BLOQUE 2: GEOMETRÍA.

Año 2011.

JUN11, **PA2**

En el espacio se dan las rectas

$$r:\begin{cases} x \quad\quad + z = 2 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \quad y \quad s:\begin{cases} 2x - y \quad\quad = 3 \\ x - y - z = 2 \end{cases}.$$

Obtener razonadamente:

a) Un punto y un vector director de cada recta. (3 puntos).

b) La posición relativa de las rectas r y s . (4 puntos).

c) La ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s . (3 puntos).

Resolución:

a) Tomamos $z = 0$ en las ecuaciones de r :

$$\begin{cases} (ec1)\ x = 2 \\ (ec2)\ 2\cdot 2 - y = 0 \rightarrow y = 4 \end{cases}. \Rightarrow \text{Punto } P = (2,4,0)$$

Para obtener el vector podemos hacer el producto vectorial de los vectores normales de cada uno de los planos que forman las ecuaciones de r :

$$(1,0,1)\times(2,-1,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = i + j - k = (1,1,-1) \rightarrow \vec{v}_r = (1,1,-1)$$

Para obtener punto de s, tomamos $x = 0$.

$$\begin{cases} (ec1)\ -y = 3 \rightarrow y = -3 \\ (ec2)\ -y - z = 2 \rightarrow z = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Punto } Q = (0,-3,1)$$

Obtenemos el vector de s como en la recta r :

$$(2,-1,0)\times(1,-1,-1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = i + 2j - k = (1,2,-1) \rightarrow \vec{u}_s = (1,2,-1)$$

Así, recta r : $P = (2,4,0)$ y $\vec{v}_r = (1,1,-1)$; recta s : $Q = (0,-3,1)$ y $\vec{u}_s = (1,2,-1)$

b) Como los vectores no son proporcionales, no tienen la misma dirección, por lo que sólo puede pasar que se crucen o que se corten.

Para saberlo estudiaremos si el vector $\overrightarrow{PQ}$ depende linealmente de $\vec{v}_r$ y $\vec{u}_s$. Si así fuese, significaría que ambas rectas están en un mismo plano, por lo que habrían de ser secantes. Si no, se cruzan.

$$\overrightarrow{PQ} = (-2,-7,1). \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -7 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Entonces los tres vectores $\overrightarrow{v_r}$, $\overrightarrow{u_s}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son linealmente independientes, y las rectas r y s se cruzan.

c) El plano pedido tiene el vector de r, el vector de s y un punto de r :

$$\vec{v}_r = (1,1,-1), \vec{u}_s = (1,2,-1), P = (2,4,0).$$

Ecuación del plano

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x-2 \\ 1 & 2 & y-4 \\ -1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x+z-2 = 0 \rightarrow x+z = 2$$

JUN11, **PB2**

En el espacio se dan las rectas

$$r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 3 \end{cases} \quad y \quad s : x-1 = y = z-3.$$

Obtener: razonadamente:

a) Un vector director de cada una de dichas rectas r y s . (2 puntos).
b) La ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto (0,1,3) . (3 puntos).
c) El punto de intersección de las rectas r y s (2 puntos) y la ecuación del plano π que contiene a estas rectas r y s . (3 puntos).

Resolución:

a) El vector de r viene determinado por los coeficientes de r : $\overrightarrow{v_r} = (1,–1,0)$.

El vector de s por la forma continua de la ecuación de la recta:

$$\frac{x-a}{u_1} = \frac{y-b}{u_2} = \frac{z-c}{u_3},$$

como recta que pasa por el punto (a,b,c) y tiene como vector director (u_1, u_2, u_3).

Así, un vector director de s es $\overrightarrow{u_s} = (1,1,1)$.

b) Por ser perpendicular a r, el vector director de r es el vector normal del plano.

Ecuación del plano: $1x – 1y + 0z = D$. Y el punto (0,1,3) ha de cumplir la ecuación:

$$1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 = D \rightarrow D = -1. \Rightarrow x-y = -1$$

c) Para buscar el punto de corte, sustituimos las expresiones de r en las ecuaciones de s :

$$\lambda - 1 = 1 - \lambda = 3 - 3 \Rightarrow \lambda = 1$$

y se cumplen las 2 igualdades.

Así, el punto de corte es (tomamos $\lambda = 1$ en las ecuaciones de r) :

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 1 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Punto de corte: } (1,0,3)$$

Para la ecuación del plano podemos tomar el vector de r, el vector de s, y un punto cualquiera de cualquiera de las rectas (tomamos (1,0,3))

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ -1 & 1 & y \\ 0 & 1 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2z - y - x - 5 = 0 \Rightarrow \pi : -x - y + 2z = 5$$

SEP11, **PA2**

En el espacio se dan las rectas

$$r : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \quad y \quad s : \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 3y - z + 2 + \alpha = 0 \end{cases}$$

Obtener razonadamente:

a) El valor de α para el que las rectas r y s están contenidas en un plano. (4 puntos).

b) La ecuación del plano que contiene a las rectas r y s para el valor de α obtenido en el apartado anterior. (2 puntos).

c) La ecuación del plano perpendicular a la recta r que contiene el punto (1, 2,1). (4 puntos).

Resolución:

a) Para que las tres rectas estén contenidas en un mismo plano, el vector director de r, $\vec{v}_r$, el vector director de s, $\vec{v}_s$, y el vector que va de un punto de r (P), a un punto de s (Q), $\overrightarrow{PQ}$, tienen que ser coplanarios, y por tanto el determinante de la matriz formada por los tres vectores ha de ser 0.

Así, necesitamos obtener un vector y un punto de cada recta.

Recta r :

$\vec{v}_r = (1,2,1)$ (coeficientes del parámetro λ en las ecuaciones paramétricas)

$P = (3,-1,2)$ (términos independientes de las ecuaciones paramétricas)

Recta s :

$$\vec{v_s}: \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 3\vec{k} + \vec{j} = (-2, 1, 3)$$

Q : Tomamos $y = 0$ en las ecuaciones. $\Rightarrow x = 1$; $z = \alpha + 2$. $\Rightarrow Q = (1, 0, \alpha + 2)$

$$\det(\vec{v_r}, \vec{v_s}, \overrightarrow{PQ}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = 5\alpha - 15 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3.$$

Así, cuando $\alpha = 3$, las dos rectas son coplanarias. Si $\alpha \neq 3$, no lo son.

b) Para obtener la ecuación del plano, utilizamos dos vectores del mismo ($\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$) y un punto (P)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ x-3 & y+1 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x - 5y + 5z - 30 = 0 \Rightarrow x - y + z - 6 = 0$$

c) El plano perpendicular a r, tendrá a $\vec{v}_r$ como vector normal y ha de contener el punto (1, 2,1).

Así, los coeficientes de la ecuación del plano son (1,2,1) y hay que hallar D para que el punto (1,2,1) cumpla la ecuación.

$$x + 2y + z + D = 0 \qquad \Rightarrow 1 + 2 \cdot 2 + 1 + D = 0 \qquad \to D = -6.$$

$$\Rightarrow x + 2y + z - 6 = 0$$

SEP11, **PB2**

Se da la recta

$$r: \begin{cases} x - 4y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad \text{y el plano } \pi_\alpha : (2 + 2\alpha)x + y + \alpha z - 2 - 6\alpha = 0$$

dependiente del parámetro real α. Obtener razonadamente:

a) La ecuación del plano π_α que pasa por el punto (1,1,0). (3 puntos).

b) La ecuación del plano π_α que es paralelo a la recta r . (4 puntos).

c) La ecuación del plano π_α que es perpendicular a la recta r . (3 puntos).

Resolución:

a)

$$\pi_\alpha : (2 + 2\alpha)x + y + \alpha z - 2 - 6\alpha = 0.$$

Sustituimos las coordenadas (1,1,0):

$$(2+2\alpha)\cdot 1+1+\alpha\cdot 0-2-6\alpha = 0 \qquad \to 1-4\alpha = 0 \to \alpha = \frac{1}{4}$$

$$(2+\frac{1}{2})x+y+\frac{1}{4}z-2-6\cdot\frac{1}{4} = 0 \qquad \to \frac{5}{2}x+y+\frac{1}{4}z-\frac{7}{2} = 0$$

$$\pi_{\frac{1}{4}} : 10x+4y+z-14 = 0$$

b) El plano π_α y la recta r serán paralelos cuando el vector director de r y el vector normal de π_α sean perpendiculares.

$\vec{v}_r$: Para obtener el vector director de r, hacemos el producto vectorial de los coeficientes de cada una de las ecuaciones generales.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4\vec{i}+\vec{k}+\vec{j}. \qquad \Rightarrow \vec{v_r} = (4,1,1).$$

El vector normal de π_α viene determinado por los coeficientes de su ecuación general, $\vec{n} = (2+2\alpha, 1, \alpha)$.

Para que sean perpendiculares ambos vectores, su producto escalar ha de ser 0:

$$\vec{v_r}\cdot\vec{n} = 8+8\alpha+1+\alpha = 9+9\alpha = 0 \qquad \Leftrightarrow \alpha = -1.$$

Por lo tanto, el plano π_α que es paralelo a la recta r es aquel en el cual $\alpha = -1$:

$$\pi_{-1} : (2+2\cdot(-1))x+y+(-1)z-2-6(-1) = 0 \qquad \Rightarrow y-z+4 = 0$$

c) El plano π_α y la recta r serán perpendiculares cuando el vector director de r y el vector normal de π_α sean paralelos.

$$\vec{v_r} = (4,1,1); \vec{n} = (2+2\alpha,1,\alpha).$$

Serán paralelos cuando sean proporcionales:

$$\frac{2+2\alpha}{4} = \frac{1}{1} = \frac{\alpha}{1} \Rightarrow \alpha = 1 \text{ cumple las 2 igualdades.}$$

Así la solución buscada es el plano π_α con $\alpha = 1$:

$$\pi_1 : (2+2\cdot 1)x+y+1z-2-6\cdot 1 = 0 \qquad \Rightarrow 4x+y+z-8 = 0$$

Año 2010.

JUN10, **PA2**

Dadas las rectas de ecuaciones

$$r : \begin{cases} 5x+y-z = 4 \\ 2x-2y-z = -5 \end{cases} \quad y \quad s : \begin{cases} x-y = -5 \\ z = 4 \end{cases}$$

se pide:

a) Justificar que las rectas r y s se cruzan. (4 puntos).

b) Calcular razonadamente la distancia entre las rectas r y s . (3 puntos).

c) Determinar la ecuación del plano π que es paralelo y equidistante a las rectas r y s. (3 puntos).

Resolución:

a) Se puede resolver de dos formas:

1ª forma: Estudiamos el rango de la matriz determinada por las 4 ecuaciones.

$$rg\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \underset{Trans}{=} rg\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -5 & -5 & 4 \end{pmatrix} \underset{F_4\to -4F_3+F_4}{=} rg\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 8 & -1 & -5 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

El rango es 4 porque el determinante de la matriz que queda es (desarrollando por adjuntos de la última columna)

$$a_{34} \cdot A_{34} = 1 \cdot -\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 8 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -54 \neq 0.$$

Por tener rango 4, el sistema formado por las 4 ecuaciones no tiene solución, ya que

$$rg(A^*) = 4 \neq rg(A) = 3 \text{ (ya que } A \text{ es 4x3)}$$

Así, las rectas no tiene nigún punto en común, y como rg(A) = 3, las rectas tienen distinta dirección, luego las rectas se cruzan.

2ª Forma:

Estudiemos la posición relativa de las rectas. Para ello tomaremos el vector director de cada una de ellas y un vector que vaya de un punto de r a un punto de s ($\overrightarrow{PQ}$) :

$$\vec{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3j - 12k - 3i = (-3,3,-12) \to \text{Tomamos } \vec{v_r} = (-1,1,-4)$$

$$\vec{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -j - i = (-1,-1,0) \to \text{Tomamos } \vec{v_s} = (1,1,0)$$

$\overrightarrow{PQ}$: Tomando $z = 0$ en las ecuaciones de r,

$$P = \left(\frac{1}{4}, \frac{11}{4}, 0\right)$$

y tomando $x = 0$ en las ecuaciones de r,

$$Q = (0,5,4) \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{1}{4}, \frac{9}{4}, 4\right).$$

Podemos tomar en su lugar $\vec{w} = (-1,9,16)$, que tiene la misma dirección.

Estudiamos ahora el rango de

$$rg(\vec{v_r}, \vec{v_s}, \vec{w}) : \begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 9 & 16 \end{vmatrix} = 8 \neq 0.$$

Luego los tres vectores son linealmente independientes y por lo tanto $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ no tienen la misma dirección y además el vector que va de una recta a la otra no se encuentra en el plano determinado por $\vec{v}_r, \vec{v}_s$., por lo que las rectas se cruzan.

b) Para calcular la distancia de r a s, primero obtenemos el plano π_{rs} que contiene a r siendo paralelo a s. Entonces la distancia del plano π_{rs} a la recta s es la distancia entre rectas.

Tomamos los vectores directores de r y s y un punto de r :

$$\vec{v_r} = (-1,1,-4); \ \vec{v_s} = (1,1,0); \ P = (\frac{1}{4}, \frac{11}{4}, 0)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & x-\frac{1}{4} \\ 1 & 1 & y-\frac{11}{4} \\ -4 & 0 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow: 4x - 4y - 2z = -10 \Rightarrow \pi_{rs} : 2x - 2y - z = -5$$

Ahora tomamos un punto cualquiera de s ($Q = (0,5,4)$) y calculamos su distancia al plano π_{rs} :

$$d(Q, \pi_{rs}) = \frac{|2 \cdot 0 - 2 \cdot 5 - 4 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3 \ unidades.$$

Y esta es la distancia entre las rectas r y s.

c) El plano calculado en b) es paralelo a ambas rectas, por lo que su vector normal nos servirá,

$\vec{n} = (2,-2,-1)$. El plano que buscamos es $2x - 2y - z + D = 0$ (Falta averiguar D)

La distancia que le separa de ambas rectas (r y s) ha de ser la mitad de la calculada en b): 3/2

$$d(s,\pi) = d(Q,\pi) = \frac{|2\cdot 0 - 2\cdot 5 - 4 + D|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2\cdot|-14+D| = 3\cdot 3$$

$$\Rightarrow |-14+D| = \frac{9}{2} \Rightarrow \begin{cases} -14+D = \frac{9}{2} \Rightarrow D = \frac{37}{2} \\ -14+D = -\frac{9}{2} \Rightarrow \boxed{D = \frac{19}{2}} \end{cases}$$

$$d(r,\pi) = d(P,\pi) = \frac{\left|2\cdot\frac{1}{4} - 2\cdot\frac{11}{4} - 1\cdot 0 + D\right|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{|-5+D|}{3} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow |-5+D| = \frac{9}{2} \Rightarrow \begin{cases} -5+D = \frac{9}{2} \Rightarrow \boxed{D = \frac{19}{2}} \\ -5+D = -\frac{9}{2} \Rightarrow D = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Así pues, el valor de D que da una distancia de 3/2 a cada una de las rectas es $D = 19/2$.

Por lo que el plano π que buscamos es $2x - 2y - z + 19/2 = 0 \Rightarrow 4x - 4y - 2z = -19$.

JUN10, **PB2**

Sea r la recta de vector director (2,–1,1) que pasa por el punto $P = (0,3,-1)$. Se pide:

a) Hallar razonadamente la distancia del punto $A = (0,1,0)$ a la recta r . (4 puntos).
b) Calcular razonadamente el ángulo que forma la recta que pasa por los puntos P y A con la recta r en el punto P. (4 puntos).
c) Si Q es el punto donde la recta r corta al plano de ecuación $z = 0$, comprobar que el triángulo de vértices APQ tiene ángulos iguales en los vértices P y Q. (2 puntos).

Resolución:

a) Hallaremos el plano $\pi \perp$ a r que pasa por A. Después halaremos el punto A' intersección de r y π.

A' es el punto de r que está más próximo a A. Por eso la distancia de A a la recta r es la distancia entre los puntos A' y A.

El vector normal a π será el vector director de r : $\vec{n} = (2,-1,1)$. Con este vector normal y el punto A, construimos π :

$$\pi : 2x - y + z = D \longrightarrow 2\cdot 0 - 1 + 0 = D \longrightarrow D = -1$$

$$\pi : 2x - y + z = -1$$

Ahora hallamos A' :

Recta r

$$r : \begin{cases} x = 0 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \longrightarrow 2\cdot(2\lambda) - (3-\lambda) + (-1+\lambda) = -1 \longrightarrow 6\lambda = 3 \longrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

Sustituimos λ en la ecuación de r y ya tenemos A' :

$$A' = \left(1, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$d(A, A') = \left|\overrightarrow{AA'}\right| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{14}{4}} = \sqrt{\frac{7}{2}}$$

b) Para calcular el ángulo entre rectas tomamos sus vectores directores:

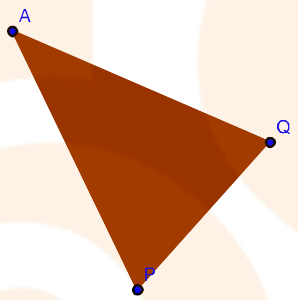
$$\overrightarrow{AP} = (0,2,-1); \overrightarrow{v_r} = (2,-1,1) \longrightarrow \cos\alpha = \frac{|(0,2,-1)\cdot(2,-1,1)|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{30}} = \frac{3\sqrt{30}}{30} = \frac{\sqrt{30}}{10}$$

$$\alpha = 56^{\circ}\, 47'\, 21''$$

c) Primero hallaremos Q :

Como $z = 0$, en las ecuaciones de r, $z = 0 = -1 + \lambda \longrightarrow \lambda = 1$

Sustituyendo en r, $Q = (2,2,0)$.



Tener ángulos iguales en P y en Q quiere decir que es isósceles, por lo que es equivalente a que $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{AQ}$ tengan el mismo módulo.

$$\left|\overrightarrow{AP}\right| = |(0,2,-1)| = \sqrt{5};\ \left|\overrightarrow{AQ}\right| = |(2,1,0)| = \sqrt{5}$$

Luego el triángulo es isósceles y los ángulos en P y en Q son iguales

SEP10, **PA2**

Se pide obtener razonadamente:

a) La ecuación del plano π que pasa por los puntos $O = (0,0,0)$, $A = (6,-3,0)$ y $B = (3,0,1)$. (3 puntos).

b) La ecuación de la recta r que pasa por el punto $P = (8,7,-2)$ y es perpendicular al plano π .(3 puntos).

c) El punto Q del plano π cuya distancia al punto P es menor que la distancia de cualquier otro punto del plano π al punto P. (4 puntos).

Resolución:

a) Lo construiremos con los vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y el punto O :

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & x \\ -3 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 9z - 6y - 3x = 0 \longrightarrow \pi : -x - 2y + 3z = 0$$

b) Su vector director ha de ser el normal del plano: $\vec{v}_r = (-1,-2,3)$.

Con P y con $\vec{v}_r$,

$$r : \begin{cases} x = 8 - \lambda \\ y = 7 - 2\lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases}$$

c) Buscamos el punto de π más próximo a P. Para encontrarlo usaremos la recta r perpendicular al plano π que pasa por P.

El punto Q será la intersección de la recta r con π.

Sustituimos un punto genérico de r en la ecuación de π :

$$\pi : -(8-\lambda) - 2(7-2\lambda) + 3(-2+3\lambda) = 0$$

$$\rightarrow 14\lambda = 28 \Rightarrow \lambda = 2. \text{ Sustituimos en } r : Q = (6,3,4)$$

SEP10, **PB2**

Dadas las dos rectas r y s de ecuaciones

$$r : \frac{x-4}{3} = \frac{y-4}{2} = z-4 \quad ; \quad s : x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

se pide calcular razonadamente:

a) Las coordenadas del punto P de intersección de las rectas r y s. (3 puntos).

b) El ángulo que forman las rectas r y s. (3 puntos).

c) Ecuación implícita $Ax + By + Cz + D = 0$ del plano π que contiene a las rectas r y s. (4 puntos).

Resolución:

a) Pasaremos las ecuaciones a paramétricas para igualar las coordenadas:

r : Punto $A = (4,4,4)$, vector $\vec{v}_r = (3,2,1)$. s : Punto $B = (0,0,0)$, vector $\vec{v}_s = (1,2,3)$

$$r : \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 4 + 2t \\ z = 4 + t \end{cases} \Rightarrow s : \begin{cases} x = s \\ y = 2s \\ z = 3s \end{cases},$$

donde t y s son los parámetros de cada una de las rectas.

Igualamos:

$$\begin{cases} 4 + 3t = s \\ 4 + 2t = 2s \\ 4 + t = 3s \end{cases}$$

Sustituimos la ec1 en la ec2 y en la ec3:

$$\Rightarrow \begin{cases} (\text{ec2}) \Rightarrow 4 + 2t = 2(4 + 3t) \rightarrow -4t = 4 \rightarrow t = -1; s = 1 \\ (\text{ec3}) \Rightarrow 4 + t = 3(4 + 3t) \rightarrow -8t = 8 \rightarrow t = -1; s = 1 \end{cases}$$

Como los valores de s y t coinciden, existe el punto de corte y lo averiguamos sustituyendo en las ecuaciones de una de las rectas (por ejemplo s):

$$P = (1, 2, 3)$$

b) Lo calcularemos con sus vectores directores:

$$\cos\alpha = \frac{|(3,2,1)\cdot(1,2,3)|}{\sqrt{14}\,\sqrt{14}} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7} \Rightarrow \alpha = 44^{\circ}\,24'\,55''$$

c) Tomemos los vectores $\vec{v}_r = (3,2,1)$, $\vec{v}_s = (1,2,3)$ y el punto $B = (0,0,0)$:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 2 & 2 & y \\ 1 & 3 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x - 8y + 4z = 0 \Rightarrow \pi : x - 2y + z = 0$$

Año 2009

JUN09, **P2**.**1**

Sean A, B y C los puntos de intersección del plano de ecuación $x + 4y - 2z - 4 = 0$ con los tres ejes coordenados OX, OY y OZ, respectivamente. Se pide calcular razonadamente:

a) El área del triángulo ABC. (1,1 puntos).

b) El perímetro del triángulo ABC. (1,1 puntos).

c) Los tres ángulos interiores del triángulo ABC. (1,1 puntos).

Resolución:

a) Calculemos los puntos A,B y C:

A tiene sus coordenadas $y = 0$, $z = 0$. B tiene sus coordenadas $x = 0$, $z = 0$ y C tiene sus coordenadas $x = 0$, $y = 0$

$$A \rightarrow x + 4\cdot 0 - 2\cdot 0 - 4 = 0 \rightarrow x = 4 \rightarrow A = (4, 0, 0)$$

$$B \rightarrow 0 + 4\cdot y - 2\cdot 0 - 4 = 0 \rightarrow 4y = 4 \rightarrow B = (0, 1, 0)$$

$$C \rightarrow 0 + 4\cdot 0 - 2z - 4 = 0 \rightarrow -2z = 4 \rightarrow C = (0, 0, -2)$$

Para calcular el área obtendremos los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$. El módulo de su producto vectorial es el área del paralelogramo que generan los 2 vectores.

El área del triángulo pedido es la mitad del área del paralelogramo citado.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{CA} = (4,0,2)\\ \overrightarrow{CB} = (0,1,2)\end{array}\right. \rightarrow \text{Área } ABC = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}\right\| =$$

$$= \frac{1}{2}|(-2,-8,4)| = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(-8)^2+4^2} = \frac{1}{2}\sqrt{84} = \sqrt{21}$$

b) Tenemos que calcular las medidas de los lados, que son

$$\left|\overrightarrow{CA}\right|, \left|\overrightarrow{CB}\right|, \left|\overrightarrow{AB}\right|$$

$$\left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{4^2+0^2+2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\,;\left|\overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{0^2+1^2+2^2} = \sqrt{5}\,;\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-4)^2+1^1+0^2} = \sqrt{17}$$

$$\textit{Perímetro } ABC = 2\sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{17} = 3\sqrt{5} + \sqrt{17} \approx 10.831$$

c) El ángulo sobre el vértice A viene determinado por

$$\overrightarrow{AC} = (-4,0,-2)\ ;\ \overrightarrow{AB} = (-4,1,0).$$

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{16+0+0}{\sqrt{17}\cdot 2\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{85}} \rightarrow \widehat{A} = \arccos\left(\frac{8}{\sqrt{85}}\right) \approx 29.805^{\circ}$$

El ángulo sobre el vértice B viene determinado por

$$\overrightarrow{BC} = (0,-1,-2) y \overrightarrow{BA} = (4,-1,0).$$

$$\cos B = \frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BA}\right|} = \frac{0+1+0}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{85}} \rightarrow \widehat{B} = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{85}}\right) \approx 83.772^{\circ}$$

El ángulo sobre el vértice C viene determinado por

$$\overrightarrow{CA} = (4,0,2)\ ;\ \overrightarrow{CB} = (0,1,2).$$

$$\cos C = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{0+0+4}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{2}{5} \rightarrow \widehat{B} = \arccos\left(\frac{2}{5}\right) \approx 66.423^{\circ}$$

JUN09, **P2.2**

Dados los puntos $O(0,0,0)$, $A(4,4,0)$ y $P(0,0,12)$, se pide obtener razonadamente:

a) La ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular al plano de ecuación $z = 0$. (1 punto).

b) La ecuación de un plano que cumpla las dos condiciones siguientes:

– Pase por P y por un punto Q de la recta de ecuación $x = y = 4$

– Sea perpendicular a la recta que pasa por O y Q. (2,3 puntos por hallar uno de los dos planos solución).

Resolución:

a) El plano $z = 0$ tiene por vector normal $\vec{n} = (0,0,1)$. La recta pedida es

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$$

b) Sea $Q = (4,4,\lambda)$. $\overrightarrow{OQ} = (4,4,\lambda)$. Por lo que el plano pedido tendrá como vector normal $(4,4,\lambda)$:

La ecuación del plano tendrá la forma $4x + 4y + \lambda z = d$. Ahora bien, si ha de pasar por P y por Q:

$$P : 4 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + \lambda \cdot 12 = d \quad \rightarrow \quad 12\lambda = d$$
$$Q : 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + \lambda \cdot \lambda = d \quad \rightarrow \quad 32 + \lambda^2 = d$$

Resolvemos por sustitución:

$$32 + \lambda^2 = 12\lambda \quad \rightarrow \quad \lambda^2 - 12\lambda + 32 = 0. \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 8 \rightarrow d_1 = 96 \\ \lambda_2 = 4 \rightarrow d_2 = 48 \end{cases}$$

Entonces las 2 posibilidades para el plano pedido son

$$\pi_1 : 4x + 4y + 8z = 96. \; y \quad \pi_2 : 4x + 4y + 4z = 48$$

Simplificadas:

$$\pi_1 : x + y + 2z = 24. \; y \quad \pi_2 : x + y + z = 12$$

SEP09, **P2.1**

Dados los puntos $P = (3,1,4)$ y $Q = (1,0,1)$, y el plano π de ecuación $\pi : x - 2y + 2z + 5 = 0$, se pide calcular razonadamente :

a) La ecuación de la recta r que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π. (1,4 puntos).

b) La ecuación de los planos que pasan por el punto P y son perpendiculares al plano π. (1 punto).

c) La ecuación del plano π' que pasa por los puntos P y Q y es perpendicular al plano π. (0,9 puntos).

Resolución:

a) Si la recta r es perpendicular a π, su vector director será el vector normal de π.: $\vec{d_r} = (1,-2,2)$.

Con el punto P y el vector $\vec{d_r}$

$$r \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases} \rightarrow \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-4}{2} \rightarrow r : \begin{cases} 2x + y \quad\quad - 7 = 0 \\ \quad 2y + 2z - 10 = 0 \end{cases}$$

b) Los planos buscados son todos aquellos que contienen a la recta del apartado a).

Entonces, se trata de planos que pasan por el punto P y tienen como vectores directores a $\vec{v_r}$, y a cualquier otro vector $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3)$:

Planos pedidos:

$$\begin{cases} x = 3 + \lambda + a\beta \\ y = 1 - 2\lambda + b\beta \\ z = 4 + 2\lambda + c\beta \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} x-3 & 1 & a \\ y-1 & -2 & b \\ z-4 & 2 & c \end{vmatrix} = 0$$

$$(-2b - 2c)x + (2a - c)y + (2a + b)z + (2b - 10a + 7c) = 0$$

siendo a,b,c números cualesquiera, no todos nulos (ya que representan al vector $\vec{u}$).

Resolución alternativa:

Dado que se trata de todos los planos que contienen a la recta r, esto se llama el haz de planos de r. El haz de planos se construye realizando una Combinación Lineal de las 2 ecuaciones generales de la recta r :

$$m(2x + y - 7) + n(2y + 2z - 10) = 0 \rightarrow 2mx + (m + 2n)y + 2nz + (-7m - 10n) = 0.$$

c) Expongo 2 formas de resolución, la 2ª es más sencilla, aunque es muy útil repasar y comprender ambas.

Sea $ax + by + cz + d = 0$ la ecuación de π' :

Como π' contiene a $Q \rightarrow a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 1 + d = 0 \rightarrow a + c + d = 0$

Como π' contiene a $P \rightarrow a \cdot 3 + b \cdot 1 + c \cdot 4 + d = 0 \rightarrow 3a + b + 4c + d = 0$

Como π' es perpendicular a π, sus vectores normales son perpendiculares:

$$(a,b,c) \cdot (1,-2,2) = a - 2b + 2c = 0$$

Resolvamos el sistema que hemos obtenido:

$$\begin{cases} a + c + d = 0 \\ 3a + b + 4c + d = 0 \\ a - 2b + 2c = 0 \end{cases}.$$

Como no es un sistema cuadrado, lo resolveremos por Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \rightarrow F_2 + (-3)F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 + (-1)F_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_3 \rightarrow F_3 + 2F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Como tenemos más ecuaciones que incógnitas, tomaremos d como parámetro:

$$(ec3) \quad 3c - 5d = 0 \rightarrow c = \frac{5d}{3}$$

$$(ec2) \quad b + c - 2d = 0 \rightarrow b + \frac{5d}{3} - 2d = 0 \rightarrow b = 2d - \frac{5d}{3} = \frac{d}{3}$$

$$(ec1) \quad a + c + d = 0 \rightarrow a = -c - d = -\frac{5d}{3} - d = \frac{-8d}{3}$$

La ecuación del plano π' queda:

$$\frac{-8d}{3}x + \frac{d}{3}y + \frac{5d}{3}z + d = 0$$

donde d puede tomar un valor cualquiera (saldrían ecuaciones proporcionales que representan el mismo plano).

Si tomamos por ejemplo $d = 3$: $-8x + y + 5z + 3 = 0$.

Resolución alternativa:

Como π' es perpendicular a π, el vector normal de π está contenido en π' ($\overrightarrow{n_\pi} = (1,-2,2)$).

Así conocemos 2 puntos y un vector de π'. Restamos los dos puntos y así obtenemos otro vector de π' :

$$\overrightarrow{QP} = P - Q = (2,1,3).$$

Construimos ahora el plano π' con el punto $Q = (1,0,1)$ y los dos vectores anteriores:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y & -2 & 1 \\ z-1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -8x + y + 5z + 3 = 0.$$

NOTA: Existiría una tercera resolución posible cogiendo la ecuación del haz de planos del apartado b), y sustituyendo en ella las coordenadas de Q. Resolvemos los valores de m y n, y con ellos obtenemos la ecuación de π'.

SEP09, **P2.2**

Sea π el plano de ecuación : $3x + 2y + 4z - 12 = 0$. Calcular razonadamente:

a) Las ecuaciones de los dos planos paralelos a π que distan 5 unidades de π. (1,2 puntos).

b) Los tres puntos A, B y C, intersección del plano π con cada uno de los tres ejes coordenados. (0,6 puntos).

c) Los tres ángulos del triángulo ABC. (1,5 puntos).

Resolución:

a) Como son planos paralelos a π, su ecuación es π' : $3x + 2y + 4z + \mathrm{d} = 0$.

Dado un punto de π, $P = (4,0,0)$, su distancia al plano π' es 5 unidades:

$$d(P,\pi') = \frac{|3\cdot 4 + 2\cdot 0 + 4\cdot 0 + d|}{\sqrt{3^2+2^2+4^2}} = 5 \qquad \rightarrow |3\cdot 4 + 2\cdot 0 + 4\cdot 0 + d| = 5\cdot\sqrt{29}$$

2 posibilidades:

$$\begin{cases} 3\cdot 4 + 2\cdot 0 + 4\cdot 0 + d = 5\cdot\sqrt{29} \rightarrow d = 5\sqrt{29} - 12 \approx 14.926 \\ 3\cdot 4 + 2\cdot 0 + 4\cdot 0 + d = -5\cdot\sqrt{29} \rightarrow d = -5\sqrt{29} - 12 \approx -38.926 \end{cases}$$

Así, los planos pedidos son:

$$\begin{cases} \pi'_1 : 3x + 2y + 4z + 5\sqrt{29} - 12 = 0 \\ \pi'_2 : 3x + 2y + 4z - 5\sqrt{29} - 12 = 0 \end{cases}$$

b) Un punto del eje OX tiene las coordenadas *y*,*z* nulas:

$$(a,0,0) \to 3a + 2\cdot 0 + 4\cdot 0 - 12 = 0 \to a = 4.$$

El punto de corte con OX es $A = (4,0,0)$.

Análogamente,

$$(0,b,0) \to 3\cdot 0 + 2\cdot b + 4\cdot 0 - 12 = 0 \to b = 6.$$

El punto de corte con OY es $B = (0,6,0)$.

$$(0,0,c) \to 3\cdot 0 + 2\cdot 0 + 4\cdot c - 12 = 0 \to c = 3.$$

El punto de corte con OY es $C = (0,0,3)$.

c) Para calcular los ángulos calculemos los vectores que determinan los lados.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-4,6,0) : \overrightarrow{AC} = (-4,0,3).$$

Con las 2 expresiones del producto escalar: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$:

$$(-4)\cdot(-4) + 6\cdot 0 + 3\cdot 0 = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{16}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{16}{\sqrt{16+36}\cdot\sqrt{16+9}} = \frac{16}{\sqrt{52}\cdot 5} = \frac{16}{10\sqrt{13}} = \frac{8}{5\sqrt{13}}$$

$$\alpha = \arccos\frac{8}{5\sqrt{13}} \approx 63´656^{o}$$

Ángulo sobre el vértice B :

$$\overrightarrow{BA} = (4,-6,0);\ \overrightarrow{BC} = (0,-6,3).$$

Igual que en el ángulo anterior:

$$\cos\beta = \frac{36}{\sqrt{52}\cdot\sqrt{45}} = \frac{36}{2\sqrt{13}\cdot 3\sqrt{5}} = \frac{36}{6\sqrt{65}} = \frac{6}{\sqrt{65}}$$

$$\beta = \arccos\frac{6}{\sqrt{65}} \approx 41´909^{o}$$

Ángulo sobre el vértice C :

$$\overrightarrow{CA} = (4,0,-3);\ \overrightarrow{CB} = (0,6,-3)$$

$$\cos\gamma = \frac{9}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{45}} = \frac{9}{15\sqrt{5}} = \frac{3}{5\sqrt{5}}$$

$$\gamma = \arccos\frac{3}{5\sqrt{5}} \approx 74´435^{\circ}$$

Comprobación:

$$\alpha+\beta+\gamma \approx 63.656^{\circ}+41.909^{\circ}+74.435^{\circ} = 180.0^{\circ}$$

Año 2008

JUN08, P2.1

Se dan los puntos $A(2,1,1)$ y $B(1,0,-1)$, y la recta r de ecuación $r : x-5 = y = \frac{z+2}{-2}$. Se pide calcular razonadamente:

a) El punto C de r que equidista de A y B.

b) El área del triángulo ABC.

Resolución:

a) Como C es un punto de r, vamos a escribir su forma genérica a partir de la ecuación paramétrica

$$\frac{x-5}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z+2}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x = 5+t \\ y = 0+t \\ z = -2-2t \end{cases} \Rightarrow C = (5+t, t, -2-2t)$$

Ahora se ha de cumplir que

$$d(A,C) = d(B,C) \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$$

$$\sqrt{(3+t)^2+(t-1)^2+(-3-2t)^2} = \sqrt{(4+t)^2+t^2+(-1-2t)^2}$$

$$9+6t+t^2+t^2-2t+1+9+12t+4t^2 = 16+8t+t^2+t^2+1+4t+4t^2$$

$$6t^2+16t+19 = 6t^2+12t+17 \rightarrow 4t = -2 \rightarrow t = \frac{-1}{2}.$$

Sustituyendo en las ecuaciones de r obtenemos C

$$C = (5+t, t, -2-2t) = (\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}, -1)$$

Otra forma de resolverlo:

Los puntos que equidistan de A y B forman su plano mediatriz Vamos a obtenerlo:

Sea P un punto cualquiera $P(x,y,z)$,

$$d(P,A) = d(P,B) \quad \Rightarrow (x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = (x-1)^2+y^2+(z+1)^2$$

$$x^2-4x+4+y^2-2y+1+z^2-2z+1 = x^2-2x+1+y^2+z^2+2z+1$$

$$-2x-2y-4z+4 = 0 \quad \Rightarrow x+y+2z-2 = 0.$$

El punto C que buscamos se encuentra en la intersección de este plano mediatriz y la recta r

$$r : x-5 = y = \frac{z+2}{-2} \qquad \Rightarrow r : \begin{cases} x-y = 5 \\ 2y+z = -2 \end{cases}$$

Así, C es la solución del sistema:

$$\begin{cases} x+y+2z = 2 \\ x-y = 5 \\ 2y+z = -2 \end{cases}.$$

Este sistema se puede resolver por Gauss, por Cramer, o expresándolo en forma matricial (así se hace con calculadora gráfica). Has de saber resolverlo de cualquiera de estas formas. Aquí lo resolveremos por sustitución:

$$(2^a ec) \to x = y+5. \qquad (3^a ec) \to z = -2y-2.$$

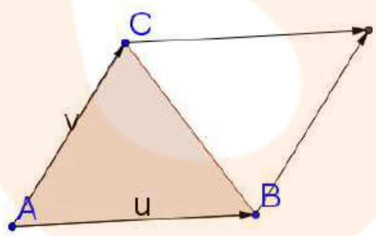
Sustituyendo en la ec1:

$$y+5+y+2(-2y-2) = 2 \qquad \to -2y = 1 \qquad \to y = -\frac{1}{2}.$$

$$x = -\frac{1}{2}+5 = \frac{9}{2} \qquad\qquad z = -2\left(-\frac{1}{2}\right)-2 = -1.$$

$$Solución : \qquad C = \left(\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$$

b) El área del triángulo ABC resulta ser la mitad del área del paralelogramo definido por $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.



$$\overrightarrow{AB} = (-1,-1,-2); \overrightarrow{AC} = \left(\frac{5}{2}, \frac{-3}{2}, -2\right), \quad Área(ABC) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 2 \end{vmatrix} = (-1,-7,4) \Rightarrow ÁreaABC = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+(-7)^2+4^2} = \frac{1}{2}\sqrt{66}$$

JUN08, **P2.2**

Dada la recta r, intersección de los planos $y+z=0$ y $x-2y-1=0$, y la recta s de ecuación $\frac{x}{2} = y-1 = -z+3$, se pide:

a) Obtener, razonadamente, las ecuaciones paramétricas de r y s.

b) Explicar de un modo razonado cuál es la posición relativa de las rectas *r* y *s*.

c) Calcular la distancia entre las rectas *r* y *s*.

Resolución:

a) Para la recta *r* resolvemos el SCI

$$\begin{cases} x-2y-1=0 \\ y+z=0 \end{cases},\ \text{tomando } z=\lambda, \qquad (ec2)\ y=-\lambda$$

$$\Rightarrow (ec1)\ x+2\lambda-1=0 \rightarrow x=1-2\lambda \qquad \Rightarrow r: \begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

Para la recta *s* resolvemos el SCI

$$\begin{cases} x-2y \quad =-2 \\ \quad y+z=4 \end{cases},\ \text{tomando } y=\beta, \qquad s: \begin{cases} x=-2+2\beta \\ y=\beta \\ z=4-\beta \end{cases}$$

b) Para analizar la posición relativa compararemos los vectores directores:

$$\vec{v_r}=(-2,-1,1)\ y\ \vec{v_s}=(2,1,-1)\ :\ \frac{-2}{2}=\frac{-1}{1}=\frac{1}{-1}$$

Son vectores proporcionales, por lo que tienen la misma dirección. Entonces se trata de rectas paralelas o coincidentes.

Para comprobarlo escogemos un punto cualquiera de la recta r (tomamos $\lambda = 0$ y lo llamamos P) P = (1,0,0).

Ahora vemos si pertenece o no a *s:*

$$s: \begin{cases} 1=-2+2\beta \\ 0=\beta \\ 0=4-\beta \end{cases}$$

sistema que no tiene solución para β, y por eso P no pertenece a la recta *s*.

Entonces, las rectas son paralelas.

c) Dado que se trata de rectas paralelas, escogemos un punto cualquiera de la recta *r* ($P = (1,0,0)$) y calculamos su distancia a la recta *s*.

Escogiendo un punto cualquiera de *s* ($Q = (-2,0,4)$), la distancia de P a *s* resulta ser la altura del paralelogramo definido por $\overrightarrow{QP}$ y $\overrightarrow{v_s}$.

Y la altura es el área ($\left|\overrightarrow{QP}\times\overrightarrow{v_s}\right|$) dividido entre la longitud de la base.($\left|\overrightarrow{v_s}\right|$) :

$$d(P,s) = \frac{\left|\overrightarrow{QP} \times \vec{v_s}\right|}{\left|\vec{v_s}\right|} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \right\|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{|(4,-5,3)|}{\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{\sqrt{16+25+9}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{50}{6}} = \sqrt{\frac{25}{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

SEP08, **P2.1**

Dados los dos planos $\pi_1 : x+y+z=3$ y $\pi_2 : x+y-\alpha z=0$, se pide calcular razonadamente:

a) El valor de α para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares y, para este valor de α , obtener las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de esos dos planos. (1,5 puntos).

b) El valor de α para que los planos 1 y 2 sean paralelos y, para este valor de α , obtener la distancia entre los dos planos π_1 y π_2. (1,8 puntos).

Resolución:

a) Los vectores normales a los planos son $v_1 = (1,1,1)$ y $v_2 = (1,1,-\alpha)$. Los planos serán perpendiculares cuando los vectores v_1 y v_2 lo sean (su producto escalar ha de ser 0).

$$v_1 \cdot v_2 = 1+1-\alpha = 0 \qquad \Rightarrow \alpha = 2.$$

Vamos a obtener ahora (con $\alpha = 2$) la recta intersección de ambos planos:

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y+z = 3 \\ x+y-2z = 0 \end{array} \right. \underset{F_2 \to (-1)\cdot F_1 + F_2}{\sim} \left\{ \begin{array}{r} x+y+z = 3 \\ -3z = -3 \end{array} \right. \to r : \left\{ \begin{array}{l} x = 2-\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{array} \right.$$

b) Los planos serán paralelos cuando sus vectores normales lo sean. Para ser paralelos han de ser proporcionales:

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{-\alpha} \qquad \Rightarrow \alpha = -1.$$

Para calcular la distancia entre planos paralelos (con $\alpha = -1$), escogemos un punto del plano π_1 ($P = (1,1,1)$) y calculamos su distancia al plano π_2 :

$$d(P,\pi_2) = \frac{|ap_1+bp_2+cp_3+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1+0|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}.$$

También se puede calcular la distancia del punto al plano con el siguiente procedimiento:

1º) Obtenemos la recta $\perp$ al plano π_2 que pasa por P :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 1+\lambda \end{array} \right.$$

2º) Obtenemos el punto Q intersección de la recta y el plano (sustituyendo las coordenadas de un punto de la recta en la ecuación del plano):

$$(1+\lambda)+(1+\lambda)+(1+\lambda)=0 \quad \rightarrow \lambda=-1. \rightarrow \begin{cases} x=1-1=0 \\ y=1-1=0 \\ z=1-1=0 \end{cases} \rightarrow Q=(0,0,0)$$

3º) La distancia de P al plano es la distancia de P a Q

$$d(P,\pi_2)=d(P,Q)=\left|\overrightarrow{QP}\right|=\sqrt{1^2+1^1+1^2}=\sqrt{3}.$$

SEP08, **P2.2**

Dados el punto $O=(0,0,0)$ y el plano $\pi: x+y+z=6$, se pide calcular razonadamente:

a) La ecuación de la recta r que pasa por O y es perpendicular al plano π. (1,1 puntos).

b) Las coordenadas del punto simétrico de O respecto del plano π. (1,1 puntos).

c) La ecuación del plano que contiene al eje X y a la recta r. (1,1 puntos).

Resolución:

a) Si es $\perp \pi$ su vector director será

$$\vec{v}=(1,1,1) \rightarrow r: \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \rightarrow x=y=z$$

b) Calculemos primero el punto M intersección de la recta r y el plano π :

$$\lambda+\lambda+\lambda=6 \rightarrow \lambda=2 \rightarrow M=(2,2,2)$$

El punto $O´$ que buscamos es

$$O´=M+\overrightarrow{OM}=(2,2,2)+(2,2,2)=(4,4,4).$$

c) Un punto del eje X es $O=(0,0,0)$ (de hecho también pertenece a la recta r, es el punto de corte de ambas rectas)

Un vector del eje X es $\vec{u}=(1,0,0)$ y de la recta r es $\vec{v}=(1,1,1)$. Ya tenemos un punto y dos vectores del plano que buscamos:

$$\pi´: \begin{cases} x=0+\lambda+\beta \\ y=0+0\lambda+\beta \\ z=0+0\lambda+\beta \end{cases} = \begin{cases} x=\lambda+\beta \\ y=\beta \\ z=\beta \end{cases}$$

Para obtener la ecuación general resolvemos

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -y + z = 0$$

Año 2007

JUN07, **P2.1**

Dadas las rectas *r* y *s*, que se cortan, de ecuaciones

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{2y-1}{-6} = \frac{2z-3}{6} \quad ; \quad s: \frac{x-3}{-2} = \frac{2y+3}{2} = \frac{z-1}{4}$$

se pide calcular:

a) El punto *P* de corte de las rectas *r* y *s*.

b) Un vector direccional de *r* y otro de *s*, y el ángulo α que forman las rectas *r* y *s* en el punto de corte *P*.

c) La ecuación implícita $ax + by + cz + d = 0$ del plano π que contiene a las rectas *r* y *s*.

RESOLUCIÓN:

a) Tomaremos las ecuaciones paramétricas, a partir de punto y vector

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1/2}{-3} = \frac{z-3/2}{3} \; ; \; s: \frac{x-3}{-2} = \frac{y+3/2}{1} = \frac{z-1}{4}$$

En forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1/2-3t \\ z = 3/2+3t \end{cases}, \qquad s: \begin{cases} x = 3-2s \\ y = -3/2+s \\ z = 1+4s \end{cases}$$

Igualamos las coordenadas

$$\begin{cases} 1+2t = 3-2s \\ 1/2-3t = -3/2+s \\ 3/2+3t = 1+4s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2t+2s = 2 \\ -3t-s = -2 \\ 3t-4s = -1/2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t+s = 1 \\ 3t+s = 2 \\ 6t-8s = -1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & -8 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -14 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2^{a}ec): 2s = 1 \quad \rightarrow s = \frac{1}{2} \quad \rightarrow (1^{a}ec): t + \frac{1}{2} = 1 \quad \rightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Sustituyendo *t* en las ecuaciones de *r* (o el valor de *s* en las ecuaciones de *s*)

$$P = (2, -1, 3)$$

b) Sean $\vec{v} = (2,-3,3)$ y $\vec{u} = (-2,1,4)$ los vectores de r y s respectivamente (obtenidos en **a**))

Con la fórmula del producto escalar obtenemos el ángulo que forman:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{|-4-3+12|}{\sqrt{4+9+9}\cdot\sqrt{4+1+16}} = \frac{5}{\sqrt{22}\cdot\sqrt{21}} \approx 0.23262$$

$$\rightarrow \alpha = ar\cos(0.23262) = 76.55º$$

c) Como el plano π contiene a ambas rectas, el producto vectorial de sus vectores directores será un vector normal al plano:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -15\vec{i} - 14\vec{j} - 4\vec{k} = (-15,-14,-4)$$

Podemos tomar como vector normal a π el vector (15,14,4)

$$\pi : 15x + 14y + 4z + D = 0$$

Para obtener D sustituimos el punto P, que ha de verificar la ecuación de π

$$15\cdot 2 + 14\cdot(-1) + 4\cdot 3 + D = 0 \quad \rightarrow 30 - 14 + 12 + D = 0 \quad \rightarrow D = -28$$

$$\rightarrow 15x + 14y + 4z - 28 = 0$$

JUN07, **P2.2**

Dados el punto $Q = (3,-1,4)$ y la recta r de ecuación paramétrica $r : x = -2 + 3\lambda$, $y = -2\lambda$, $z = 1 + 4\lambda$, se pide:

a) Hallar la distancia del punto Q a la recta r.

b) Justificar que la recta s que pasa por Q y tiene a (1,–1,1) como vector direccional, no corta a r.

c) Calcular la distancia entre las rectas r y s

RESOLUCIÓN:

a) Procedimiento:
- 1º Obtenemos el plano $\perp$ a r que pasa por Q (π).
- 2º Calculamos el punto de corte de recta y plano (P)
- 3º Calculamos la distancia de P a Q.

1º) Vector de r : (3,–2,4)   Plano $3x - 2y + 4z + D = 0$. Para averiguar D, sustituimos el punto Q

$$3\cdot 3 - 2\cdot(-1) + 4\cdot 4 + D = 0 \rightarrow D = -27 \rightarrow \pi : 3x - 2y + 4z - 27 = 0$$

2º) Para calcular el punto de corte de r y π sustituimos las coordenadas de r en la ecuación de π

$$3\cdot(-2+3\lambda) - 2\cdot(-2\lambda) + 4(1+4\lambda) - 27 = 0$$

$$-6 + 9\lambda + 4\lambda + 4 + 16\lambda - 27 = 0 \quad \rightarrow 29\lambda = 29 \quad \rightarrow \lambda = 1$$

Sustituyendo $\lambda = 1$ en las ecuaciones de r : $P = (1,-2,5)$

3º)

$$d(r,Q) = d(P,Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}.$$

b) Obtenemos la recta *s* en paramétricas

$$s : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + t \end{cases}$$

Para intentar averiguar el punto de corte, igualamos las coordenadas de ambas rectas: (han de tener distinto parámetro):

$$\begin{cases} -2 + 3\lambda = 3 + t \\ -2\lambda = -1 - t \\ 1 + 4\lambda = 4 + t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -t + 3\lambda = 5 \\ t - 2\lambda = -1 \\ -t + 4\lambda = 3 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

(3ªec) $0\lambda = -6$ .Luego el sistema es Incompatible y por lo tanto no hay punto de corte.

c) Para calcular la distancia entre 2 rectas que se cruzan (sabemos que no son paralelas porque sus vectores directores no son proporcionales), seguimos el siguiente procedimiento:

1º Obtenemos el plano que contiene a la recta *r* y es paralelo a la recta *s* (lo llamaremos π_1).
2º Escogemos un punto cualquiera de *s* y calculamos su distancia al plano calculado.

1º) El vector normal de π_1 se obtiene mediante el producto vectorial de los vectores de *r* y *s* (es $\perp$ a ambos).

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = j - k + 2i = (2,1,-1). \qquad \rightarrow \pi_1 : 2x + y - z + D = 0$$

Para averiguar *D*, sustituimos un punto de la recta *r* : $R = (-2,0,1)$

$$2 \cdot (-2) + 0 - 1 + D = 0 \Rightarrow -5 + D = 0 \Rightarrow D = 5 \Rightarrow \pi_1 : 2x + y - z + 5 = 0.$$

2º) Un punto de *s* es $S = (3,-1,4)$ y su distancia al plano viene dado por la expresión

$$d(S,\pi_1) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 4 + 5|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \frac{6\sqrt{6}}{6} = \sqrt{6}$$

SEP07, **P2.1**

Dado el plano $\pi : 2x + y + 3z - 1 = 0$ y el punto $Q(2,1,3)$, se pide calcular:

a) La distancia del punto Q al plano π.

b) El área del triángulo Δ cuyos vértices P_1, P_2 y P_3 son los puntos de intersección del plano π con los ejes coordenados.

c) El volumen del tetraedro de vértices P_1, P_2, P_3 y Q.

RESOLUCIÓN:

a) Utilizamos la fórmula correspondiente

$$d(Q,\pi) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 + 3 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{13}{\sqrt{14}}.$$

b) Sea P_1 el punto sobre el eje OX, entonces $P_1 = (a,0,0)$.

Para que P_1 esté en el plano ha de cumplir su ecuación:

$$2a + 0 + 3 \cdot 0 - 1 = 0 \quad \rightarrow a = 1/2 \quad \rightarrow P_1 = (1/2, 0, 0)$$

Análogamente

$$P_2 = (0, b, 0) \rightarrow 2 \cdot 0 + b + 3 \cdot 0 - 1 = 0 \quad \rightarrow b = 1 \rightarrow P_2 = (0, 1, 0)$$

$$P_3 = (0, 0, c) \quad \rightarrow 2 \cdot 0 + 0 + 3 \cdot c - 1 = 0 \quad \rightarrow c = 1/3 \quad \rightarrow P_3 = (0, 0, 1/3)$$

Tomando los vectores $\overrightarrow{P_1P_3}$ y $\overrightarrow{P_1P_2}$, el módulo de su producto vectorial resulta ser el área del paralelogramo que determinan. El triángulo pedido resulta ser la mitad:

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{P_1P_3} \times \overrightarrow{P_1P_2}\right| = \frac{1}{2}\left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{14}{36}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{14}}{6} = \frac{\sqrt{14}}{12}$$

c) El producto mixto de los vectores $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$ y $\overrightarrow{P_1Q}$ nos da el volumen del paralelepípedo que generan.

Como la base del tetraedro resulta ser la mitad, habrá que multiplicar por 1/2.

Además, como el tetraedro es un cuerpo piramidal, su volumen es 1/3 del prisma correspondiente.

Entonces el volumen pedido es 1/6 del resultado del producto mixto.

$$V = \frac{1}{6}\left\| \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2} & 1 & 3 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{6} \cdot \frac{13}{6} = \frac{13}{36}$$

SEP07, **P2.2**

Dados los planos de ecuaciones : $\pi_1 : x + 2y + z + 3 = 0$, y $\pi_2 : 2x + y - z - 6 = 0$,

a) Calcular el ángulo α que forman los planos π_1 y π_2 .

b) Calcular la ecuación paramétrica de la recta *r*, intersección de los planos π_1 y π_2

c) Comprobar que el plano π de ecuación $x + y - 1 = 0$ es el plano bisector de π_1 y π_2 , es decir, π forma un ángulo $\alpha/2$ con cada uno de los planos π_1 y π_2.donde α es el ángulo obtenido en el apartado a).

RESOLUCIÓN:

a) El ángulo entre los plano coincide con el ángulo que forman sus rectas normales. Tomamos los vectores correspondientes:

$$\cos\alpha = \frac{|(1,2,1)\cdot(2,1,-1)|}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{4+1+1}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad \to \alpha = 60^{\circ}.$$

b) Hemos de resolver el sistema formado por sus ecuaciones:

$$\begin{cases} x+2y+z+3=0 \\ 2x+y-z-6=0 \end{cases}, \qquad Gauss: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 12 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \qquad \text{Tomando } z=\lambda, \qquad \to y=-\lambda-4 \qquad \to x=\lambda+5$$

Solución:

$$r : \{(\lambda+5, -\lambda-4, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

c) Calculemos el ángulo α_1 entre π_1 y π :

$$\cos\alpha_1 = \frac{|(1,2,1)\cdot(1,1,0)|}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{1+1}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \to \alpha_1 = 30^{\circ}$$

Y el ángulo α_2 entre π y π_2 :

$$\cos\alpha_2 = \frac{|(1,1,0)\cdot(2,1,-1)|}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{4+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \to \alpha_2 = 30^{\circ}$$

Año 2006

JUN06, **P2A**

En el espacio se consideran:

• La recta *r* intersección de los planos de ecuaciones implícitas: $x + y - z = 5$ y $2x + y - 2z = 2$.

• Y la recta s que pasa por los puntos $P = (3,10,5)$ Y $Q = (5,12,6)$. Se pide:

a) Calcular las ecuaciones paramétricas de la recta *r* y de la recta *s*.

b) Calcular el punto H intersección de *r* y *s* y el ángulo *α*, que determinan *r* y *s*.

c) Calcular los puntos *M* y *N* de la recta *r* para los cuales el área de cada uno de los triángulos de vértices *PQM* y *PQN* es 3 unidades de área.

RESOLUCIÓN:

a) Recta *r*: Se puede pasar a forma paramétrica resolviendo el sistema

$$\begin{cases} x+y-z = 5 \\ 2x+y-2z = 2 \end{cases} \rightarrow (F_2 \rightarrow F_2+(-2)F_1) \rightarrow \begin{cases} x+y-z = 5 \\ -y \quad = -8 \end{cases}$$

Tomando $z = t$,

$$y = 8,\ x+8-t = 5 \rightarrow x = t-3.\ \text{Solución } r: \begin{cases} x = t-3 \\ y = 8 \\ z = t \end{cases}$$

Recta s: El vector director será $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2,2,1)$.

Con el punto P y el vector $\overrightarrow{PQ}$:

$$s: \begin{cases} x = 3+2t \\ y = 10+2t \\ z = 5+t \end{cases}$$

b) Para hallar la intersección, cambiamos en la recta s el parámetro "t" por "s" e igualamos las coordenadas.

$$\begin{cases} t-3 = 3+2s \\ 8 = 10+2s \\ t = 5+s \end{cases}$$

Por la Ec2, $s = -1$, y en la ec3 obtenemos $t = 4$.

La ec1 también se cumple: $4-3 = 3+2(-1)$

Sustituimos $t = 4$ en r (o $s = -1$ en s) y tenemos el punto intersección

$$H = (1,8,4)$$

Averiguaremos el ángulo con la fórmula del producto escalar:

$$\cos\alpha = \frac{|(1,0,1)\cdot(2,2,1)|}{\sqrt{2}\cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^{\circ}$$

c) Los puntos M y N tendrán la forma $(t-3,\ 8,\ t)$, cada uno con un valor de t distinto.

Para calcular el área del triángulo PQM, hay que calcular

$$\overrightarrow{PQ} = Q-P = (2,2,1),\ \overrightarrow{PM} = M-P = (t-6,-2,t-5).$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PM}\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ t-6 & -2 & t-5 \end{vmatrix}\right\| =$$

$$= \frac{1}{2}|(2t-8,-t+4,-2t+8)| = \frac{1}{2}\sqrt{(2t-8)^2+(4-t)^2+(8-2t)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4t^2 - 32t + 64 + 16 - 8t + t^2 + 64 - 32t + 4t^2} = \frac{1}{2}\sqrt{9t^2 - 72t + 144}.$$

Igualamos el valor del área a 3 y resolvemos:

$$\frac{1}{2}\sqrt{9t^2 - 72t + 144} = 3 \quad \to \quad \sqrt{9t^2 - 72t + 144} = 6 \quad \to \quad 9t^2 - 72t + 144 = 36$$

$$9t^2 - 72t + 108 = 0 \quad \to \quad t^2 - 8t + 12 = 0 \quad \to \quad \begin{cases} t = 6 \\ t = 2 \end{cases}$$

Valores que sustituidos en la ecuación de r nos da los puntos M y N.

$$M = (3,8,6);\ N = (-1,8,2)$$

JUN06, **P3A**

Dados los puntos

$$A = (4,-4,9), B = (2,0,5), C = (4,2,6), L = (1,1,4), M = (0,2,3), N = (3,0,5)$$

se pide:

a) Calcular la distancia d del punto C al punto medio del segmento de extremos A, B y el área S del triángulo de vértices A, B, C.

b) Calcular las ecuaciones implícitas del plano π que pasa por los puntos A, B, C y del plano π’ que pasa por los puntos L, M, N.

c) Calcular la ecuación paramétrica de la recta r intersección de los planos π y π’ y el ángulo α que determinan los planos π y π’.

RESOLUCIÓN:

a) Calculamos el punto medio de $\overline{AB}$

$$M_{AB} = \left(\frac{4+2}{2}, \frac{-4+0}{2}, \frac{9+5}{2}\right) = (3,-2,7).$$

$$d = d(C, M_{AB}) = \sqrt{(4-3)^2 + (2-(-2))^2 + (6-7)^2} = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\,u.$$

Para hallar el área del triángulo necesitamos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2,4,-4);\ \ \overrightarrow{AC} = C - A = (0,6,-3)$$

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 4 & -4 \\ 0 & 6 & -3 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\sqrt{12^2 + (-6)^2 + (-12)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{324} = 9\,u^2$$

b) El plano que pasa por los puntos A, B y C, tiene por vector normal

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (12,-6,-12).$$

Simplificando podemos tomar

$$\overrightarrow{n_\pi} = (2,-1,-2) \to \pi : 2x - y - 2z + D = 0$$

Sustituimos el punto *B* en la ecuación del plano

$$\pi : 4 - 10 + D = 0 \to D = 6 \to \pi : 2x - y - 2z + 6 = 0$$

Para calcular el plano *LMN*, sea $P = (x,y,z)$ un punto cualquiera del plano, entonces los vectores

$$\overrightarrow{LM} = (-1,1,-1);\ \overrightarrow{LN} = (2,-1,1);\ \overrightarrow{LP} = (x-1, y-1, z-4)$$

han de ser linealmente dependientes Entonces su matriz por filas (o columnas) ha de tener determinante 0:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 - z - y = 0. \to \pi' : -y - z + 5 = 0$$

c) r : Hay que resolver

$$\begin{cases} 2x - y - 2z + 6 = 0 \\ -y - z + 5 = 0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema tomando $z = t$

$$y = 5 - t \to (1^a\ ec) \to 2x - 5 + t - 2t + 6 = 0 \to x = \frac{t-1}{2}.$$

$$r : \begin{cases} x = \dfrac{t-1}{2} \\ y = 5 - t \\ x = t \end{cases}$$

Para calcular el ángulo que forman los planos, calculamos el ángulo de sus vectores normales, utilizando la fórmula del producto escalar:

$$\cos\alpha = \left| \frac{(2,-1,-2)\cdot(0,-1,-1)}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}} \right| = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \to \alpha = 45^o$$

SEP06, **P2A**

En el espacio se consideran:

• La recta r intersección de los planos de ecuaciones implícitas $2x - 2y - z = 9$ y $4x - y + z = 42$.

• Y la recta s que pasa por los puntos (1,3,–4) y (3,–5,–2) . Se pide:

a) Calcular las ecuaciones paramétricas de la recta *r* y de la recta *s*.

b) Justificar que las rectas *r* y *s* se cruzan.

c) Calcular un vector direccional de la recta *t*, perpendicular común a las rectas *r* y *s* y calcular el punto P de intersección de las rectas *s* y *t*.

RESOLUCIÓN:

a) Ecuaciones de r : Hay que resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x - 2y - z = 9 \\ 4x - y + z = 42 \end{cases}$$

Hacemos 1 cero:

$$\begin{cases} 2x - 2y - z = 9 \\ 3y + 3z = 24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 2y - z = 9 \\ y + z = 8 \end{cases}$$

Tomando $z = t$:

$$(ec2)\ y = 8 - t \ \rightarrow \ (ec3)\ 2x - 2(8-t) - t = 9 \ \rightarrow 2x + t = 25 \ \rightarrow x = \frac{25-t}{2}$$

$$r : \begin{cases} x = \dfrac{25-t}{2} \\ y = 8 - t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = \dfrac{25}{2} - \dfrac{1}{2}t \\ y = 8 - t \\ z = 0 + t \end{cases}$$

Ecuaciones de s : vector director $\overrightarrow{AB} = B - A = (2,-8,2)$ (Llamando A y B a los puntos de s dados)

Podemos tomar como vector director (1,–4,1), y el punto $A = (1,3,-4)$

$$s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 4t \\ z = -4 + t \end{cases}$$

b) Vectores directores de ambas:

$$r : (\frac{-1}{2}, -1, 1) \sim \vec{v_r} = (-1,-2,2); \quad s : \vec{v_s} = (1,-4,1).$$

Como no son proporcionales, no son rectas paralelas, pueden ser secantes o que se crucen.

Intentamos encontrar el punto de corte, para ello igualamos las coordenadas de ambas rectas (llamando s al parámetro de la recta s):

$$\begin{cases} \dfrac{25-t}{2} = 1 + s \\ 8 - t = 3 - 4s \\ t = -4 + s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2s + t = 23 \\ 4s - t = -5 \\ -s + t = -4 \end{cases} \underset{(ec3)}{\rightarrow t = s - 4} \quad \underset{(ec2)}{\rightarrow 4s - s + 4 = -5}$$

$$\rightarrow 3s = -9 \qquad \rightarrow s = -3 \qquad \underset{(ec3)}{\rightarrow t = -3 - 4 = -7}$$

Pero estos valores de s y t no cumplen la 1ª ec, por lo que no tiene solución el sistema y por lo tanto no exixte punto de corte.

Así, se trata de rectas que se cruzan.

c) Un vector perpendicular a los vectores de r y s , se puede obtener realizando el producto vectorial de los mismos.

$$(-1,-2,2)\times(1,-4,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim (2,1,2)$$

Como la recta atraviesa perpendicularmente a las rectas r y s, en sendos puntos M y N debe suceder que $\overrightarrow{MN}$ sea paralelo a (2,1,2). Tomando

$$M = \left(\frac{25-t}{2}, 8-t, t\right),\ N = (1+s, 3-4s, -4+s)$$

$$\overrightarrow{MN} = \left(1+s-\frac{25-t}{2}, 3-4s-8+t, -4+s-t\right) = \left(\frac{2s-t-23}{2}, -4s+t-5, s-t-4\right)$$

Para que sean paralelos, sus coordenadas han de ser proporcionales:

$$\frac{2s-t-23}{2\cdot 2} = \frac{-4s+t-5}{1} = \frac{s-t-4}{2}$$

(1ª igualdad):

$$2s-t-23 = -16s+4t-20 \qquad \to 18s-5t = 3$$

(2ª igualdad):

$$-8s+2t-10 = s-t-4 \qquad \to -9s+3t = 6 \to -3s+t = 2$$

Resolvemos el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} 18s-5t = 3 \\ -3s+t = 2 \end{array}\right. \qquad \to s = \frac{13}{3}, \qquad t = 15$$

Ahora como se nos pide el punto de intersección con s, sustituimos el parámetro s en la expresión del punto N :

$$N = (1+s, 3-4s, -4+s) = \left(\frac{16}{3}, -\frac{16}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

SEP06, **P2B**

En el espacio se consideran:

• El plano π que pasa por los puntos (11,1,2), (5,7,5) y (7,–1,–2).

• Y la recta r intersección de los planos de ecuaciones implícitas $x+y+z=15$ y $2x-7y+2z=3$.

a) Calcular la ecuación paramétrica de r y la ecuación implícita del plano π .

b) Calcular el punto P intersección de r y π y el ángulo α que determinan r y π .

c) Calcular los puntos M y N de la recta r cuya distancia al plano π es igual a 3 u.l.

RESOLUCIÓN:

a) Aplicando el método de Gauss a las ecuaciones de r:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x+y+z=15 \\ 2x-7y+2z=3 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=15 \\ -9y=-27 \end{array}\right. \rightarrow y=3$$

Tomamos $z = t$

$$(ec1)\ x+3+t=15 \quad \rightarrow x=12-t \quad \rightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=12-t \\ y=3 \\ z=t \end{array}\right.$$

Plano π :

Llamamos A,B,C a los tres puntos respetivamente, obtenemos dos vectores que los unen

$$\overrightarrow{AB}=(-6,6,3)\sim(-2,2,1);\overrightarrow{AC}=(-4,-2,-4)\sim(2,1,2)$$

Entonces $\vec{u}=(-2,2,1)$; $\vec{v}=(2,1,2)$ (proporcionales a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$) también son vectores linealmente independientes del plano:

Su producto vectorial será un vector normal al plano

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=6j-6k+3i=(3,6,-6) \quad \rightarrow \pi: 3x+6y-6z+D=0$$

Simplificando $\pi : x + 2y - 2z + D = 0$. Sustituimos el punto A :

$$11+2\cdot1-2\cdot2+D=0 \quad \rightarrow \quad D=-9 \quad \rightarrow \pi: x+2y-2z-9=0$$

b) Para calcular el punto P, sustituimos las coordenadas paramétricas de un punto de r en π :

$$(12-t)+2\cdot3-2\cdot t-9=0 \quad \rightarrow 9-3t=0 \quad \rightarrow t=3$$

con lo que sustituimos este valor en la ecuación de r y ya tenemos P:

$$P=(12-t,3,t)\underset{t=3}{=}(9,3,3)$$

Para obtener el ángulo α, calcularemos primero el ángulo que forma el vector director de r, $\overrightarrow{d_r}=(-1,0,1)$ con el vector normal al plano $\overrightarrow{n_\pi}=(1,2,-2)$

$$\cos\beta=\frac{|(-1,0,1)\cdot(1,2,-2)|}{\sqrt{2}\cdot3}=\frac{|-3|}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \beta=45^{\circ}.$$

Ahora, $\alpha = 90 - \beta = 45^{\circ}$.

c) Como M y N son puntos de la recta r tienen la forma $(12 - t, 3, t)$

La distancia de π a uno de estos puntos viene dado por la expresión:

$$\frac{|12-t+2\cdot3-2t-9|}{\sqrt{1+2^2+(-2)^2}}=\frac{|9-3t|}{3}=|3-t| \quad \rightarrow |3-t|=3$$

$$\to \begin{cases} 3-t=3 \\ 3-t=-3 \end{cases} \qquad \to \begin{cases} t=0 \\ t=6 \end{cases}$$

Valores que nos dan los puntos *M* y *N*.

$$M=(12,3,0); \qquad N=(6,3,6)$$

Año 2005

JUN05, P2A

Se considera el plano $\pi : y+z-12m=0$ (*m* parámetro real) y las rectas

$$u : \begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases}, v : \begin{cases} x=2 \\ y=2z \end{cases}, w : \begin{cases} x=3 \\ y=3z \end{cases}$$

Sean *A*, *B* y *C* los puntos de intersección de π con *u*,*v* y *w* respectivamente.

a) Calcular las coordenadas de *A*, *B* y *C* en función de *m*.

b) Hallar los valores de *m* para los que el área del triángulo ABC es 1 u.a.

RESOLUCIÓN:

a) Sustituimos las ecuaciones de la recta *u* en el plano π :

$$y+y-12m=0 \longrightarrow y=6m. \longrightarrow A=(1,6m,6m)$$

De la misma forma,

$$B=(2,8m,4m) \ \ y \ \ C=(3,9m,3m).$$

b) Calculamos

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(1,2m,-2m); \ \overrightarrow{AC}=C-A=(2,3m,-3m)$$

Con lo que el área del triángulo se calcula así:

$$Área_T=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2m & -2m \\ 2 & 3m & -3m \end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{2}|(0,-m,-m)|$$

Por tanto,

$$\frac{1}{2}|(0,-m,-m)|=1 \longrightarrow |(0,-m,-m)|=2 \to \sqrt{2m^2}=2 \to m=\pm\sqrt{2}.$$

JUN05, P2B

Hallar las ecuaciones de los planos que pasan por el punto (–7, 2, –3) y tales que las proyecciones perpendiculares del origen sobre dichos planos son puntos de la recta (*x*,*y*.*z*) = (0,4,1) + *t* (1,0,0)

RESOLUCIÓN:

Un punto cualquiera (punto genérico) de la recta (la llamaremos r) es $P(t,4,1)$.

Si la proyección perpendicular de O sobre el plano es un punto P de r, entonces $\overrightarrow{PO} = (t,4,1)$ es un vector perpendicular al plano.

Así, la ecuación del plano tendrá la forma

$$tx + 4y + z + D = 0.$$

Como $Q = (-7,2,-3)$ es un punto del plano, cumplirá su ecuación:

$$t(-7) + 4 \cdot 2 - 3 + D = 0 \qquad \rightarrow D = 7t - 5$$

Y la ecuación del plano queda:

$$tx + 4y + z + 7t - 5 = 0$$

Además también P es un punto del plano, por lo que se verifica:

$$t \cdot t + 4 \cdot 4 + 1 + 7t - 5 = 0 \qquad \rightarrow t^2 + 7t + 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = -4 \end{cases}$$

Por lo que encontramos 2 planos que son soluciones de las condiciones pedidas:

$$\begin{cases} -3x + 4y + z - 26 = 0 \\ -4x + 4y + z - 33 = 0 \end{cases}$$

SEP05, **P2A**

Un paralelepípedo rectangular (ortoedro) tiene tres de sus aristas sobre las rectas:

$$l : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \ m : \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \ y\ n : \begin{cases} 2x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

y uno de sus vértices es (12,21,–11). Se pide:

a) Hallar los vértices restantes b) Calcular su volumen.

RESOLUCIÓN:

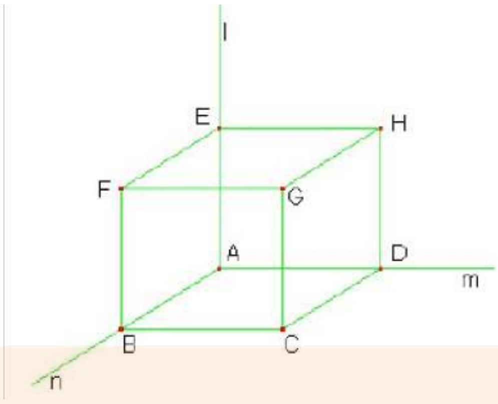
a) Las rectas expresadas en paramétricas quedarían:

$$l : (0,0,t); \ m : (2u,u,0); \ n : (v,-2v,0).$$

Igualando las coordenadas, podemos comprobar que las tres rectas se cortan en (0,0,0).

Multiplicando sus vectores directores ((0,0,1) ; (2,1,0) ; (1,-2,0)) concluimos que son perpendiculares

También podemos comprobar que el punto (12,21,–11) no pertenece a ninguna de las rectas.



Llamamos a los vértices como indica la figura.Entonces

$$A = (0,0,0); E = (0,0,t); D = (2u,u,0); B = (v,-2v,0)$$

(valores de t,u,v por determinar)

$$C = (\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = (2u+v, u-2v, 0)$$

Análogamente

$$F = (v,-2v,t);\ H = (2u,u,t)$$

Por eliminación $G = (12,21,-11)$.

Ahora $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$, por lo que

$$G - C = (0,0,t) \rightarrow C = G - (0,0,t) = (12,21,-11-t).$$

Igualamos las coordenadas de C con las obtenidas anteriormente:

$$\begin{cases} 2u+v = 12 \\ u-2v = 21 \\ 0 = -11-t \end{cases}$$

Obtenemos $t = -11$, $v = -6$, $u = 9$. Así:

$$A = (0,0,0); E = (0,0,-11); D = (18,9,0); B = (-6,12,0);$$

$$C = (12,21,0); F = (-6,12,-11);\ H = (18,9,-11); G = (12,21,-11)$$

b) Para obtener el volumen basta con calcular:

$$V = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right] = \left\| \begin{matrix} -6 & -12 & 0 \\ 18 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \end{matrix} \right\| = 594\ u^2$$

SEP05, **P2B**

Dados los planos $\pi : 5x - y - z = 0$, $\sigma : x + y - z = 0$ y el punto $P(9,4,-1)$, determinar:

a) La ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a π y σ.

b) El punto simétrico de *P* respecto de la recta r, intersección de los planos π y σ.

RESOLUCIÓN:

a) Si es perpendicular a π y a σ entoces su vector normal lo obtendremos con el producto vectorial de los vectores normales a π y σ.

$$(5,-1,-1)\times(1,1,-1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (2,4,6).$$

Tomaremos el vector (1,2,3), que es proporcional y por tanto tiene la misma dirección.

La ecuación del plano será

$$x+2y+3z+D=0$$

Como contiene al punto P(9,4,–1):

$$9+2\cdot 4+3\cdot(-1)+D=0 \to D=-14$$

y así

$$x+2y+3z-14=0$$

b) Llamemos *P´* al punto simétrico, que deberá encontrarse en el plano calculado en el apartado a).

Para calcular la recta r como interseción de π y σ hay que resolver el sistema

$$\begin{cases} 5x-y-z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$

Naturalmente es SCI, y tomando $z=t$, obtenemos

$$r:\begin{cases} x=\dfrac{t}{3} \\ y=\dfrac{2t}{3} \\ z=t \end{cases}$$

En la intersección del plano de **a**) con la recta r encontramos el punto *M*, punto central o punto medio de *P* y *P´*.

Calculemos *M*: Sustituimos las coordenadas paramétricas de un punto de *r* en la ecuación del plano:

$$x+2y+3z-14=0 \to \frac{t}{3}+2\frac{2t}{3}+3t-14=0$$

$$\to t+4t+9t-42=0 \to 14t=42 \to t=3.$$

Por lo que hallamos el punto *M* sustituyendo $t=3$ en las ecuaciones de *r*:

$$M=\left(\frac{3}{3},\frac{2\cdot 3}{3},3\right)=(1,2,3).$$

Dados *P* y *M*, se halla P' así:

$$P' = M + \overrightarrow{PM} = (1,2,3) + (1,2,3) - (9,4,-1) = (-7,0,7)$$

Ya que $\overrightarrow{PM} = M - P$.