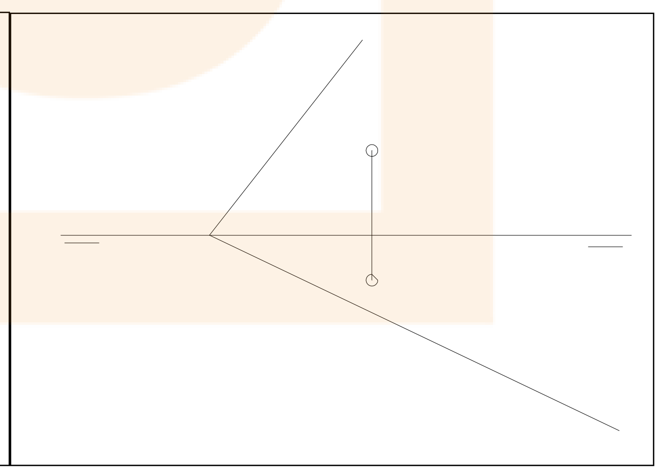
Para efectuar el abatimiento de un punto que se encuentre en un plano, se tendrá en cuenta que dicho punto describe alrededor de la charnela un arco de circunferencia situado en un plano *f3* perpendicular a la charnela.

Abatimiento sobre el plano horizontal
Dados el plano **α** y un punto ***A*** contenido en él.
En el espacio:

1 La proyección horizontal A_1 y el punto abatido A_0 se encuentran siempre en una recta perpendicular a la charnela α_1.
2 El radio del arco que describe el punto ***A*** es igual a la hipotenusa del triángulo rectángulo que se forma con el punto *A,* su proyección horizontal A_1 y el punto ***A'*** de intersección de la charnela con la perpendicular trazada por *A1.*
3 Se abate sobre el plano horizontal el triángulo AA_1A' en $A\ "A_1A'$; por tanto:
En diédrico:

1 Por a proyección horizontal A_1 del punto se trazan la paralela y la perpendicular a la charnela α_1.
2 Sobre la paralela, y a partir de A_1, se lleva unalongitud $A_1A"$ igual a la cota **c** del punto.
3 Con centro en ***A'*** y radio ***A'A"*** se describe un arco de circunferencia hasta cortar a la perpendicular en el punto A_0.

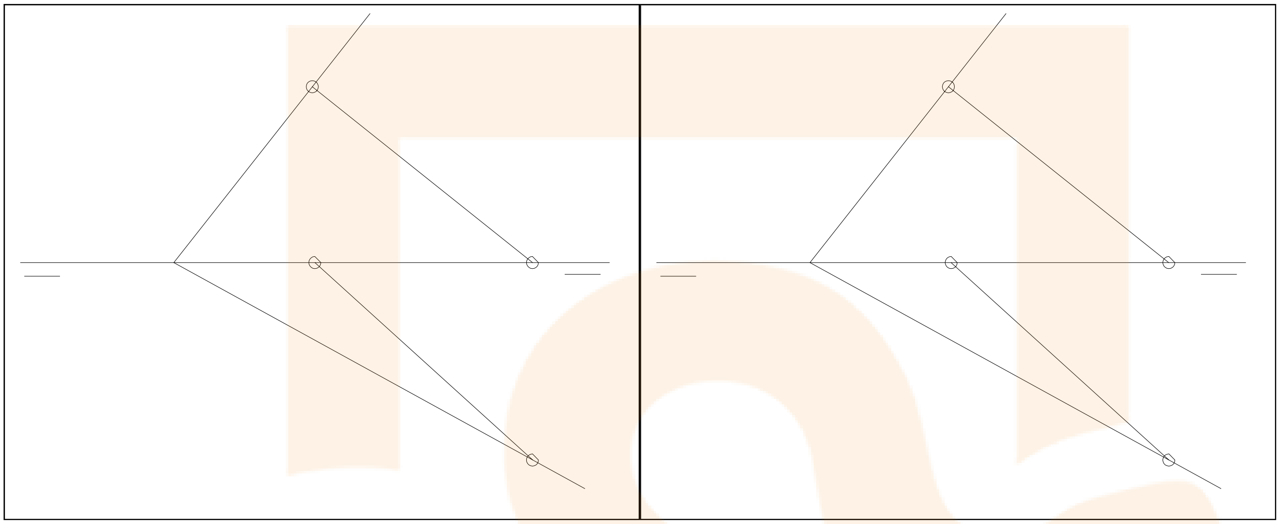




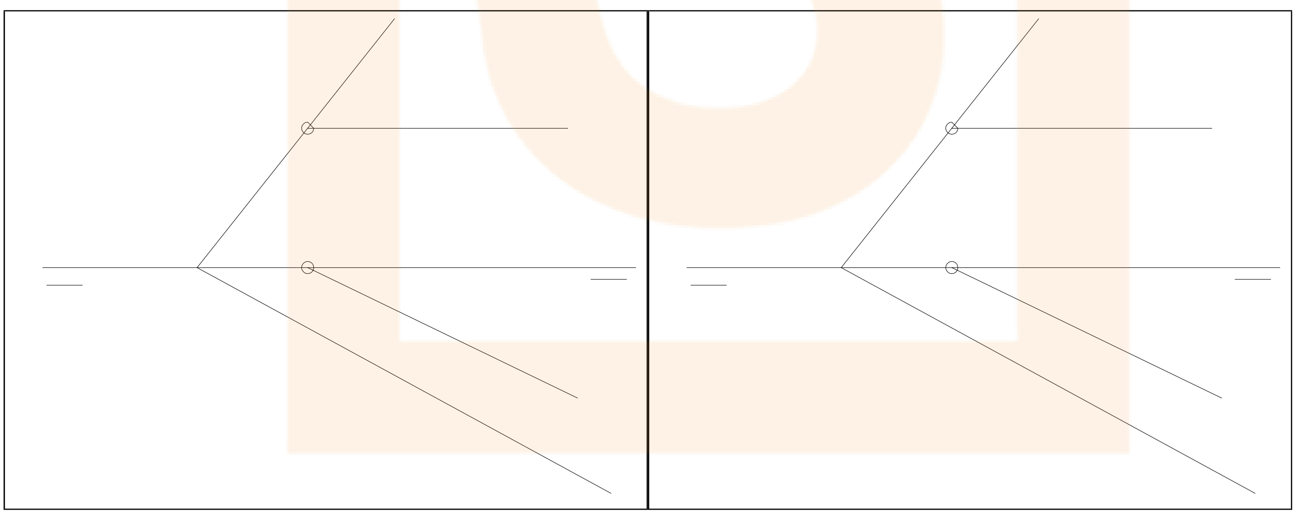
ABATIMIENTO OE UNA RECTA CUALQUIERA.
Para abatir una recta contenida en un plano basta con

abatir dos puntos cualesquiera de la misma.

Dados la recta r y el plano **α** que la contiene (fig. 3):
1 Se elige un punto arbitrario ***A(A_1A_2)*** de la recta **r(r_1r_2)** y se abate sobre el plano horizontal siguiendo el proceso descrito anteriormente.
2 Se une el punto abatido ***A_o*** con la traza horizontal ***H_r*** de la recta que, por pertenecer a la charnela, es un punto doble. En caso de no disponer de la traza horizontal **H_{r1}** se elige un segundo punto **B(B1B2)** de la recta y se abate de la misma manera que el punto ***A***.



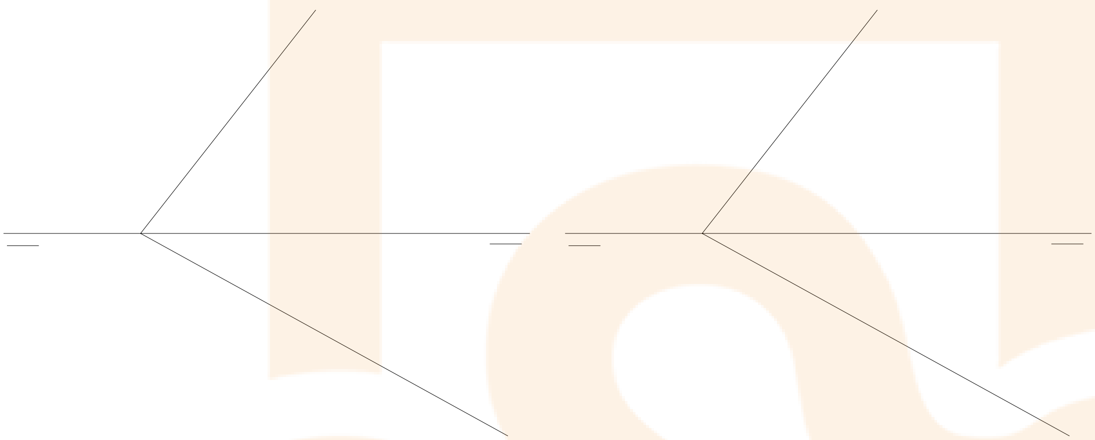
ABATIMIENTO DE UNA RECTA HORIZONTAL
Dados la recta horizontal **r** y el plano *a* que la contiene:
1 Se elige un punto cualquiera ***A(A_1A_2)*** de la recta ***r(r_1r_2)*** y se abate sobre el plano horizontal siguiendo el proceso descrito anteriormente.
2 Por el punto abatido ***A_o*** se traza la paralela no a la charnela **α_1**



ABATIMIENTO DE LAS TRAZAS DE UN PLANO

La traza vertical de un plano es la recta de intersección del plano con el plano vertical de proyección; por tanto, es una recta más del mismo, susceptible de ser abatida como se ha explicado anteriormente.
Dado el plano **α**:

1 Se elige un punto arbitrario ***$A(A_1A_2)$*** de la traza vertical α_2 del plano (los puntos pertenecientes a la traza vertical de un plano tienen siempre su proyección horizontal ***A_1*** en la línea de tierra).
2 Por la proyección horizontal *A_1* se traza la perpendicular a la charnela **α_1**
3 Con centro en el vértice **O** del plano y radio ***OA_2*,** se describe un arco que corta a la perpendicular anterior en ***A_{o1}*** pues en el espacio se cumple que ***OA_2*** = ***OA_0*.**
4 Se une el punto abatido ***A_o*** con el vértice del plano (traza horizontal de la recta **α_2**), obteniendo así **α_0**, que es la traza vertical del plano abatida.
Al ángulo **φ** que forman las trazas **α_1** *y* **α_0** se le denomina *amplitud del plano.*



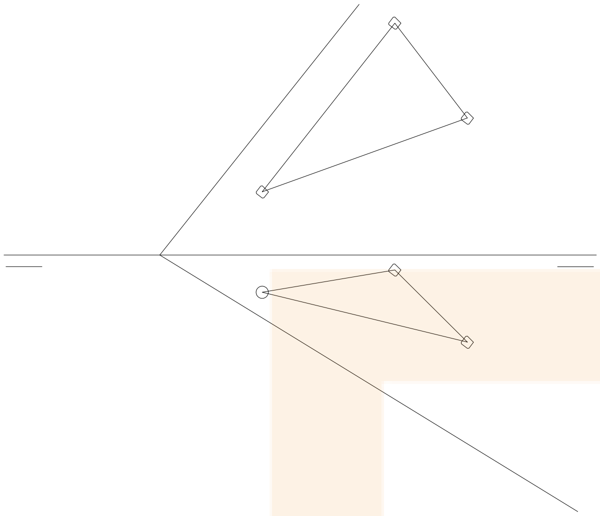
ABATIMIENTO DE UNA FIGURA PLANA: DADAS LAS PROYECCIONES, HALLAR SU VERDADERA MAGNITUD

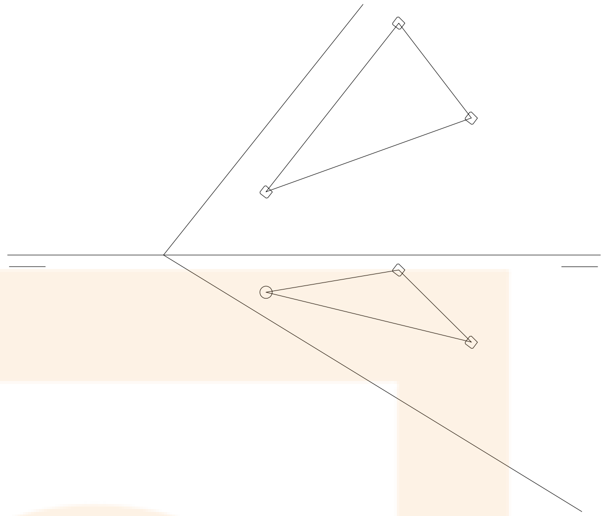
Método de las rectas horizontales

El abatimiento de las trazas de un plano permite abatir un punto por un procedimiento más ágil que el descrito al principio. Esto resulta práctico cuando se abaten muchos puntos, como sucede al abatir una figura contenida en un plano. En este caso, se hacen pasar por los vértices de la flgura rectas horizontales del plano.

Sea el plano **α** y la figura *ABC*:
1 Por el punto *A(A1A2)* se traza la recta horizontal *a.*
2 Se abate la traza vertical del plano en **α_0** tal como se ha explicado en el apartado anterior, tomando como punto auxiliar la traza vertical *V_a*.
3 Por *V_o* se traza la recta abatida *a_o*, paralela a **α_1**
4 El punto abatido *A_o* se halla donde se cortan **α_0** y la perpendicular a **α_1** trazada por *A_1*

El resto de los puntos se abaten de la misma manera que el punto *A,* es decir, se trata de construir los siguientes rectángulos:
1 Por **B_1** se traza la paralela a **α_1** hasta cortar a la línea de tierra.
2 Por el punto de la línea de tierra se traza la perpendicular a **α_1** hasta cortar a **α_0**
3 Por el punto de **α_0** se traza la paralela a **α_1**
4 Por **B1** se traza la perpendicular a **α_1** hasta cortar a la paralela anterior en ***B_o*.**

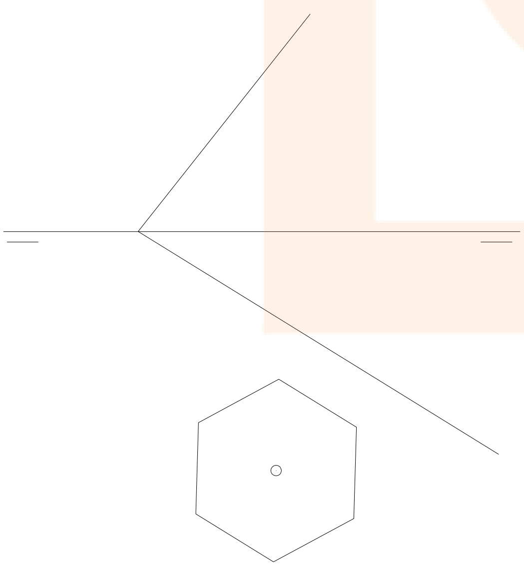


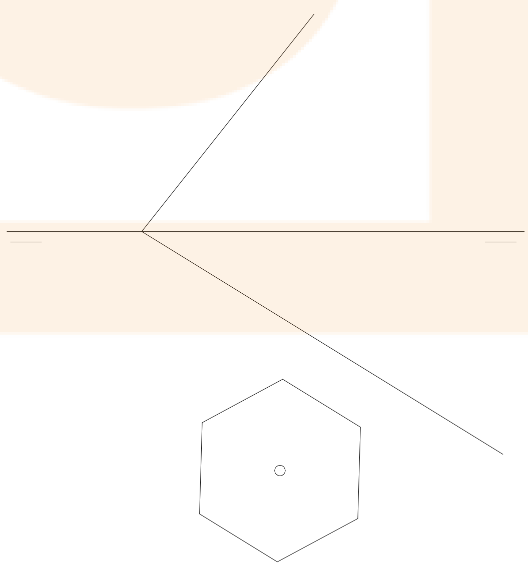


DESABATIMIENTO DE UNA FIGURA PLANA: .**DADA LA FIGURA, HALLAR SUS PROYECCIONES**

Supongamos que se desean hallar las proyecciones de un hexágono regular contenido en un plano **α** y conociendo el centro **O** del mismo. En primer lugar se abate el punto **O** en **0_0** y se dibuja, con centro en **0_0**, el hexágono regular en verdadera magnitud; por último, se desabaten todos y cada uno de los vértices del hexágono.
Sea un plano **α** y un punto **O** contenido en él:
1 Se abate la traza vertical del plano en **α_0** y el punto **O_0** en 00, tal como se ha explicado antes.
2 Con centro en **O_0** se dibuja el hexágono $A_oB_oC_oD_oE_oF_o$ en la posición que se determine y con el radio dado.
3 Para hallar la proyección horizontal A_1 de un punto, por ejemplo, se traza la recta a_o paralela a **α_1** hasta cortar a **α_0**, después se traza la perpendicular a **α_1** hasta la línea de tierra y por este punto la paralela a_1 a **α_1** hasta cortar a la perpendicular trazada por A_o en A_1
4 La proyección vertical A_2 se halla trazando primero la proyección vertical de la recta *a:* donde a_1 corta a la línea de tierra se traza la perpendicular a la misma hasta cortar a a_2 en V_a, y desde aquí la paralela a_2 a la línea de tierra. Trazando desde A_l la perpendicular hasta cortar a a_2 se determina A_2.

El resto de los puntos se desabaten de la misma manera.





Cambios de plano

GENERALIDADES

El problema de los cambios de plano consiste en elegir uno de los dos planos de proyección y, sin dejar de ser perpendicular al otro, colocarlo en una posición distinta que sea más favorable para resolver un ejercicio. Existen, por tanto, dos tipos de cambios de plano: el cambio de plano vertical y el cambio de plano horizontal, según se cambie uno u otro.
Cuando se efectúa un cambio de plano, todos los elementos proyectados o contenidos en él cambian de posición. Sin embargo, no cambian de posición los elementos del espacio, ni las proyecciones de estos sobre el otro plano de proyección que ha permanecido inmóvil.

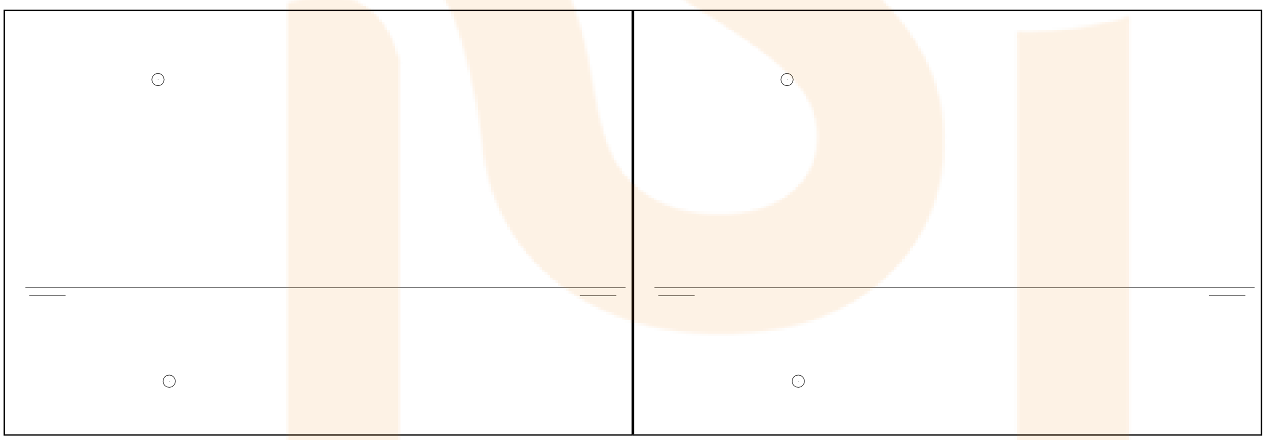
PROYECCIONES DE UN PUNTO EN UN CAMBIO DE PLANO

Cambio de plano vertical

Al cambiar el plano vertical cambia la posición de la
línea de tierra, que se distingue de la primitiva porque se representa con dos rayitas por debajo de los extremos. Para indicar el tipo de cambio que se efectúa se coloca *V'* en un extremo de la línea de tierra, para distinguirlo del cambio de plano horizontal que se verá luego.

En el espacio :
1 El punto ***P*** y su proyección P_1 sobre el plano horizontal permanecen en el mismo lugar; su cota, pues, sigue siendo la misma.
2 Al cambiar de posición el plano vertical, la proyección vertical P_2 desaparece de donde está y pasa a estar en otro lugar que debemos hallar.

En diédrico :
1 La proyección horizontal primitiva P'_1coincide con la nueva proyección horizontal P'_1
2 Por la proyección horizontal P'_1 se traza la perpendicular a la nueva línea de tierra; en ella se encontrará P'_2
3 Sobre la perpendicular trazada anteriormente, y a partir de la nueva línea de tierra, se transporta la cota **c** que hay desde P_2 a la línea de tierra primitiva, determinando así la nueva proyección vertical P'_2



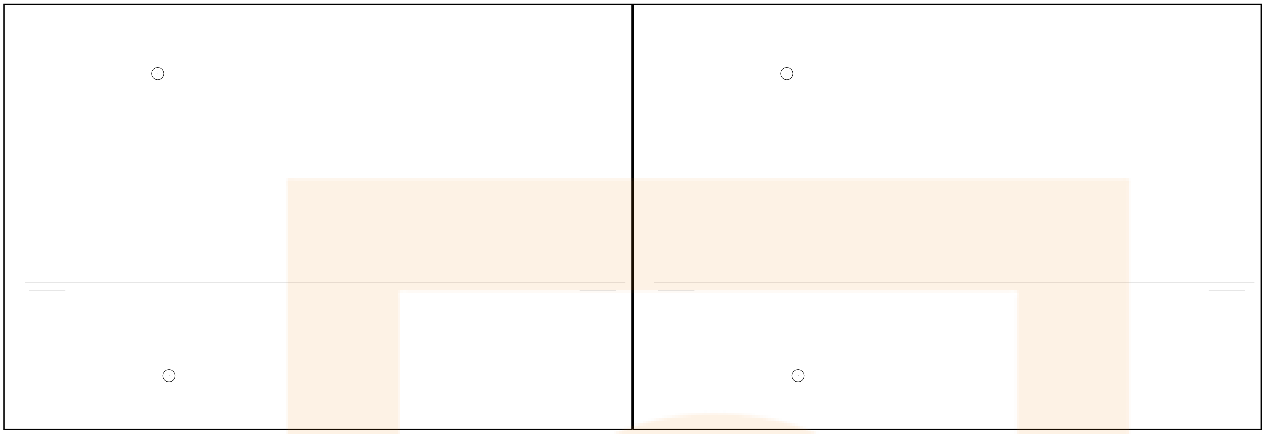
Cambio de plano horizontal

Al cambiar el plano horizontal cambia la posición de la línea de tierra, que también se representa con dos rayitas por debajo de los extremos, indicando el tipo de cambio ***H'.***

En el espacio:
1 El punto ***P*** y su proyección P_2sobre el plano vertical permanecen en el mismo lugar; su alejamiento, por tanto, sigue siendo el mismo.
2 La proyección horizontal P_1 al desaparecer el plano horizontal, pasa a estar en otro lugar.

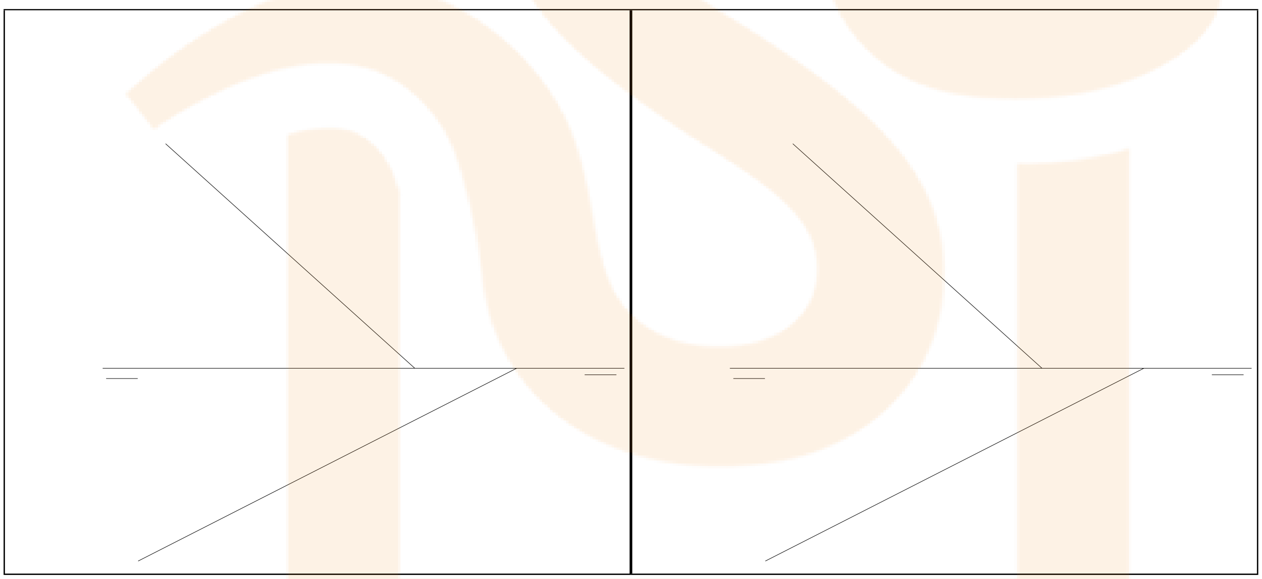
En diédrico:
1 La proyección vertical P_2 primitiva coincide con la nueva proyección vertical P'_2

2 Por la proyección vertical ***P'₂*** se traza la perpendicular a la nueva línea de tierra; en ella se va a encontrar $\boldsymbol{P'_1}$
3 Sobre la perpendicular trazada anteriormente y a partir de la nueva línea de tierra se transporta el alejamiento ***a*** que hay desde $\boldsymbol{P_1}$ a la primitiva línea de tierra, hallando así la nueva proyección horizontal $\boldsymbol{P'_1}$



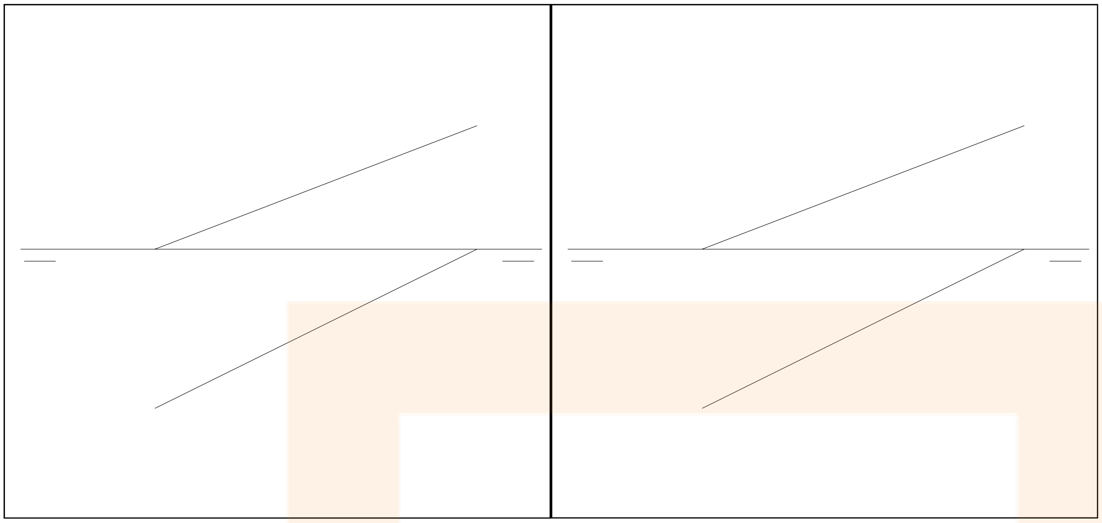
PROYECCIONES DE UNA RECTA EN UN CAMBIO DE PLANO

Dada la recta **r** y una nueva línea de tierra, en un cambio de plano vertical :
1 Se toman dos puntos $\boldsymbol{A(A_1A_2)}$ y $\boldsymbol{B(B_1B_2)}$ arbitrarios de la recta ***r.***
2 Por las proyecciones horizontales $\boldsymbol{A_1}$ y $\mathbf{B_1}$ se trazan las perpendiculares a la nueva línea de tierra, hallando las nuevas proyecciones verticales $\boldsymbol{A'_2}$ y $\boldsymbol{B'_2}$ como se ha explicado anteriormente.
3 Uniendo las proyecciones $\boldsymbol{A'_2}$ y $\boldsymbol{B'_2}$ se halla la nueva proyección vertica $\boldsymbol{r'_2}$ de la recta.



Convertir, por cambios de plano, una recta cualquiera en una recta frontal

Dada la recta **r** :
1 Se coloca el plano vertical paralelo a la recta **r**; por tanto, la nueva línea de tierra se dibuja paralela a la proyección horizontal $\mathbf{r}_1$ de la recta, sin importar la distancia a la que se coloque.
2 Se toman dos puntos cualesquiera de la recta **r** y se actúa como en el caso anterior. Uno de los dos puntos puede ser la traza horizontal $\mathbf{H_r}$ tal como sucede en la figura.
En el caso de convertir una recta cualquiera en recta horizontal, se coloca el plano horizontal paralelo a la recta, de tal forma que la línea de tierra es, ahora, paralela a la proyección vertical de la recta.
A continuación se toman dos puntos arbitrarios y se efectúa el cambio de plano horizontal.

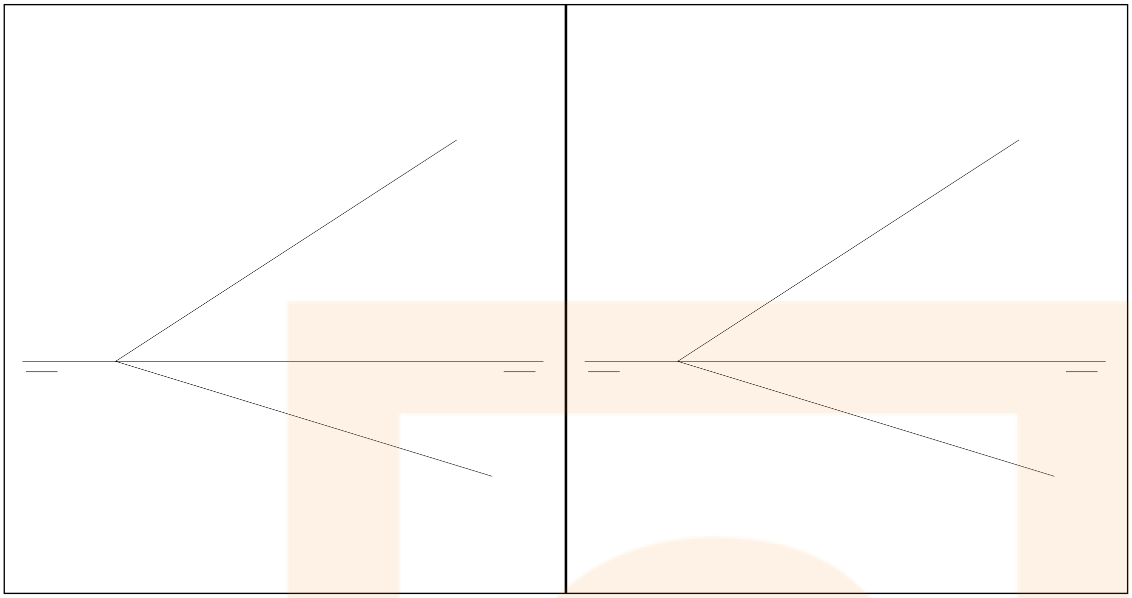


TRAZAS DE UN PLANO EN UN CAMBIO DE PLANO

En un cambio de plano vertical , la traza horizontal **α_1** del plano sigue siendo la misma, pero la traza vertical **α_2**, es decir, la intersección del plano **α** con el nuevo plano vertical es otra; el nuevo vértice **O'** del plano está donde se corta la traza al con la nueva línea de tierra.

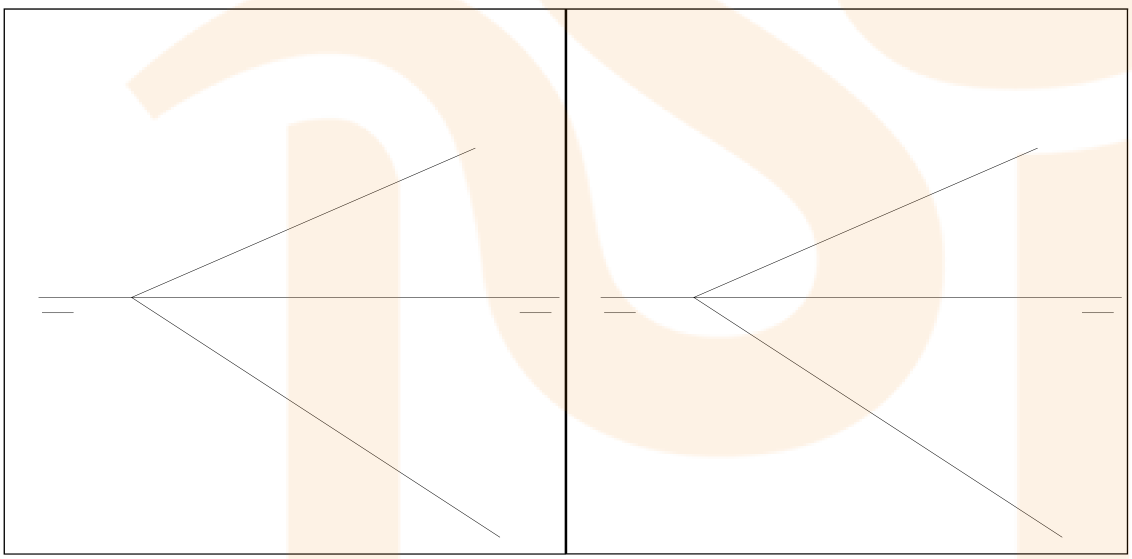
Por otra parte, la recta de intersección de los dos planos verticales, V y V', se corta con la traza vertical **α_2** en un punto **M** cuya proyección horizontal está donde se cortan ambas líneas de tierra; dicho punto **M** es un punto doble y por tanto pertenece a las dos trazas verticales **α_2** Y **α'_2** del plano.
Dado el plano **α** (**α_1 α_2**) y una nueva línea de tierra, en un cambio de plano vertical:
1 Se toma el punto **M** de la traza vertical **α_2** del plano, cuya proyección horizontal **M_1** coincide con el punto de intersección de las dos líneas de tierra.
2 Se hallan las nuevas proyecciones del punto **M**: por **M_1== M'_1** se traza la perpendicular a la nueva línea de tierra y se transporta la cota del punto, hallando **M'_2**
3 La nueva traza vertical **α'_2** se halla al unir **M'_2** con el nuevo vértice **O'** (donde **α_1** se corta con la nueva línea de tierra). La traza horizontal **α'_1**sigue siendo la misma que antes **α_1**

En el caso de que las dos líneas de tierra no se corten:
1 Se elige una recta horizontal **$r(r_1r_2)$** cualquiera.
2 Se halla, mediante un punto cualquiera N(N1N2), la
nueva proyección vertical **r'_2** de la recta y se determina su nueva traza vertical **V_r'**
3 Uniendo **V'_r** con el nuevo vértice **O'** se obtiene **α'_2** (en el caso de no disponer de **O',** se elige otra recta horizontal y se halla su nueva traza vertical).
Para resolver este segundo caso es un error elegir otro punto cualquiera de **α_2** y cambiarlo.



Convertir un plano cualquiera en un plano proyectante

Dado el plano **α**:
1 Se coloca el plano vertical perpendicular al plano **α***;* por tanto, la nueva línea de tierra se dibuja perpendicular a la traza horizontal $\boldsymbol{\alpha_1}$ del plano, sin importar la distancia a la que se coloque.
2 Se actúa como en el caso anterior.



Giros

GENERALIDADES

A diferencia de los cambios de plano, en los giros son los elementos geométricos los que se mueven, permaneciendo los planos de proyección.

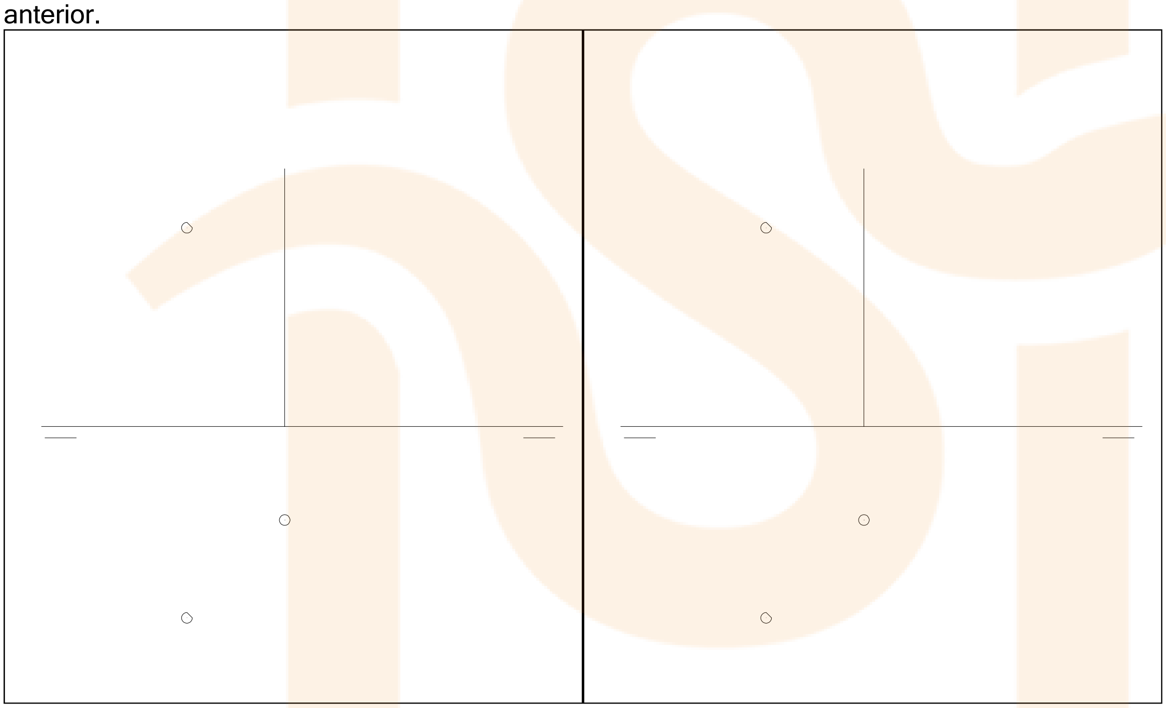
Cuando un punto gira alrededor de una recta describe una circunferencia, cuyo plano es perpendicular a la recta, el centro es la intersección de la recta con el plano y el radio es la distancia del punto a la recta.

A la recta alrededor de la que se gira se le denomina ***eje de giro***. Los ejes que consideraremos van a ser perpendiculares a uno de los dos planos de proyección, es decir, los giros se realizarán alrededor de una recta vertical o de una recta de punta.
Para girar un punto alrededor de un eje vertical se tendrá en cuenta :

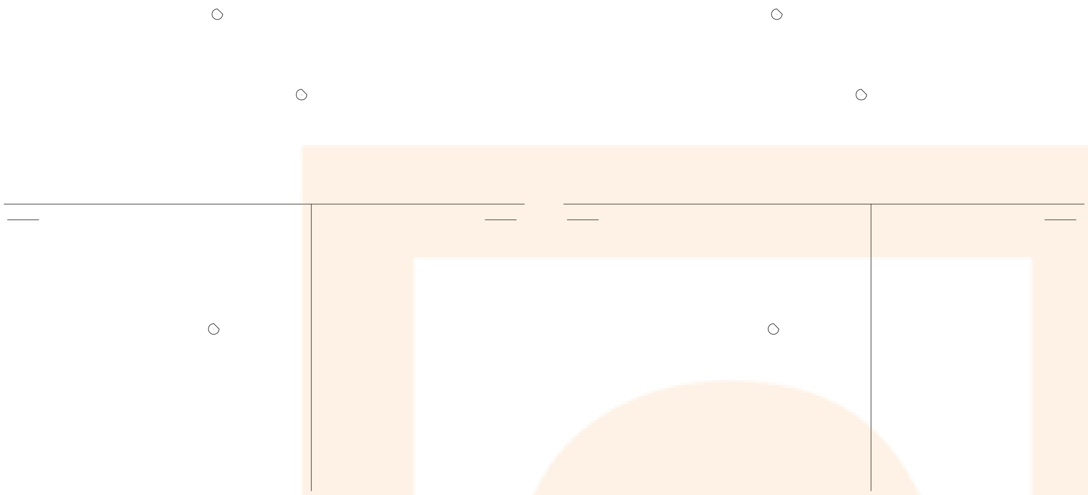
1 El punto describe alrededor del eje una circunferencia paralela al plano horizontal.
2 La proyección horizontal de la circunferencia que describe el punto es una circunferencia del mismo radio que la anterior, cuyo centro coincide con la proyección horizontal del eje, que es un punto.
3 La proyección vertical de la circunferencia que describe el punto es un segmento paralelo a la línea de tierra, cuya longitud es igual al diámetro de la circunferencia.
Las mismas consideraciones pueden hacerse en un giro alrededor de un eje de punta.

GIRO DE UN PUNTO

Giro de un punto alrededor de un eje perpendicular al plano horizontal
Sea el eje ***e*** y un punto ***P*** :
1 Haciendo centro en la proyección horizontal e_1 Y radio e_1 P_1 se describe un arco de circunferencia, de un determinado ángulo y sentido, hasta la posición P'_1
2 Por la proyección vertical P_2 del punto se traza la paralela a la línea de tierra, traza vertical β_2 del plano que contiene a la circunferencia.
3 Por la nueva proyección horizontal P'_1 se traza la perpendicular a la línea de tierra hasta cortar en P'_2 a la paralela anterior.



Giro de un punto alrededor de un eje perpendicular al plano vertical.(opcional)



GIRO DE UNA RECTA

Existen dos casos: que la recta corte al eje o que no la corte; vamos a estudiar, para no extendernos, el primer caso, por ser el más frecuente.

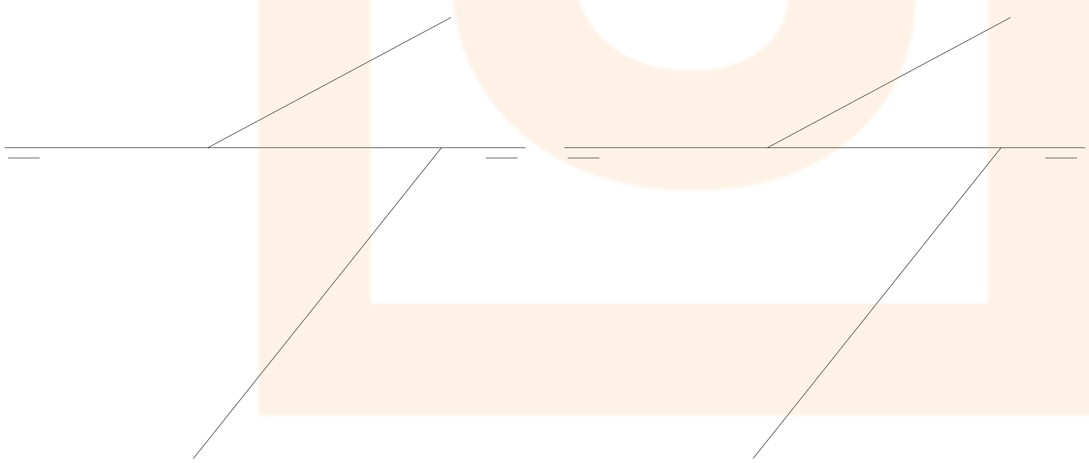
Sea el eje ***e***, perpendicular al plano horizontal, y la recta ***r***, que corta al eje en el punto ***A***:

1 Se elige un punto arbitrario ***B(B1B2)*** de la recta ***r.***

2 Se gira el punto **B,** alrededor del eje, un ángulo determinado, hasta colocarlo en su nueva posición ***$B'(B'_1B'_2)$***

3 Se une el punto **B'** con el punto *A* que, por pertenecer al eje, es un punto doble, obteniendo la recta **r';** la proyección **r'_1** se obtiene al unir ***A_1*** y ***B'_1***, y **r'_2** se halla uniendo ***A_2*** y ***B_2***.

Si el giro de la recta fuese alrededor de un eje perpendicular al plano vertical, el proceso hubiera sido análogo.



Convertir una recta cualquiera en una recta frontal

Es esta una de las aplicaciones más utilizadas de los giros, pues al convertir una recta cualquiera en frontal se pueden tomar, en su proyección vertical, verdaderas magnitudes; recuérdese que, en las rectas frontales, la recta es paralela a su proyección vertical.

Sea una recta cualquiera:

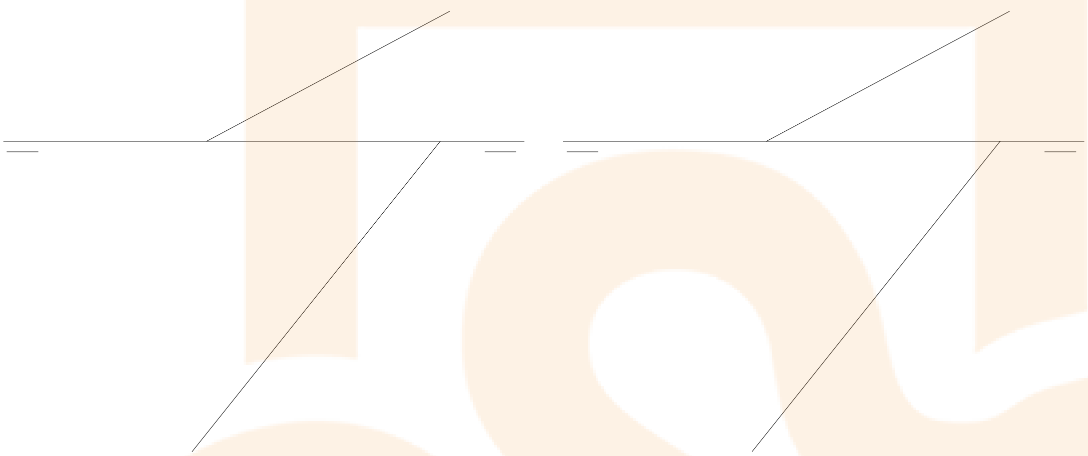
1 Se traza un eje ***e*** cualquiera, perpendicular al plano horizontal, que corte a la recta **r**; por tanto, la proyección horizontal $\boldsymbol{e_1}$ está en la proyección r_1 de la recta, y la proyección vertical $\boldsymbol{e_2}$ es perpendicular a la línea de tierra. La intersección de **r** y ***e*** es el punto $\boldsymbol{A(A_1A_2)}$.

2 Se elige un punto cualquiera $\boldsymbol{B(B_1B_2)}$ de la recta ***r.***

3 Haciendo centro en la proyección horizontal $\mathbf{e_1}$ del eje y radio $\boldsymbol{e_1B_1}$, se describe un arco de circunferencia, de tal forma que ***B'1*** y ***A1*** estén alineados según una paralela a la línea de tierra.

4 Se halla la nueva proyección vertical ***B´2***, trazando por $\mathbf{B_2}$ la paralela a la línea de tierra y por $\boldsymbol{B'_1}$ la perpendicular.

5 Se une el punto **B**' con ***A***, que por pertenecer al eje es un punto doble, obteniendo la recta **r´**; la proyección $\mathbf{r'_1}$ se obtiene al unir $\boldsymbol{A_1}$ y $\boldsymbol{B'_1}$, y $\mathbf{r'_2}$ se halla uniendo $\boldsymbol{A_2}$ y $\boldsymbol{B'_2}$



Para convertir una recta cualquiera en recta horizontal, se elige un eje cualquiera que, cortando a la recta, sea perpendicular al plano vertical, girando a continuación la recta hasta que su proyección vertical sea paralela a la línea de tierra.

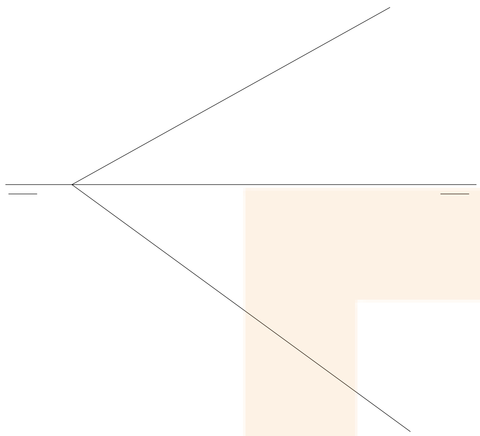
GIRO DE UN PLANO

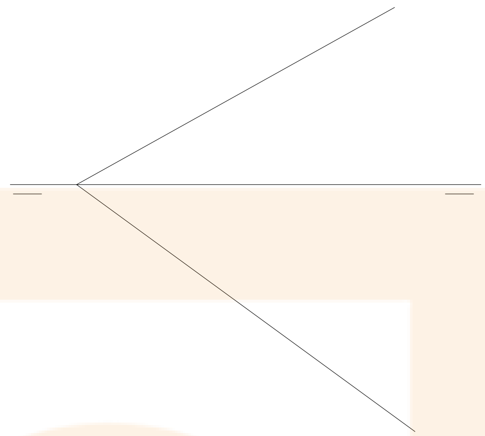
Sea el eje **e**, perpendicular al plano horizontal, y el plano **α**
:

1 Se halla el punto ***A*** de intersección del plano con el eje: se traza la recta horizontal **r** de forma que $\mathbf{r_1}$ pase por $\boldsymbol{e_1}$; $\boldsymbol{A_1}$ coincide con $\mathbf{e_1}$ y $\boldsymbol{A_2}$ se encuentra donde se corta $\mathbf{r_2}$ y $\boldsymbol{e_2}$.

2 Se gira la traza horizontal $\boldsymbol{\alpha_1}$: se elige el punto ***M*** de intersección de la traza $\boldsymbol{\alpha_1}$ con la perpendicular trazada desde $\boldsymbol{e_1}$; a continuación se gira el punto ***M*** el ángulo necesario hasta la posición ***M'***; y por último se traza por **M'** la perpendicular $\boldsymbol{\alpha'_1}$ al segmento $\boldsymbol{e_1M'}$, que corta a la línea de tierra en **O**'.

3 La nueva traza vertical $\boldsymbol{\alpha'_2}$ parte del nuevo vértice **O**' del plano; para hallar otro punto de la nueva traza, se halla la traza vertical $\boldsymbol{V_r'}$ de la recta horizontal **r**', que tiene su proyección horizontal $\mathbf{r'_1}$ paralela a $\boldsymbol{\alpha'_1}$. Uniendo **O'** y $\boldsymbol{V'_r}$ se obtiene $\boldsymbol{\alpha'_2}$





Convertir un plano cualquiera en un plano proyectante vertical

Sea un plano **α** cualquiera:

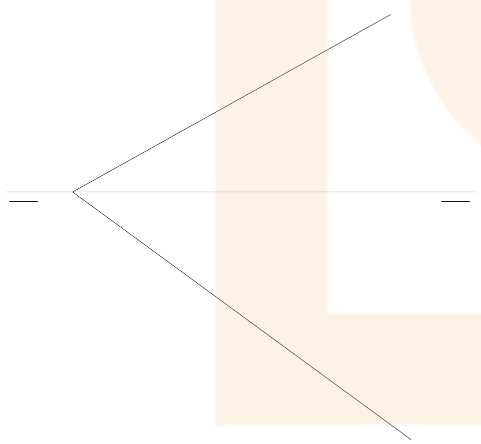
1 Se traza un eje **e** cualquiera, perpendicular al plano horizontal.

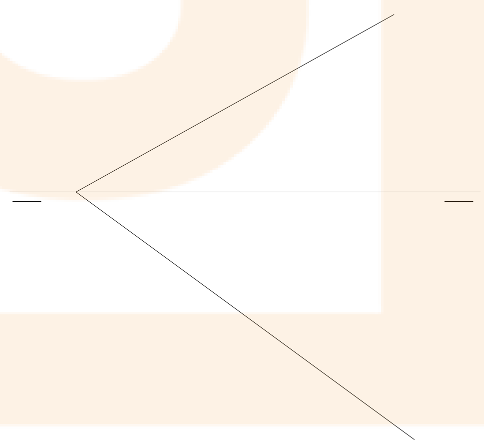
2 Se halla el punto ***A*** de intersección del plano con el eje mediante la recta horizontal ***r***, cuya proyección **r_1** pasa por **e_1**

3 Se gira, tomando el punto ***M***, la traza horizontal hasta colocarla perpendicular a la línea de tierra, siendo **α'_1** la nueva traza horizontal del plano, que corta a la línea de tierra en **O'.**

4 La nueva traza vertical **α'_2** se halla uniendo **O'** con la nueva traza vertical ***V_r'*** de la recta girada, y que se encuentra donde se cortan **r_2** y ***e_2***.

Evidentemente, al girar un plano, las operaciones se simplifican si, en el momento de elegir el eje **e**, este está contenido en el plano vertical, es decir, su proyección vertical es perpendicular a la línea de tierra y su proyección horizontal está en ella. Dejamos al lector la posibilidad de comprobar dicha particularidad.





SISTEMA DIÉDRICO: ÁNGULOS

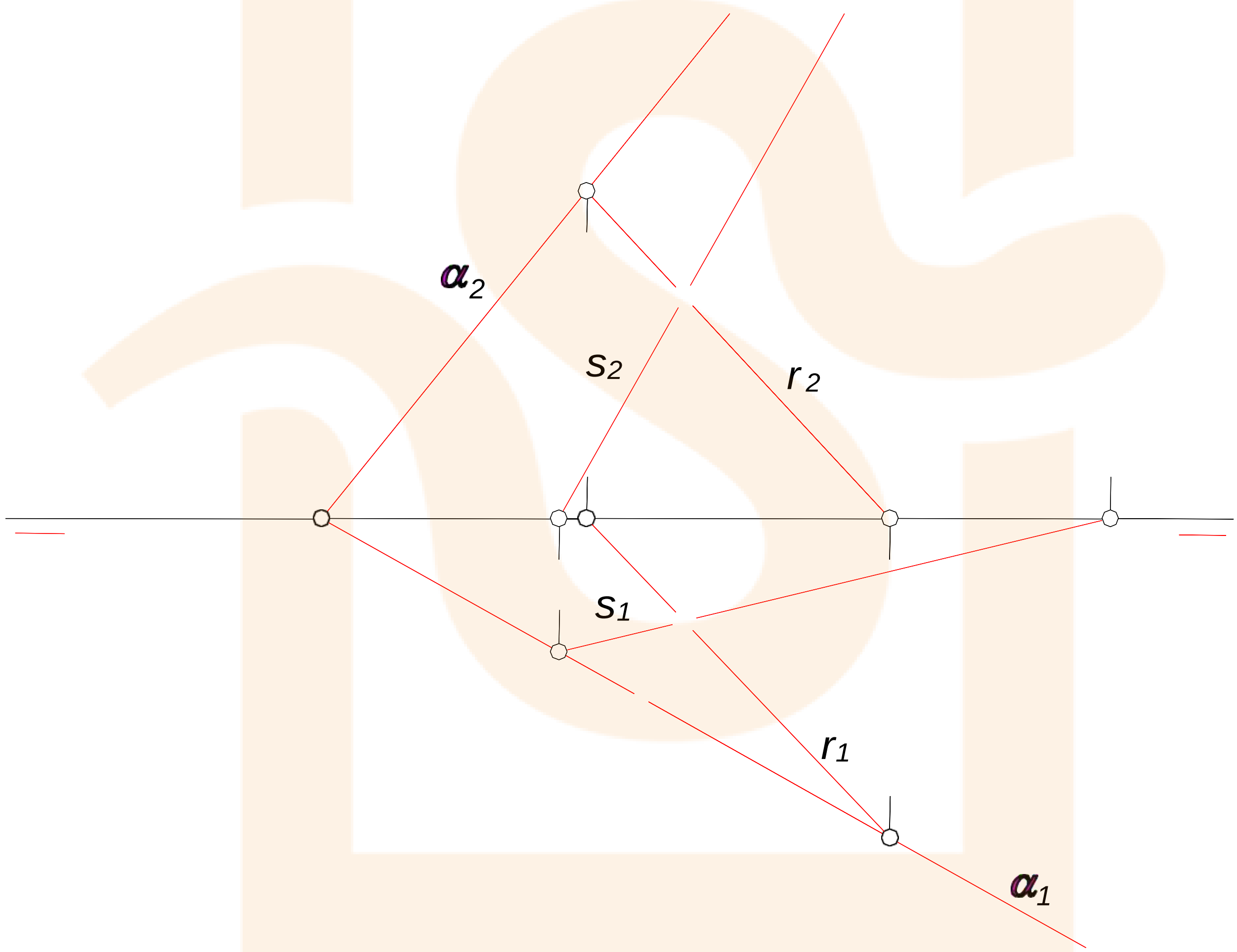
ÁNGULO QUE FORMAN DOS RECTAS QUE SE CORTAN

Para hallar el valor del ángulo que forman dos rectas que se cortan basta con abatir el plano que determinan. Sean las rectas r_1-r_2 y **s_1-s_2** que se cortan en el punto ***A***:

1 La traza horizontal α_1 del plano que determinan las rectas r y s se halla al unir las trazas horizontales ***Hr*** y ***Vr*** *de* ambas rectas.

2 Se abate el punto ***A****:* por la proyección horizontal A_1 se dibuja la perpendicular y la paralela a la charnela α_1; sobre la paralela se traslada la cota del punto ***A****;* con centro en ***A'*** y radio ***A'A"*** se describe el arco que corta a la perpendicular en el punto A_o abatido.

3 Las rectas abatidas r_o y s_o se hallan al unir el punto A_o con las trazas horizontales ***Hr*** y ***Hs*** respectivamente. El ángulo que forman las rectas abatidas r_o y s_o está en verdadera magnitud.



ANGULO QUE FORMAN RECTA Y PLANO

Para hallar el valor del ángulo que forma una recta ***r*** con un plano **α** se elige un punto ***A*** cualquiera de la recta, se traza la recta ***t*** perpendicular al plano y se unen los puntos **P** y **B** de intersección de las rectas **r** y ***t*** con el plano **α**. Por último basta con hallar el ángulo que forman las rectas **r** y **s**.

Sean el plano **α_1 - α_2** y la recta **r_1-r_2**:

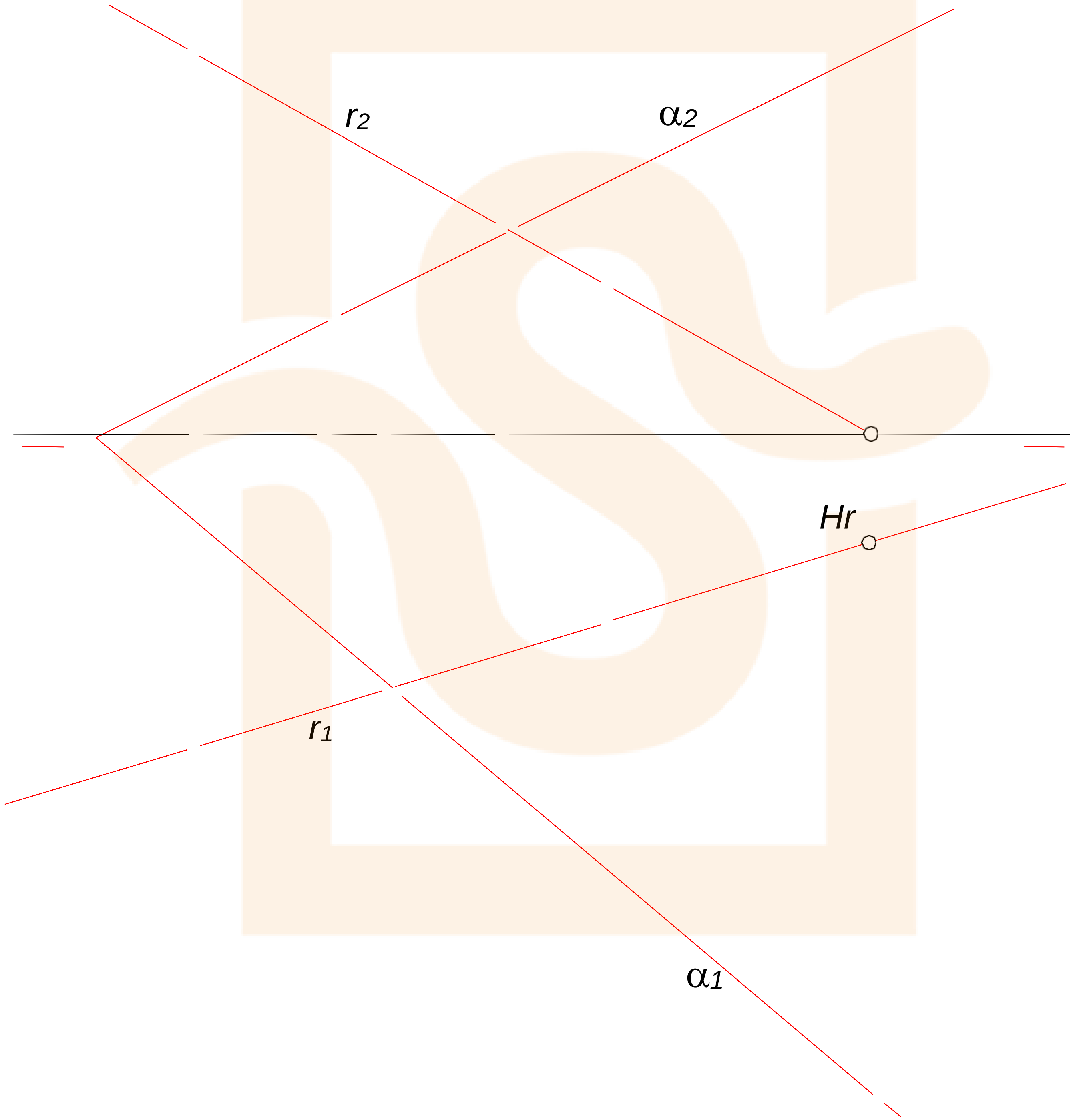
1 Se determina, mediante un plano proyectante vertical, el punto ***P_1-P_2*** de intersección de la recta r con el plano **α**

2 Por un punto ***A*** cualquiera de la recta r se traza la perpendicular ***t1-t2*** al plano dado y se halla, mediante otro plano proyectante vertical, el punto ***B1-B2*** de Intersección con el plano a **α**.

3 Se unen los puntos ***P1-P2*** Y ***B1-B2*** mediante la recta **s1-s2** que, junto la recta ***r1-r2*** , determinan el plano **β**; la traza horizontal **β1** se obtiene al unir las trazas horizontales ***Hr*** y ***Hs*** de ambas rectas.

4 Se abaten las rectas **r** y **s**: se abate el punto ***P*** de Intersección de ambas y se une el punto abatido ***P_o*** con las trazas horizontales ***Hr*** y ***Hs***, obteniendo así las rectas abatidas **r_o** y ***s_o***.

El ángulo que forman las rectas abatidas **r_o** y **s_o** está en verdadera magnitud y es el ángulo que forman la recta y el plano dados.



ÁNGULO QUE FORMAN DOS PLANOS:

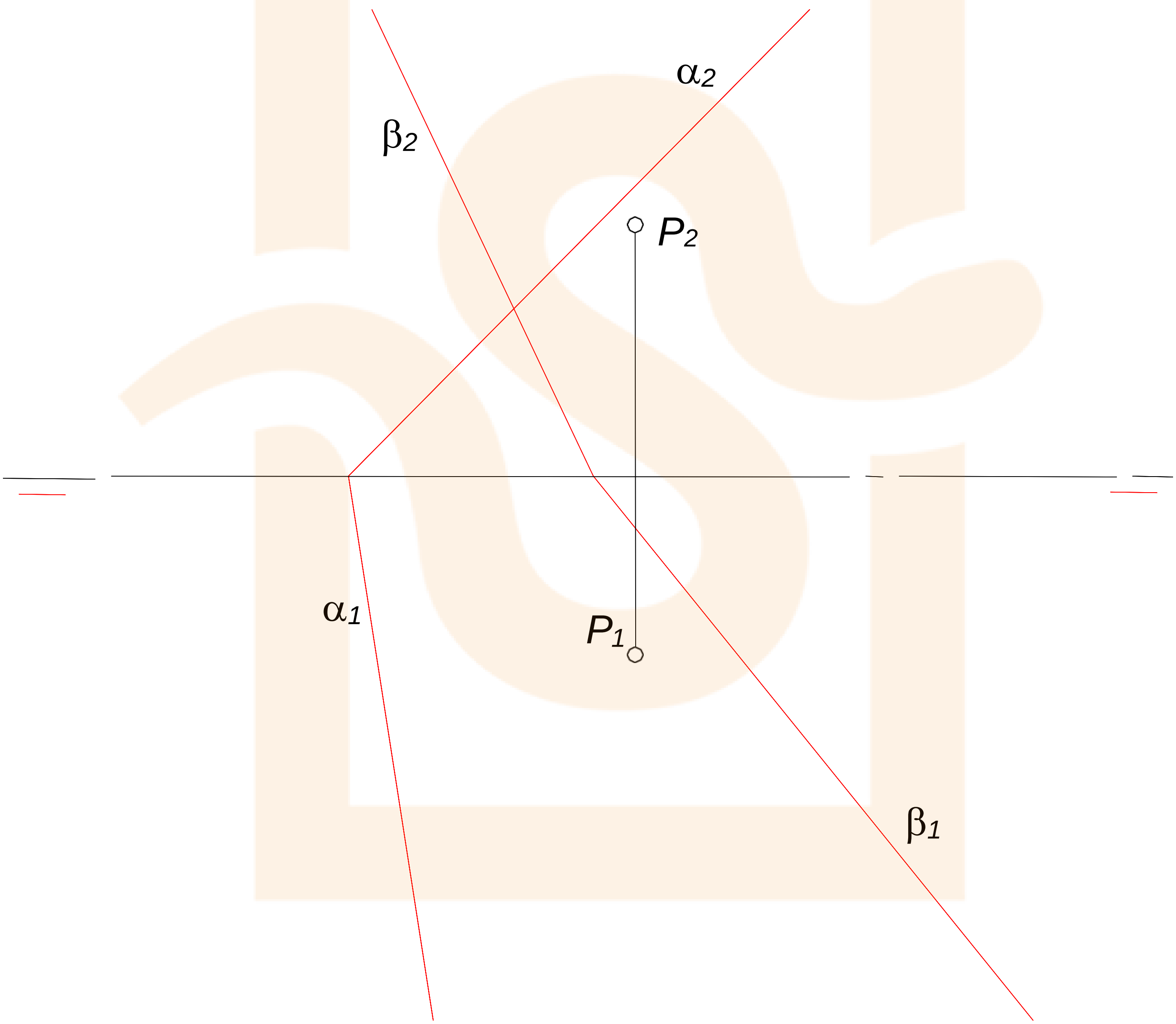
El ángulo que forman dos planos α y β cualesquiera es el mismo que forman dos rectas *r* y s perpendiculares a los mismos trazadas desde un punto **P** cualquiera del espacio.

Sean los planos α_1-α_2 y ***β1-β2***):

1 Se elige un punto ***P1-P2*** cualquiera del espacio y por él se traza la recta ***r1-r2*** perpendicular al plano **α** y la recta ***s1-s2*** perpendicular al plano **β**

2 Se dibuja el plano γ_1-γ_2 que definen las rectas **r** y **s**: la traza horizontal γ_1 se halla al unir ***Hr*** y ***Hs***.

3 Se abaten las rectas ***r*** y **s**: se abate el punto ***P*** de intersección de ambas utilizando como charnela la traza γ_1 y se une el punto abatido ***Po*** con las trazas horizontales ***Hr*** y ***Hs*** obteniendo así las rectas abatidas r_o y s_o.
El ángulo que forman las rectas abatidas r_o y s_o es el ángulo que forman los planos dados.



ÁNGULO QUE FORMA UNA RECTA CON LOS PLANOS DE PROYECCIÓN

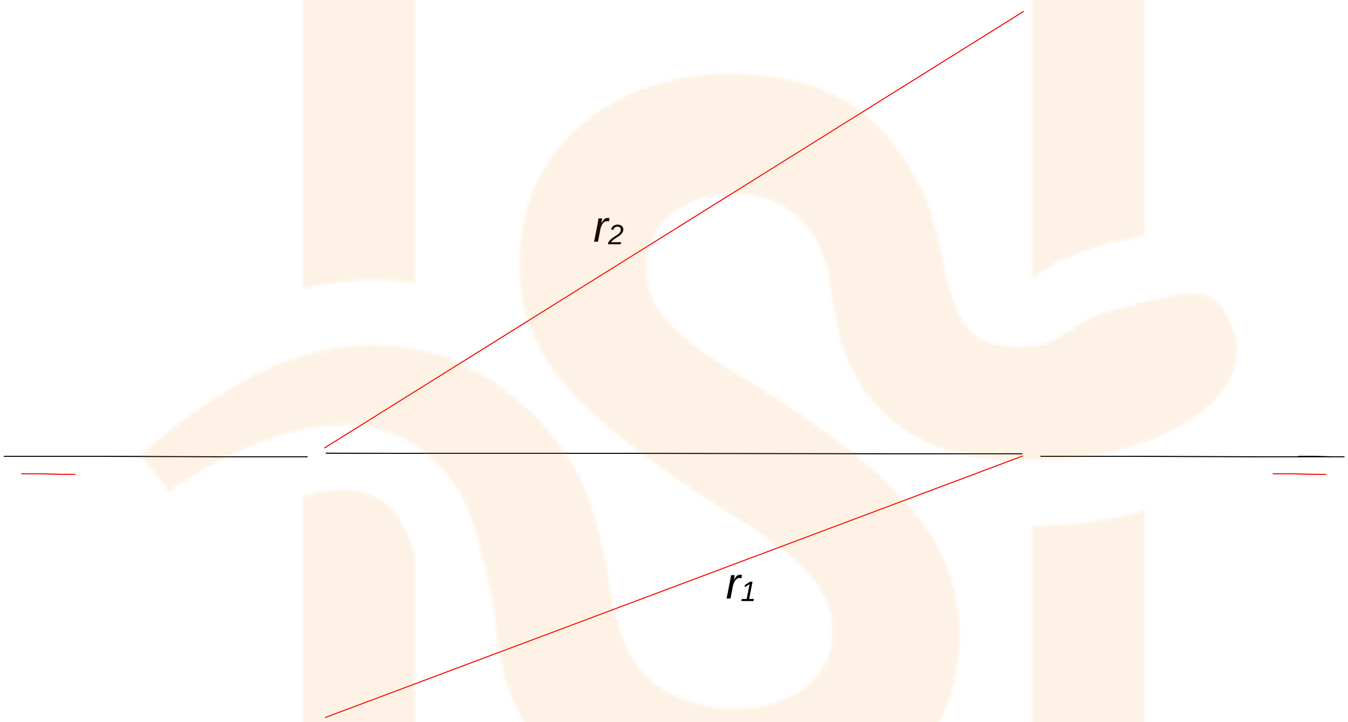
Para hallar el ángulo que forma una recta ***r*** con el plano horizontal basta con abatir el plano proyectante horizontal que la contiene. Para determinar el ángulo con el plano vertical se abate el plano proyectante vertical que la contiene.

Sea la recta ***r1-r2***:

1 Por la proyección horizontal de la traza vertical ***Vr*** de la recta se traza la perpendicula a la proyección horizontal ***r1*** de la recta; llevando sobre esta perpendicular la cota de ***Vr*** se obtiene V_{r0} que unido con la traza horizontal ***Hr*** determina la recta a batida r_o.

2 Por la proyección vertical de la traza horizontal ***Hr*** de la recta se traza la perpendicular a la proyección vertical ***r2*** de la recta; llevando sobre esta perpendicular el alejamiento de ***Hr*** se obtiene Hr_O que unido con la traza vertical ***Vr*** determina la recta abatida $r´_o$.

El ángulo **φ** que forma r_o con la proyección horizontal **r1** es el ángulo que la recta forma con el plano horizontal y el ángu lo **φ´** de $r´_o$ y r_2 es el que forma la recta con el plano vertical.



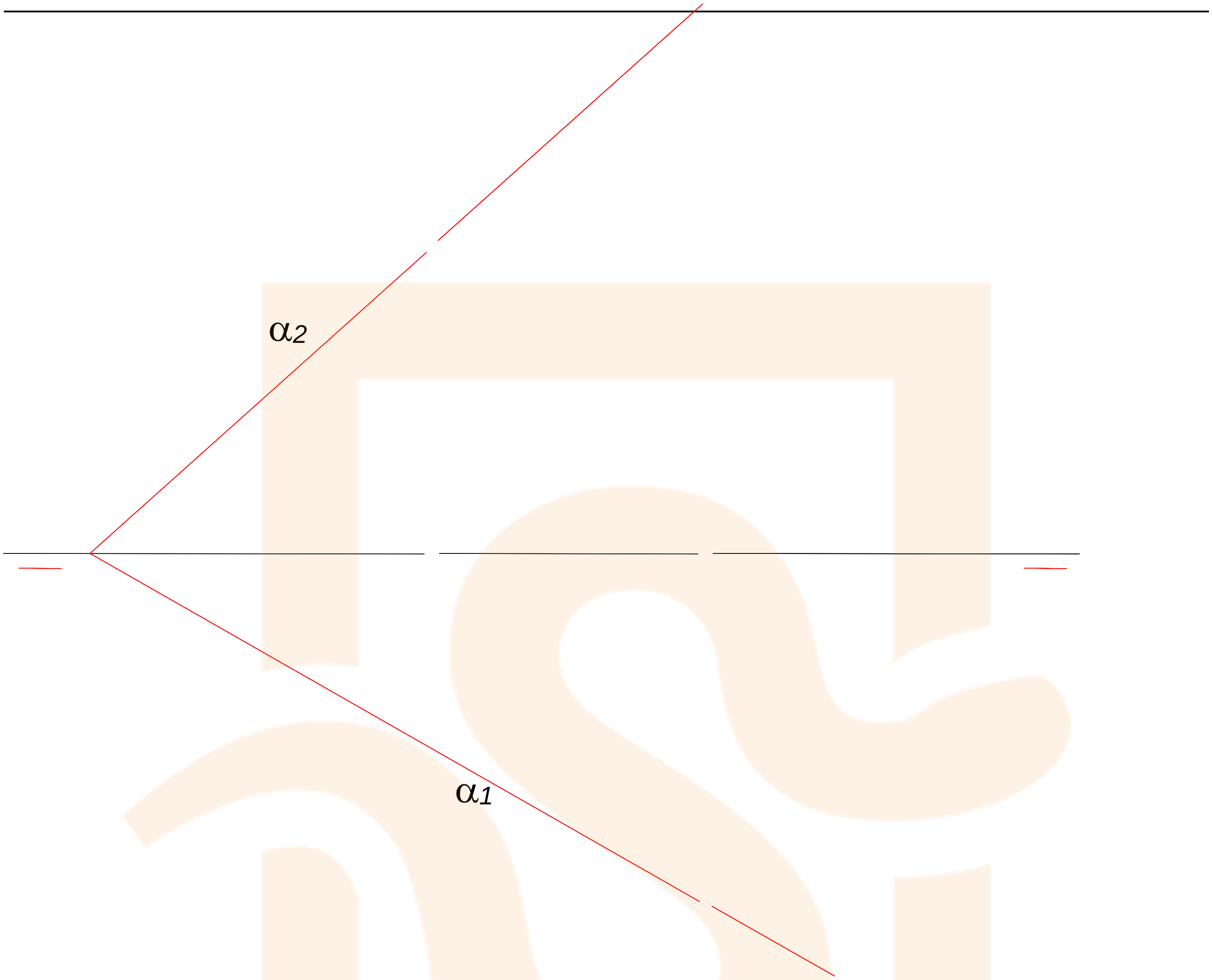
ÁNGULO QUE FORMA UN PLANO CON LOS PLANOS DE PROYECCIÓN

El ángulo que forma un plano cualquiera con el ***plano horizontal*** es el que forma una recta de **máxima pendiente** con el plano horizontal, y el ángulo con el **plano vertical** es el que forma una recta de **máxima inclinación**.

Sea un plano **α**:

1 Se traza una recta ***r1-r2*** de máxima pendiente cualquiera Y se halla el ángulo **φ** que la recta forma con el plano horizontal.

2 Se traza una recta ***r1-r2*** de máxima inclinación cualquiera. Y se halla el ángulo **φ** que la recta forma con el plano vertical.



α_2
α_1

TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS EN EL PLANO

Este tema requiere una explicación previa que aclare la distinta génesis de cada una de estas **transformaciones**. Aunque las **transformaciones** *pueden aplicarse de modo general tanto en* **el plano** como **el espacio**, resulta útil aclarar su estudio en esos dos ámbitos, porque, aunque las espaciales se resuelven finalmente sobre el plano, esta resolución se lleva a cabo mediante un sistema de representación descriptivo que sustituye la tridimensionalidad real de la transformación, entrando de ese modo en la Geometría Proyectiva.

Bajo el punto de vista topológico, **giros** y **traslaciones** son **movimientos** que afectan a los atributos espaciales del sujeto (el **giro** a la posición y la orientación, la **traslación** sólo al primero); la **homotecia** es el producto de dos **movimientos**_ (traslación x extensión). La **inversión** procede, al igual que otras **transformaciones**, de un carácter tanto gráfico como métrico. A su vez la **homotecia** es también una **homología** donde los planos que contienen a las formas planas son paralelos; *la **traslación** lo sería del mismo modo cuando además el centro de la radiación está en el infinito **(afinidad).***

Por todo ello procede una nueva organización que trate de estructurar lógicamente estas **transformaciones**, separando los **movimientos** de las **transformaciones** y dividiendo éstas a su vez en planas y espaciales.

MOVIMIENTOS

Aunque con distintos nombres, **son cinco los movimientos** (todos ellos **transformaciones**) comúnmente aceptados: a) identidad o **igualdad**, b) **traslación** o desplazamiento, c) rotación o **giro**, d) **simetrías axiales** o **centrales** con distintas concepciones y nomenclaturas) y la e) **expansión** o extensión

a) La **igualdad** no afecta a ningún atributo del sujeto, permaneciendo éste invariable. Puede considerarse como la inexistencia de cualquier transformación.

b) La **traslación**, como se comentó antes, altera sólo la posición relativa; supone un desplazamiento según un vector que determina su dirección, sentido y magnitud. Son muchos los ejemplo en la Naturaleza y en las creaciones humanas: caída de objeto˜ **movimientos** de animales, frisos cerámicos, decoraciones textiles, peldaños de escaleras, traviesas de tren, púas, etc.

c) La **rotación** crea una posición y una orientación nuevas. Supone el desplazamiento I circula del sujeto con radio fijo en torno a un punto o eje. Aparece en la Naturaleza como resultado de **movimientos** cautivos (p.e. la mano como extremo del brazo) y como estructura de animales y plantas (estrella de mar, pétalos de una flor). En las creaciones humanas el **giro** ha sido instituido como un instrumento muy valioso: rueda, péndulo, etc.

Para definir un **giro** es necesario ~ además del sujeto el centro, la amplitud angular y el sentido (suele tomarse como referencia el de las agujas del reloj).

d) La **simetría axial** altera los atributos posición y orientación como los **movimientos** anteriores, pero además lo hace también con la forma. Transforma a ésta en su simétrica. Esta relación es muy común tanto en la naturaleza, (manos, ojos, orejas, mariposas), como en el entorno artificial (balanza, letras, teléfono, La **simetría** juega un papel fundamental en las creaciones artísticas y ornamentales. En el espacio, con un plano como eje, esta **simetría** se denomina especular (de ser éste el caso más común).

La llamada **simetría central** es a todo los efectos, un **giro** de 180 º de amplitud.

e) La **extensión o expansión** mantiene la posición, la orientación y la forma alterando solamente el *atributo tamaño*. Es bastante común en los seres vivos (crecimiento de animales y plantas,) y en las actividades humanas (diana, ondas)

A la hora de **analizar** cualquier, *movimiento*, **se distinguen dos casos**:

a) el movimiento **es directo** o acorde .si se conserva la dirección y el sentido, la misma dirección y sentido opuesto, o distinta dirección, y

b) **es inverso** y discorde si altera el sentido.

Comúnmente se clasifican en

a) ***isometrías*** (mantienen la **igualdad** de las formas) y

b) ***semejanzas*** (producen una forma proporcional).

Entre las semejanzas se halla las **homotecias**, que están relacionadas con la expansión y por tanto afecta al tamaño de la forma según una proporción (puede ser directa o inversa según su centro se halle a un lado o entre las figuras homotéticas.

La **equivalencia** es una, transformación **NO proyectiva** (*tampoco es una homografía*) consistente en mantener la superficie de un polígono pero transformándolo en otro con distinta forma. Puede ser plana tridimensional, aunque normalmente se suele citar sólo la primera. Se basa en la alteración de alguna característica (número de lados, ángulos o partición de su superficie) pero con mantenimiento del área al mantener constante algún producto(p.e. base por altura en el triángulo.

La **inversión** es otra transformación **NO proyectiva** (**si** es una *homografía*) que permite transformar una figura en otra, con la gran ventaja de sustituir en determinadas condiciones, las circunferencias por rectas o viceversa). Gracias a esta facultad se suelen emplear en problemas de tangencias

__TRANSFORMACIONES. PLANAS Y ESPACIALES.__

Sería la **homología** y la **afinidad**

Esquema general: