BLOQUE 1: ÁLGEBRA.

Año 2011.

JUN11, **PA1**

Sea el sistema de ecuaciones

$$S: \begin{cases} x + y + z = m \\ 2x + 3z = 2m+1 \\ x + 3y + (m-2)z = m-1 \end{cases}$$

donde *m* es un parámetro real. Obtener razonadamente:

a) Todas las soluciones del sistema *S* cuando $m = 2$. (4 puntos).

b) Todos los valores de *m* para los que el sistema *S* tiene una solución única. (2 puntos).

c) El valor de *m* para el que el sistema *S* admite la solución $(x,y,z) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ (4 puntos)

Resolución:

a) Si $m = 2$, el sistema queda

$$S: \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3z = 5 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$$

Resolvemos por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \to (-2)F_1 + F_2 \\ F_3 \to (-1)F_1 + F_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_2 + F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por la 3ª ecuación $0z = 0$, z puede tomar cualquier valor. Tomamos $z = \lambda$. Entonces

$$Ec2: -2y + \lambda = 1 \rightarrow y = \frac{\lambda - 1}{2}.$$

$$Ec1: x + \frac{\lambda - 1}{2} + \lambda = 2 \rightarrow x = \frac{5 - 3\lambda}{2}$$

Solución del sistema:

$$\left\{ \left(\frac{5-3\lambda}{2}, \frac{\lambda - 1}{2}, \lambda \right) : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

b) Por ser un sistema cuadrado, tiene solución única cuando (si y sólo si) $|A| \neq 0$, siendo A la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & m-2 \end{vmatrix} = 4 - 2m = 0 \rightarrow m = 2.$$

Entonces el sistema tiene solución única siempre y cuando $m \neq 2$.

c) Buscamos que los valores de las incógnitas $(x,y,z) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ cumplan las tres ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = m \\ 2 \cdot \frac{3}{2} = 2m + 1 \\ \frac{3}{2} - 3 \cdot \frac{1}{2} = m - 1 \end{cases}$$

Por la Ec1, $m = 1$. Veamos si cumple la Ec2 y la Ec3:

Ec2: $3 = 2m + 1 \rightarrow m = 1$. Ec3: $0 = m - 1 \rightarrow m = 1$.

Por lo que cuando $m = 1$, los valores $(x,y,z) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ cumplen las tres ecuaciones.

JUN11, PB1

Se da la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2 - 1 \end{pmatrix}$$

donde m es un parámetro real.

a) Obtener razonadamente el rango o característica de la matriz A en función de los valores de m. (5 puntos).

b) Explicar por qué es invertible la matriz A cuando $m = 1$. (2 puntos).

c) Obtener razonadamente la matriz inversa A^{-1} de A cuando $m = 1$, indicando los distintos pasos para la obtención de A^{-1} . Comprobar que los productos $A^{-1}A$ y AA^{-1} dan la matriz unidad. (3 puntos).

Resolución:

a) Para estudiar el rango, comenzamos por el determinante de orden 3:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2 - 1 \end{vmatrix} = -m^3 - m = 0 \rightarrow m(m^2 + 1) = 0 \rightarrow m = 0$$

Así, cuando $m \neq 0$, rg(A) = 3

Si $m = 0$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

escogemos el menor

$$\alpha_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \text{ con}$$

$$|\alpha_{22}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2.$$

b) Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de 0. Para cualquier valor $m \neq 0$, tenemos que $|A| \neq 0$, por lo que es invertible en todos esos casos, incluído cuando $m = 1$.

c) Cuando $m = 1$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz inversa de A viene dada por la siguiente fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)^T$$

Calculamos

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

Ahora la matriz adjunta:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Su traspuesta : } Adj(A)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)^T = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos los productos pedidos, AA^{-1} y $A^{-1}A$:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

SEP11, **PA1**

Se dan las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; y \; M$$

donde M es una matriz de 2 filas y 2 columnas que verifica $M^2 = \mathrm{M}$. Obtener razonadamente:

a) Todos los valores reales k para los que la matriz $B = A - kI$ tiene inversa. (2 puntos).

b) La matriz inversa B^{-1} cuando $k = 3$. (2 puntos).

c) Las constantes reales α y β para las que se verifica que $\alpha A^2 + \beta A = -2I$. (4 puntos).

d) Comprobar razonadamente que la matriz $P = I - M$ cumple las relaciones: $P^2 = P$ y $MP = PM$. (2 puntos, repartidos en 1 punto por cada igualdad).

Resolución:

a) La matriz B tiene inversa sólo cuando $|B| \neq 0$.

Calculemos B

$$B = A - kI = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -2 \\ 1 & 3-k \end{pmatrix}.$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -k & -2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = -k(3-k) + 2 = k^2 - 3k + 2.$$

$$|B| = 0 \to k^2 - 3k + 2 = 0 \to \begin{cases} k = 1 \\ k = 2 \end{cases}$$

Así, cuando $k \neq 1$ y $k \neq 2$, $|B| \neq 0$ y por lo tanto B tiene inversa.

b) Cuando $k = 3$

$$B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculemos su inversa

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}[Adj(B)]^t.$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2. \qquad Adj(B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow [Adj(B)]^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

c)

$$\alpha A^2 + \beta A = -2I.$$

Calculemos A^2

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\alpha\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2\alpha & -6\alpha \\ 3\alpha & 7\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2\beta \\ \beta & 3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2\alpha & -6\alpha - 2\beta \\ 3\alpha + \beta & 7\alpha + 3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{cases} -2\alpha = -2 \\ -6\alpha - 2\beta = 0 \\ 3\alpha + \beta = 0 \\ 7\alpha + 3\beta = -2 \end{cases}$$

$$(ec1) \rightarrow \alpha = 1. \qquad \rightarrow (ec2) \rightarrow -6 - 2\beta = 0 \rightarrow \beta = -3.$$

Ahora hay que comprobar que $\alpha = 1$ y $\beta = -3$ también cumplen las dos últimas ecuaciones (han de cumplirse todas).

$$(ec3) \rightarrow 3 \cdot 1 - 3 = 0 \text{ (Sí)} \qquad (ec4) \rightarrow 7 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) = -2 \text{ (Sí).}$$

Así, los valores buscados son $\alpha = 1$ y $\beta = -3$.

d) $P = I - M$, dado que I es la identidad y que $M^2 = M$,

Obtenemos P^2

$$P^2 = (I - M)^2 = (I - M) \cdot (I - M) = I \cdot I - I \cdot M - M \cdot I + M \cdot M =$$

$$= I - M - M + M^2 = I - M - M + M = I - M = P$$

Ahora $MP = M(I - M) = MI - M^2 = M - M = 0$.

Por otro lado $PM = (I - M)M = IM - M^2 = M - M = 0$.

Por lo que $MP = PM$.

SEP11, **PB1**

Se dan las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \; y \; T$$

y se sabe que T es una matriz cuadrada de 3 filas y 3 columnas cuyo determinante vale $\sqrt{2}$.

Calcular razonadamente los determinantes de las siguientes matrices, indicando explícitamente las propiedades utilizadas en su cálculo:

a) $\frac{1}{2}T$. (3 puntos)

b) M^4 (3 puntos)

c) TM^3T^{-1} (4 puntos)

Resolución:

a)

$$\left|\frac{1}{2}T\right| \underset{(*)}{=} \left(\frac{1}{2}\right)^3 |T| = \frac{1}{8}\sqrt{2}$$

(*) Ya que al multiplicar por un nº los elementos de una línea (fila o columna) el determinante queda multiplicado por ese nº. Como T tiene 3 filas, entonces podemos sacar factor común de 1/2 tres veces.

b)

$$|M^4| \underset{(*1)}{=} |M| \cdot |M| \cdot |M| \cdot |M| \underset{(*2)}{=} 6^4 = 1296$$

$(*1)$ Ya que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

$$(*2) \text{ Calculemos } |M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

c)

$$|TM^3T^{-1}| \underset{(*1)}{=} |T| \cdot |M^3| \cdot |T^{-1}| \underset{\substack{(*1)\\(*2)}}{=} |T| \cdot |M| \cdot |M| \cdot |M| \cdot \frac{1}{|T|} = |M|^3 = 6^3 = 216$$

$(*1)$ Ya que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

$$(*2) \text{ Ya que } \begin{cases} |T \cdot T^{-1}| = |I| = 1 \\ |T \cdot T^{-1}| = |T| \cdot |T^{-1}| \end{cases} . \text{ Por lo que } |T| \cdot |T^{-1}| = 1 \Rightarrow |T^{-1}| = \frac{1}{|T|} |T| \cdot |T^{-1}| = 1 \Rightarrow |T^{-1}| = \frac{1}{|T|}$$

Año 2010.

A partir de este año, cada ejercicio se puntúa sobre 10.

JUN10, **PA1**

Dadas las matrices cuadradas

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) Calcular las matrices $(A-I)^2$ y $A(A-2I)$. (4 puntos).

b) Justificar razonadamente que:

b.1) Existen las matrices inversas de las matrices A y $A-2I$. (2 puntos).

b.2) No existe matriz inversa de la matriz $A-I$. (2 puntos).

c) Determinar el valor del parámetro real λ para el que se verifica $A^{-1} = \lambda(A-2I)$. (2 puntos).

Resolución:

a) Calculemos primero $(A-I)^2$:

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y ahora calculemos $A(A-2I)$:

$$(A-2I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (A-2I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

b) Existe la inversa de una matriz si y sólo si su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow A \text{ es inversible.}$$

$$|A-2I| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & -4 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow A-2I \text{ es inversible.}$$

$$|A-I| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow A-I \text{ no es inversible.}$$

c) Hemos de resolver el valor de λ en la ecuación $A^{-1} = \lambda(A - 2I)$:

Camino corto: Premultiplicamos por A :

$$AA^{-1} = A\lambda(A-2I) \Rightarrow I = \lambda A(A-2I)$$

(A y λ sí que conmutan porque λ es un escalar, no una matriz), ($A(A-2I) = -I$)

$$I = \lambda(-I) \Rightarrow \lambda = -1$$

Camino largo: Vamos realizando los cálculos que aparecen en la ecuación:

Calculamos A^{-1}, por la fórmula indicada, o por el método de Gauss:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}[Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Despejamos λ de $A^{-1} = \lambda(A-2I)$

(multiplicamos por la derecha ambos miembros por $(A-2I)^{-1}$):

$$A^{-1}(A-2I)^{-1} = \lambda(A-2I)(A-2I)^{-1} \Rightarrow A^{-1}(A-2I)^{-1} = \lambda I$$

Ahora habría que calcular $(A-2I)^{-1}$, por la fórmula o por Gauss:

$$(A-2I)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot (A-2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

La ecuación ha quedado así: $-I = \lambda I \Rightarrow \lambda = -1$.

JUN10, **PB1**

Dado el sistema de ecuaciones lineales que depende de los parámetros *a*, *b* y *c*

$$\left\{\begin{aligned} 2ax + by + z &= 3c \\ 3x - 2by - 2cz &= a \\ 5ax - 2y + cz &= -4b \end{aligned}\right. ,$$

se pide:

a) Justificar razonadamente que para los valores de los parámetros $a = 0$, $b = -1$ y $c = 2$ el sistema es incompatible. (3 puntos).

b) Determinar razonadamente los valores de los parámetros *a*, *b* y *c*, para los que se verifica que $(x,y,z) = (1,2,3)$ es solución del sistema. (4 puntos).

c) Justificar si la solución $(x,y,z) = (1,2,3)$ del sistema del apartado b) es, o no, única. (3 puntos).

Resolución:

a) Con $a = 0$, $b = -1$ y $c = 2$, el sistema queda así:

$$\left\{\begin{aligned} -y + z &= 6 \\ 3x + 2y - 4z &= 0 \\ -2y + 2z &= 4 \end{aligned}\right. \sim \left\{\begin{aligned} -y + z &= 6 \\ 3x + 2y - 4z &= 0 \\ -y + z &= 2 \end{aligned}\right.$$

Al simplificar la 3ª ecuación, se observa que la 1ª y la 3ª son incompatibles (serían planos paralelos sin ningún punto en común).

b) Sustituimos en el sistema inicial $(x,y,z) = (1,2,3)$ y ahora hemos de obtener los valores de *a*, *b* y *c*.:

$$\left\{\begin{aligned} 2a + 2b + 3 &= 3c \\ 3 - 4b - 6c &= a \\ 5a - 4 + 3c &= -4b \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} 2a + 2b - 3c &= -3 \\ -a - 4b - 6c &= -3 \\ 5a + 4b + 3c &= 4 \end{aligned}\right.$$

Resolvemos por Cramer:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & -4 & -6 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -78$$

$$a = \frac{|A_a|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 2 & -3 \\ -3 & -4 & -6 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{-78} = \frac{-78}{-78} = 1$$

$$b = \frac{|A_b|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -1 & -3 & -6 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{-78} = \frac{78}{-78} = -1$$

$$c = \frac{|A_c|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & -4 & -3 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix}}{-78} = \frac{-78}{-78} = 1$$

Sólo cuando $a = 1$, $b = -1$ y $c = 1$ se cumple que $(x,y,z) = (1,2,3)$ es solución del sistema.

c) En el caso del apartado b) el sistema con incógnitas (x,y,z) es (tomamos $a = 1$,b $= -1$ y $c = 1$) :

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \\ 5x - 2y + z = 4 \end{cases}$$

Veamos si es o no un sistema de Cramer:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

Entonces el sistema tiene solución única, por el Teorema de Rouché-Frobenius. Ya que $\text{rg}(A) = 3 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 3 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 =$ nº incógnitas, siendo A^* la matriz ampliada.

SEP10, **PA1**

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \alpha x + \alpha^3 y + z = 1 \\ \alpha x + \alpha y + z = 1 \\ \alpha^3 x + \alpha y + z = 1 \end{cases}$$

donde α es un parámetro real, se pide:

a) Deducir, razonadamente, para qué valores de α es compatible determinado. (4 puntos).

b) Deducir, razonadamente, para qué valores de α es compatible indeterminado. (3 puntos).

c) Resolver el sistema en todos los casos en que es compatible indeterminado. (3 puntos).

Resolución:

a) Por tratarse de un sistema cuadrado, es compatible determinado si sólo si es un sistema de Cramer, es decir, tiene determinante no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^3 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \\ \alpha^3 & \alpha & 1 \end{vmatrix} \underset{F_1-F_2}{\sim} \begin{vmatrix} 0 & \alpha^3-\alpha & 0 \\ \alpha & \alpha & 1 \\ \alpha^3 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = -\alpha(\alpha^2-1)(\alpha-\alpha^3) =$$

$$= -\alpha^2(\alpha^2-1)(1-\alpha^2) = -\alpha^2(\alpha+1)(\alpha-1)(1+\alpha)(1-\alpha)$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \text{ (sol. doble)} \\ \alpha = 1 \text{ (sol. doble)} \\ \alpha = -1 \text{ (sol. doble)} \end{cases}$$

Por lo que los valores pedidos de α, son precisamente todos los demás, es decir, el sistema es compatible determinado cuando $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -1$.

b) Como la 3ª columna de A coincide con la de términos independientes (todo unos), entonces siempre se cumple que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*)$, siendo A^* la matriz ampliada.

Por el teorema de Rouché el sistema es siempre compatible (una solución válida siempre sería (0,0,1)). Así pues como en el apartado a) se han dado los valores que corresponden a sistema compatible determinado, los demás corresponden a sistema compatible indeterminado, que son α = 0, α = 1 y α = –1

c) Caso $\alpha = 0$. El sistema queda muy simple:

$$\begin{cases} z = 1 \\ z = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Entonces la solución tiene 2 grados de libertad:

Solución:

$$\{(x,y,z) = (\lambda,\beta,1) \ : \ \lambda,\beta \text{ son números reales cualesquiera } \}$$

Caso $\alpha = 1$. El sistema también queda muy simple:

$$\begin{cases} x+y+z = 1 \\ x+y+z = 1 \\ x+y+z = 1 \end{cases} \Rightarrow x+y+z = 1.$$

La solución también tiene 2 grados de libertad.

Tomamos $x = \lambda$, $y = \beta$ y despejamos $z = 1 - x - y = 1 - \lambda - \beta$

Solución:

$$\{(x,y,z) = (\lambda,\beta,1-\lambda-\beta) \ : \ \lambda,\beta \text{ son números reales cualesquiera } \}$$

Caso $\alpha = -1$. Como el anterior:

$$\left\{\begin{array}{l} -x-y+z=1 \\ -x-y+z=1 \\ -x-y+z=1 \end{array}\right. \Rightarrow -x-y+z=1.$$

Tomamos $x=\lambda$, $y=\beta$ y despejamos $z=1+x+y=1+\lambda+\beta$

Solución:

$$\{(x,y,z) = (\lambda,\beta,1+\lambda+\beta) : \lambda,\beta \text{ son números reales cualesquiera}\}$$

SEP10, **PB1**

Dadas las matrices

$$A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & 4 & 3 \\ x+2 & 6 & 2 \\ x+3 & 8 & 2 \end{pmatrix}, \quad B(y) = \begin{pmatrix} y+1 & 4 & 3 \\ y+2 & 6 & 2 \\ y+3 & 8 & 1 \end{pmatrix},$$

se pide:

a) Obtener razonadamente el valor de x para que el determinante de la matriz $A(x)$ sea 6. (4 puntos).

b) Calcular razonadamente el determinante de la matriz $2A(x)$. (2 puntos).

c) Demostrar que la matriz $B(y)$ no tiene matriz inversa para ningún valor real de y . (4 puntos).

Resolución:

a)

$$|A(x)| = \begin{vmatrix} x+2 & 4 & 3 \\ x+2 & 6 & 2 \\ x+3 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x+2 & 2 & 3 \\ x+2 & 3 & 2 \\ x+3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_1}}{=} 2\begin{vmatrix} x+2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2x-6$$

Este determinante vale 6 cuando

$$2x-6=6 \Rightarrow 2x=12 \Rightarrow x=6.$$

b) Como $|A(x)| = 2x-6$, entonces

$$|2A(x)| = 2^3|A(x)| = 8 \cdot (2x-6) = 16x-48$$

$|2A(x)| = 2^3|A(x)|$ porque por las propiedades de determinantes podemos sacar factor común de los elementos de una línea (fila o columna), así que como tiene dimensión 3, sacamos factor común de 2 tres veces.

c) Una matriz tiene inversa si y sólo si su determinante es distinto de cero. Calculemos el valor $|B(y)|$:

$$|B(y)| = \begin{vmatrix} y+1 & 4 & 3 \\ y+2 & 6 & 2 \\ y+3 & 8 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1}}{=} \begin{vmatrix} y+1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Ya que la 3ª fila es el doble de la segunda (son proporcionales)

Así $B(y)$ no tiene inversa porque su determinante vale 0.

AÑO 2009.

JUN09, **P1.1**

Dadas las matrices cuadradas

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, . B = \begin{pmatrix} 18 & 48 & 12 \\ 0 & 18 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ se pide:}$$

a) Justificar que la matriz A tiene inversa y obtener razonadamente la matriz inversa A^{-1}, incluyendo en la respuesta todos los pasos que llevan a la obtención de A^{-1} . (1,1 puntos).

b) Calcular, razonadamente, el determinante de la matriz $3A^{-1}$, incluyendo en la respuesta todos los pasos realizados. (1,1 puntos).

c) Obtener razonadamente los valores reales x,y,z que verifican la ecuación $xI + yA + zA^2 = B$. (1,1 puntos).

Resolución:

a) La matriz A tiene inversa si y sólo si $|A| \neq 0$. Calculamos

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0.$$

Vamos a obtener su inversa por la fórmula

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}[Adj(A)]^t$$

Calculamos primero Adj(A) :

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ 12 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$[Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 12 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -6 & 12 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

b) Utilizando las propiedades de los determinantes $\left|3A^{-1}\right| = 3^3\left|A^{-1}\right|$, ya que sacamos factor común en cada una de las tres filas (o columnas) de A^{-1}. Y como

$$|AB| = |A| \cdot |B| \quad \Rightarrow 1 = |I| = |A| \cdot |A^{-1}| \quad \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{9}.$$

$$\Rightarrow |3A^{-1}| = 3^3|A^{-1}| = 27 \cdot 1/9 = 3.$$

c) $xI + yA + zA^2 =$ B. Calculemos A^2:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 36 & 12 \\ 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$xI + yA + zA^2 = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3y & 6y & 0 \\ 0 & 3y & 2y \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9z & 36z & 12z \\ 0 & 9z & 8z \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x+3y+9z & 6y+36z & 12z \\ 0 & x+3y+9z & 2y+8z \\ 0 & 0 & x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 48 & 12 \\ 0 & 18 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Con lo que nos han quedado 6 ecuaciones que hemos de resolver:

$$\left\{\begin{array}{l} x+3y+9z = 18 \\ 6y+36z = 48 \\ 12z = 12 \\ x+3y+9z = 18 \\ 2y+8z = 12 \\ x+y+z = 6 \end{array}\right. \rightarrow$$

Por la $(ec3) \rightarrow z = 1$. Sustituimos en la $(ec2) \rightarrow y = 2$
Y sustituyendo en la $(ec1) \rightarrow x = 3$.

Dado que estos valores de x, y, z cumplen el resto de ecuaciones, son solución de la ecuación matricial.
$x = 3; y = 2; z = 1$

JUN09, **P1.2**

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{l} (\alpha+3)x - 4y - 2z = 4 \\ x - 2y - (\alpha+2)z = 2 \\ 2x + (\alpha-3)y - 2z = 4 \end{array}\right.$$

se pide, razonando las respuestas:

a) Justificar que para el valor $\alpha = 0$ el sistema es incompatible. (1,1 puntos).

b) Determinar los valores del parámetro α para los que el sistema es compatible y determinado. (1,1 puntos).

c) Resolver el sistema para el valor del parámetro α para el cual es compatible indeterminado. (1,1 puntos).

Resolución:

a) Para $\alpha = 0$ el sistema queda

$$\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 4 \\ x - 2y - 2z = 2 \\ 2x - 3y - 2z = 4 \end{cases}.$$

Calculemos $\mathrm{rg}(A)$ y $\mathrm{rg}(A^*)$:

$$rg(A) : \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0. \text{ Como } \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2, \rightarrow rg(A) = 2.$$

$$rg(A^*) : \quad \text{Tomando las columnas 1,2 y 4 : } \begin{vmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \rightarrow rg(A^*) = 3.$$

Entonces, por el teorema de Rouché-Frobenius, como $\mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}(A^*)$, el sistema es incompatible.

b) Para estudiar rg(A), obtenemos $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha + 3 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -(\alpha + 2) \\ 2 & \alpha - 3 & -2 \end{vmatrix} = \alpha^3 + 2\alpha^2 + \alpha = \alpha(\alpha^2 + 2\alpha + 1)$$

$$|A| = 0 \text{ cuando } \alpha(\alpha^2 + 2\alpha + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = -1 \text{ (doble)} \end{cases}$$

Aplicamos ahora el teorema de Rouché- Frobenius: Cuando α toma estos valores, $\mathrm{rg}(A)$ es menor que 3 = nº de incógnitas, por lo que el sistema ya no puede ser compatible determinado.

Cuando $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq -1$,$\mathrm{rg(A)} = 3 \rightarrow \mathrm{rg(A^*)} = 3$, ya que es su rango máximo y tenemos:

$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*) =$ nº de incóg = 3, → el sistema es compatible determinado.

c) El único caso que queda estudiar es $\alpha = -1$. Veamos si efectivamente es SCI:

$$A^{*} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Podemos observar que $F_3 = F_1 = 2F_2$, (las tres ecuaciones son proporcionales) por lo que el sistema es equivalente a la ecuación $x - 2y - z = 2$

La resolvemos. Como tengo tres incógnitas, 2 de ellas podrán tomar un valor cualquiera libremente.

Sea $z = \lambda$ y sea $y = \beta$, donde λ y β representan números cualesquiera.

$$x - 2y - z = 2 \quad \to x - 2\beta - \lambda = 2 \quad \to x = 2 + 2\beta + \lambda$$

$$Solución \ \ \{(2 + 2\beta + \lambda, \beta, \lambda) \ : \ \lambda, \beta \in \mathbb{R}\}$$

SEP09, **P1.1**

Dada la matriz

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha - 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ \alpha & \alpha & -6 \end{pmatrix}$$

a) Calcular, en función de α, el determinante de la matriz $A(\alpha)$, escribiendo los cálculos necesarios. (1,3 puntos).

b) Determinar, razonadamente, los números reales α para los que el determinante de la matriz inversa de $A(\alpha)$ es igual a 1/66. (2 puntos).

Resolución:

a)

$$A(\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha - 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ \alpha & \alpha & -6 \end{vmatrix} = -18 + 4\alpha + 4\alpha(\alpha - 2) - 3\alpha(\alpha - 2) + 48 - 2\alpha = \alpha^2 + 30$$

b)

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \to |A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1 \quad \to |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

Así

$$|A(\alpha)^{-1}| = \frac{1}{|A(\alpha)|} = \frac{1}{\alpha^2 + 30} = \frac{1}{66}$$

Resolvamos esta ecuación con α :

$$\frac{1}{\alpha^2 + 30} = \frac{1}{66} \quad \to 66 = \alpha^2 + 30 \quad \to \alpha^2 = 36 \quad \to \alpha = \pm 6.$$

SEP09, **P1.2**

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \\ 5x + 7y + \alpha z = 0 \end{cases},$$

se pide:

a) Deducir, razonadamente, para qué valores de α el sistema sólo admite la solución $(x,y,z) = (0,0,0)$. (1,5 puntos).

b) Resolver, razonadamente, el sistema para el valor de α que lo hace indeterminado. (1,8 puntos).

Resolución:

a) Dado que se trata de un sistema homogéneo, esto sucederá cuando sea Compatible Determinado.

Calculemos rg(A) :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha - 9$$

Entonces $|A| = 0$ si y sólo si $\alpha = 9$.

Si $\alpha \neq 9$ $\rightarrow$ rg(A) = rg(A^*) = 3 = nº incógnitas. (Al tratarse de un sistema homogéneo rg(A^*) siempre coincide con rg(A)).

Por el teorema de Rouché-Frobenius, en el caso $\alpha \neq 9$, es un sistema Compatible Determinado. Como $(x,y,z) = (0,0,0)$, siempre es solución de un sistema homogéneo, ha de ser la única.

b) Queda por estudiar el caso $\alpha = 9$.

Por el apartado anterior, si $\alpha = 9 \rightarrow |A| = 0$.

Probando con un menor de orden 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \qquad \rightarrow rg(A) = rg(A^*) = 2.$$

Por el teorema de Rouché-Frobenius, es un Sistema Compatible Indeterminado. Lo resolveremos por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 7 & 9 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eliminamos la fila 3 porque $F_3 = 2F_2 + F_1$, después $F_2 \rightarrow (-2)\cdot F_1 + F_2$

Dado que nos quedan 2 ecuaciones con 3 incógnitas, tomamos $z = \lambda$, donde λ representa un número real cualquiera.

$$(ec2) \rightarrow y + 2z = 0 \qquad \rightarrow y = -2\lambda$$

$$(ec1) \rightarrow x + y + z = 0 \qquad \rightarrow x - 2\lambda - \lambda = 0 \qquad \rightarrow x = 3\lambda.$$

$$Solución\ :\ \{(3\lambda, -2\lambda, \lambda)\ :\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

AÑO 2008

JUN08, **P1.1**

Dado el sistema dependiente del parámetro α :

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ x + y + \alpha z = 1 \end{cases}$$

se pide:

a) Determinar, razonadamente, los valores de α para los que el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible.

b) Resolver el sistema cuando es compatible determinado.

c) Obtener, razonadamente, la solución del sistema cuando $\alpha = 0$.

RESOLUCIÓN:

a) Realizamos la discisión del sistema aplicando el teorema de Rouché-Frobenius.

Calculemos el rango de A, matriz de coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 + 2 - \alpha - \alpha - \alpha = \alpha^3 - 3\alpha + 2.$$

Resolvemos $\alpha^3 - 3\alpha + 2 = 0.$ Por Ruffini,

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & 0 & \end{array} \to \alpha^3 - 3\alpha + 2 = (\alpha - 1)^2(\alpha + 2) = 0$$

Soluciones $\alpha = 1$ (doble); $\alpha = -2$. Entonces cuando $\alpha = 1$ o $\alpha = -2$, $\text{rg}(A) < 3$.

Si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -2 \to \text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(A^*) = 3 =$ nº incóg. $\Rightarrow$ S.C.D.

Si $\alpha = 1$

$$\to A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que el rango de A y A^* es 1, ya que las tres filas son iguales.

$\mathrm{rg}(A^*) = \mathrm{rg}(A) = 1 < 3 =$ nº incóg $\Rightarrow$ SCI (con 2 grados de libertad, la intersección es un plano)

Si $\alpha = -2$

$$\to \alpha_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \to rg(A) = 2.$$

Calculemos el rango de A^*

$$A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}:$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \Rightarrow rg(A^*) = 3$$

Entonces, si $\alpha = -2 \Rightarrow \mathrm{rg}(A) = 2 \neq \mathrm{rg}(A^*) = 3. \Rightarrow$ S.I.

b) Vamos a resolver el sistema para $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -2$. Como en estos casos $|A| \neq 0$, es un sistema de Cramer y le podemos aplicar la regla correspondiente:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix}} = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \frac{1}{(\alpha+2)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix}} = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \frac{1}{(\alpha+2)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix}} = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \frac{1}{(\alpha+2)}$$

$$\text{Solución única } \left(\frac{1}{\alpha+2}, \frac{1}{\alpha+2}, \frac{1}{\alpha+2}\right), \text{ siendo } \alpha \neq 1 \text{ y } \alpha \neq -2.$$

Nota: Aunque en la solución aparezca el parámetro α, no se trata de infinitas soluciones, sino que cada valor de α produce un sistema de ecuaciones distinto, que tendrá una única solución.

c) Cuando $\alpha = 0$, se trata de un sistema compatible determinado, ya que $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -2$.

La solución de este sistema está calculada en el apartado b) y resulta ser

$$\left(\frac{1}{\alpha+2}, \frac{1}{\alpha+2}, \frac{1}{\alpha+2}\right) \text{ para } \alpha = 0 \text{ quedaría } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

JUN08, **P1**.**2**

Sean I y A las matrices cuadradas siguientes:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}.$$

Se pide calcular, escribiendo explícitamente las operaciones necesarias:

a) Las matrices A^2 y A^3 .

b) Los números reales α y β para los que se verifica $(I+A)^3 = \alpha I + \beta A$.

RESOLUCIÓN:

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -29 \\ 10 & 17 \end{pmatrix}.$$

b) Calculemos $(I+A)^3$:

$$I + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 29 \\ -10 & -16 \end{pmatrix}$$

$$(I+A)^3 = \begin{pmatrix} 18 & 29 \\ -10 & -16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18 & 29 \\ -10 & -16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18 & 29 \\ -10 & -16 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 34 & 58 \\ -20 & -34 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18 & 29 \\ -10 & -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 58 \\ -20 & -36 \end{pmatrix}$$

La ecuación queda

$$\begin{pmatrix} 32 & 58 \\ -20 & -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 17\beta & 29\beta \\ -10\beta & -17\beta \end{pmatrix}.$$

Igualando los elementos de la misma posición:

$$\begin{cases} 32 = \alpha + 17\beta \\ 58 = 29\beta \\ -20 = -10\beta \\ -36 = \alpha - 17\beta \end{cases}$$

De la 2ª y 3ª ec: $\beta = 2$ $\rightarrow$ (ec1) $32 = \alpha + 17 \cdot 2 \rightarrow \alpha = -2$
(ec4) $-36 = \alpha - 17 \cdot 2 \rightarrow \alpha = -2$

Así pues $\alpha = -2$; $\beta = 2$

SEP08, **P1**.**1**

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y el vector $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, se pide obtener razonadamente:

a) El vector X tal que $AX = 0X$. (1,1 puntos).

b) Todos los vectores X tales que $AX = 3X$. (1,1 puntos).

c) Todos los vectores X tales que $AX = 2X$. (1,1 puntos).

RESOLUCIÓN:

a) Se pide resolver $AX = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Solución: } x = 0, y = 0. \text{Por tanto } X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Se pide resolver $AX = 3X$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - y = 3x \\ 2x + 4y = 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \rightarrow 2x + y = 0 \ (SCI) \rightarrow \text{Solución: } y = \lambda, x = \frac{-\lambda}{2}. \text{ Por tanto } X = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{2} \\ \lambda \end{pmatrix}$$

c) Se pide resolver $AX = 2X$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - y = 2x \\ 2x + 4y = 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x - y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \to x + y = 0 \ (SCI) \to \text{Solución: } y = \lambda, x = -\lambda. \text{ Por tanto } X = \begin{pmatrix} -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

SEP08, **P1.2**

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y + z = \alpha + 3 \\ 2x - y + z = \alpha + 1 \\ 3x + \alpha y + 2z = 4 \end{cases},$$

se pide:

a) Probar que es compatible para todo valor de α . (1,3 puntos).

b) Obtener razonadamente el valor α para el que el sistema es indeterminado. (1 punto).

c) Resolver el sistema cuando $\alpha = 0$, escribiendo los cálculos necesarios para ello. (1 punto).

RESOLUCIÓN:

a) Vamos a calcular $\text{rg}(A)$ y $\text{rg}(A^*)$. Primero, $\text{rg}(A)$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & \alpha & 2 \end{vmatrix} = \alpha.$$

Por tanto, por el teorema de Rouché-Frobenius, si $\alpha \neq 0$, $\text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(A^*) = \text{n}^\text{o}$ incóg. $\to$ S.C.D.

Si $\alpha = 0$, $|A| = 0$, pero $\alpha_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \quad \to \text{rg}(A) = 2.$

Estudiemos en este caso $(\alpha = 0)$ el $\text{rg}(A^*)$:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(F_3 \to F_3 + (-1)F_2 + (-1)F_3)$, Nota que si sumas las filas 1 y 2, obtienes la fila 3.

Entonces, por el teorema de Rouché-Frobenius, $\text{rg}(A^*) = 2 = \text{rg}(A) < 3 = \text{n}^\text{o}$ incóg. $\to$ S.C.I.

Resumiendo, si $\alpha \neq 0$, existe una única solución y si $\alpha = 0$, existen infinitas.

b) En el apartado a) hemos obtenido razonadamente que si $\alpha = 0$, por el teorema de Rouché-Frobenius, se trata de un Sistema Compatible Indeterminado.

c) Cuando $\alpha = 0$, resolveremos por el método de Gauss:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \underset{F_3 - F_1 - F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_3 + F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(ec3)\ :\ z = \lambda, \qquad (ec2)\ 3x + 2\lambda = 4 \rightarrow x = \frac{4-2\lambda}{3}$$

$$(ec1)\ \frac{4-2\lambda}{3} + y + \lambda = 3 \qquad \rightarrow 4 - 2\lambda + 3y + 3\lambda = 9 \qquad \rightarrow y = \frac{5-\lambda}{3}.$$

$$Solución\ :\ \left\{\left(\frac{4-2\lambda}{3}, \frac{5-\lambda}{3}, \lambda\right)\ :\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Año 2007.

JUN07, P1.1

Dadas las matrices

$$B(x) = \begin{pmatrix} x+2 & 4 & 6 \\ 2x+3 & 3 & 6 \\ 4x+4 & 2 & 6 \end{pmatrix}\ ;\ C(y) = \begin{pmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Calcular el determinante de la matriz $3B(x)$ y obtener el valor de x para que dicho determinante valga 162.

b) Demostrar que la matriz $C(y)$ no tiene inversa para ningún valor real de y.

RESOLUCIÓN:

a)

$$|3B(x)| = \begin{vmatrix} 3x+6 & 12 & 18 \\ 6x+9 & 9 & 18 \\ 12x+12 & 6 & 18 \end{vmatrix} = 162x$$

Entonces

$$|3B(x)| = 162 \Leftrightarrow 162x = 162 \Leftrightarrow x = 1$$

b) La matriz $C(y)$ tiene inversa si y sólo si $|C(y)| \neq 0$. Calculemos el determinante de $C(y)$:

$$|C(y)| = \begin{vmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Valga lo que valga "y" el determinante da 0. Por lo tanto, no existe la inversa de *C(y)* para ningún valor de *y*.

JUN07, P1.2

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + \alpha y + z = 9 \\ 3x + 5y + z = 9 \\ \alpha x + y + z = 9 \end{cases}.$$

Se pide:

a) Probar que es siempre compatible, obteniendo los valores de α para los que es indeterminado.

b) Resolver el sistema anterior para $\alpha = 7$

RESOLUCIÓN:

a) Si observamos la matriz ampliada, la columna de términos independientes es igual a la tercera columna por 9 ($C_4 = 9 \cdot C_3$), por lo que

$$rg(A^*) = rg(A)$$

Por el teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es compatible.

Vamos a estudiar el rango de A según los valores de α :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha^2 - 8\alpha + 7$$

Veamos cuándo se anula:

$$\alpha^2 - 8\alpha + 7 = 0 \quad \rightarrow \begin{cases} \alpha = 7 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Entonces si $\alpha \neq 7$ y $\alpha \neq 1 \rightarrow$ rg(A) = rg(A^*) = 3 = nº de incógn. $\rightarrow$ SCD

Si $\alpha = 7$, o $\alpha = 1$ entonces como el menor $\alpha_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

$$rg(A) = rg(A^*) = 2 < n^o\ incóg. \quad \rightarrow SCI.$$

b) Como sabemos que es SCI, hemos de resolverlo por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \\ 7 & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 9 \\ 0 & -16 & -2 & -18 \\ 0 & -48 & -6 & -54 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 9 \\ 0 & 8 & 1 & 9 \\ 0 & 8 & 1 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 9 \\ 0 & 8 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(Ec2)\ \text{Tomamos } z = t \quad \rightarrow 8y + t = 9 \quad \rightarrow y = \frac{9-t}{8}$$

$$(Ec2) x + 7 \cdot \frac{9-t}{8} + t = 9 \quad \rightarrow 8x + 63 - 7t + 8t = 72 \quad \rightarrow x = \frac{9-t}{8}$$

$$Solución : \left\{ \left(\frac{9-t}{8}, \frac{9-t}{8}, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$$

SEP07, **P1.1**

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 6x + 3y + 2z = 5 \\ 3x + 4y + 6z = 3 \\ x + 3y + 2z = \alpha \end{cases}$$

se pide:

a) Justificar que para cualquier valor del parámetro real α , el sistema tiene solución única.

b) Hallar la solución del sistema en función del parámetro α .

c) Determinar el valor de α para que la solución (x, y, z) del sistema satisface $x + y + z = 1$.

RESOLUCIÓN:

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -50.$$

Entonces

$$rg(A) = rg(A^*) = n^o\ incóg = 3$$

Por el teorema de Rouché-Frobeniüs, es un sistema compatible determinado, es decir, tiene una única solución.

b) Podemos resolver el sistema por Cramer, ya que $|A| \neq 0$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ \alpha & 3 & 2 \end{vmatrix}}{-50} = \frac{10\alpha - 50}{-50} = \frac{5-\alpha}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & \alpha & 2 \end{vmatrix}}{-50} = \frac{30 - 30\alpha}{-50} = \frac{3\alpha - 3}{5}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & \alpha \end{vmatrix}}{-50} = \frac{15\alpha - 20}{-50} = \frac{4 - 3\alpha}{10}$$

Así la solución es

$$\left(\frac{5-\alpha}{5}, \frac{3\alpha-3}{5}, \frac{4-3\alpha}{10} \right) : \alpha \in \mathbb{R}.$$

c) $x + y + z = 1$

$$\rightarrow \frac{5-\alpha}{5} + \frac{3\alpha-3}{5} + \frac{4-3\alpha}{10} = 1 \qquad \rightarrow 10 - 2\alpha + 6\alpha - 6 + 4 - 3\alpha = 10 \qquad \rightarrow \alpha = 2$$

SEP07, **P1.2**

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ se pide:

a) Obtener razonadamente todos los valores de α para los que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es la única solución de la ecuación matricial $AX = \alpha X$

b) Resolver la ecuación matricial $AX = 2X$

RESOLUCIÓN:

a) $AX = \alpha X$

$$\rightarrow (A - \alpha I)X = 0. \qquad \rightarrow X = 0$$

es solución de la ecuación dada. Para que sea la única habrá de cumplirse que el sistema sea compatible determinado.

Por el teorema de Rouché-Frobënius, esto se cumple cuando $\mathrm{rg}(A - \alpha I) = 2$.

$$|A - \alpha I| = \begin{vmatrix} 6-\alpha & 4 \\ -1 & 1-\alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 7\alpha + 10 = 0, \qquad \rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha = 5 \end{cases}$$

Entonces, cuando $\alpha \neq 2$ y $\alpha \neq 5$, $\mathrm{rg}(A - \alpha I) = 2$ y el sistema tiene a $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ como solución única.

b) $AX = 2X \qquad \rightarrow (A - 2I)X = 0.$

Como el determinante de la matriz de coeficientes vale 0 (por el apartado (a)), no es un sistema de Cramer y por tanto lo resolveremos por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases} \qquad \rightarrow x + y = 0$$

Tomando $y = \lambda \qquad \longrightarrow x = -\lambda$

$$\mathit{Solución} \ \{(-\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Año 2006

JUN06, **P1A**

Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+2y-3z = \alpha \\ 2x+6y-11z = 2 \\ x-2y+7z = 1 \end{cases}$$

se pide:

a) Determinar el valor de α para que el sistema sea compatible.

b) Para este valor α, calcular el conjunto de soluciones del sistema.

c) Explicar la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las tres ecuaciones del sistema, en función de los valores de α.

RESOLUCIÓN:

Vamos a aplicar el teorema de Rouché-Frobenius.

rg(A):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -11 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 0. \qquad \alpha_{3,3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \qquad \rightarrow rg(A) = 2$$

rg(A^*) (Por Gauss):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 2 & 6 & -11 & 2 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 0 & 2 & -5 & 2-2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 5-5\alpha \end{pmatrix}$$

Así, si $5-5\alpha = 0$ ($\alpha = 1$) $\quad \rightarrow$ rg(A^*) = 2

Y por tanto, si $\alpha = 1$, rg(A) = rg(A^*) = 2 < 3 = nº incóg. $\quad \rightarrow$ *SCI.*

Si $\alpha \neq 1$, rg(A^*) = 3 ≠ rg(A) = 2 $\quad \rightarrow$ *SI.*

b) Tomando $\alpha = 1$, el sistema queda así:

$$\begin{cases} x+2y-3z = 1 \\ 2x+6y-11z = 2 \\ x-2y+7z = 1 \end{cases}$$

Lo resolvemos por Gauss (las transformaciones de Gauss ya están hechas en **a**)):

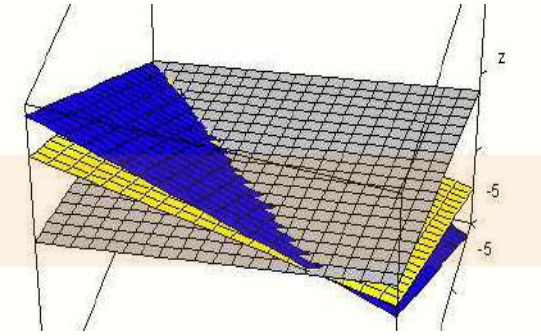
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 6 & -11 & 2 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Tomando } z = t \rightarrow (2^a ec)\ 2y-5t = 0 \quad \rightarrow \quad y = \frac{5t}{2}$$

$$(1^a ec) x + 2\frac{5t}{2} - 3t = 1 \qquad \rightarrow \qquad x = 1-2t$$

$$\text{Solución : } \left\{(1-2t, \frac{5t}{2}, t) \; : \; t \in \mathbb{R}\right\}$$

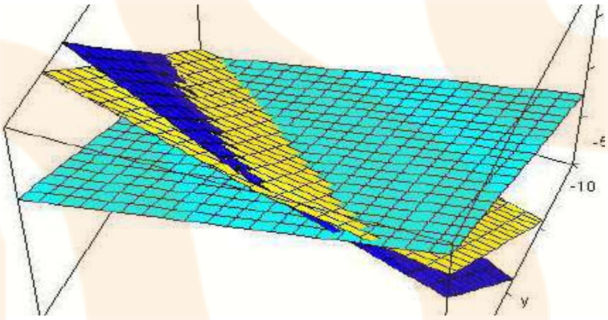
c) Cuando $\alpha = 1$, tenemos SCI, y la solución depende de un parámetro (1 grado de libertad) por lo que los tres planos se cortan en una recta.



Cuando $\alpha \neq 1$ tenemos SI, por lo que no existe ningún punto en común de los tres planos.

Además, no hay 2 filas de la matriz de coeficientes proporcionales, por lo que no hay 2 planos paralelos.

Entonces los planos se cortan 2 a 2 en sendas rectas que luego no tienen ningún punto en común.



JUN06, **P1B**

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

a) Probar que la matriz T, tiene inversa T^{-1}, y calcular dicha matriz inversa.

b) Dada la ecuación con matriz incógnita B, $A = T^{-1}BT$, calcular el determinante de B.

c) Obtener los elementos de la matriz B.

RESOLUCIÓN:

a) Una matriz tiene inversa si y sólo si su determinante es distinto de 0.

$$|T| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1. \rightarrow \exists T^{-1}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{|T|}[Adj(T)]^t = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^t = -1\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Despejando B:

$$TAT^{-1} = B$$

Utilizaremos las siguientes propiedades de los determinantes

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \qquad \text{y} \qquad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$|B| = |TAT^{-1}| = |T| \cdot |A| \cdot |T^{-1}| = -1 \cdot |A| \cdot \frac{1}{-1} = |A|$$

Calculemos pues el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

Entonces $|B| = 2$.

c)

$$B = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

SEP06, **P1A**

Dado el sistema de ecuaciones con un parámetro real λ e incógnitas x,y,z :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda + 2)x - y + z = 0 \\ 3x + (\lambda + 6)y - 3z = 0 \\ 5x + 5y + (\lambda - 2)z = 0 \end{array} \right. , \text{ se pide :}$$

a) Calcular para qué valores de λ el sistema sólo admite la solución $(x,y,z) = (0,0,0)$

b) Para cada valor de λ que hace indeterminado el sistema, obtener todas sus soluciones.

c) Explicar la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las ecuaciones del sistema cuando $\lambda = -3$.

RESOLUCIÓN:

a) El sistema es homogéneo, luego siempre es compatible (siempre tendrá por solución (0,0,0))

Hemos de averiguar cuándo será SCD, y por lo tanto no tendrá más soluciones.

Aplicamos el teorema de Rouché-Frobenius. rg(A):

$$\begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & 1 \\ 3 & \lambda+6 & -3 \\ 5 & 5 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda = \lambda(\lambda^2 + 6\lambda + 9)$$

Lo igualamos a 0

$$\lambda(\lambda^2 + 6\lambda + 9) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -3 \text{ (doble)} \end{cases}$$

Notar que rg(A) siempre es igual a rg(A*) ya que la matriz A se amplía con una columna de ceros.

Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -3$, $\text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(A^*) =$ nº incógn. $\rightarrow$ SCD : (0,0,0) es la única solución.

Si $\lambda = 0$ o $\lambda = -3$, entonces $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) < 3 =$ nº incóg $\rightarrow$ SCI, infinitas soluciones.

b) Resolvemos el sistema para $\lambda = 0$:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3x + 6y - 3z = 0 \\ 5x + 5y - 2z = 0 \end{cases}$$

Tenemos que resolverlo por Gauss ya que como $|A| = 0$, no es un sistema de Cramer.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -3 & 0 \\ 5 & 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -9 & 0 \\ 0 & 15 & -9 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tomando $z = t$

$$\rightarrow (ec2)\ 15y - 9z = 0 \qquad \rightarrow y = \frac{9t}{15} = \frac{3t}{5}$$

$$\rightarrow (ec1)\ 2x - y + z = 0 \qquad 2x - \frac{3t}{5} + t = 0 \qquad \rightarrow 10x - 3t + 5t = 0 \qquad \rightarrow 5x + t = 0 \qquad \rightarrow x = \frac{-t}{5}$$

$$\rightarrow \textit{Solución} : \left\{ \left(\frac{-t}{5}, \frac{3t}{5}, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Resolvemos ahora el sistema para $\lambda = -3$:

$$\begin{cases} -x-y+z=0 \\ 3x+3y-3z=0 \\ 5x+5y-5z=0 \end{cases}$$

Por Gauss, se eliminan directamente (ec2) y (ec3)

$-x-y+z=0$, el sistema tiene 2 grados de libertad. Tomamos $z=t$, $y=v$:

$$-x-v+t=0 \qquad \to x=t-v$$

$\to$ Solución: $\{(t-v, v, t) : v,t \in \mathbb{R}\}$

c) Cuando $\lambda=-3$, $\quad$ $\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(A^*)=1$, luego los tres planos son coincidentes.

SEP06, **P1B**

A es una matriz 3 x 3 tal que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \ y \ A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Se pide

a) Calcular el determinante de la matriz A^3 y la matriz inversa de A^3.

b) Calcular la matriz fila $X=(x,y,z)$ que es solución de la ecuación matricial $XA^3 = BA^2$, donde B es la matriz fila $B=(1,2,3)$.

c) Calcular la matriz inversa de A.

RESOLUCIÓN:

a)

$$|A^3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -1.$$

$$(A^3)^{-1} = \frac{1}{|A^3|}[Adj(A^3)]^t : \qquad (A^3)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$XA^3 = BA^2 \to X = BA^2(A^3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

c)

$$A^{-1} = A^2(A^3)^{-1} = (AAA^{-1}A^{-1}A^{-1}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Año 2005.

JUN05, P1A

Calcular los valores $x_1,x_2,x_3,x_4,y_1,y_2,y_3,y_4$ que satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} 2AX - 3AY = B \\ AX - AY = C \end{cases} , \text{ donde}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN:

Reduciendo el sistema por reducción se obtiene:

$$\begin{cases} 2AX - 3AY = B \\ AX - AY = C \end{cases} \rightarrow \cdot(-2) \rightarrow \begin{array}{r} 2AX - 3AY = B \\ -2AX + 2AY = -2C \\ \hline -AY = B - 2C \end{array} \Rightarrow AY = 2C - B \Rightarrow Y = A^{-1}(2C - B)$$

$$\begin{cases} 2AX - 3AY = B \\ AX - AY = C \end{cases} \rightarrow \cdot(-3) \rightarrow \begin{array}{r} 2AX - 3AY = B \\ -3AX + 3AY = -3C \\ \hline -AX \quad = B - 3C \end{array} \Rightarrow AX = 3C - B \Rightarrow X = A^{-1}(3C - B)$$

Por lo que necesitamos calcular A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} 2 \cdot F2 + F1 \\ F2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} 5 \cdot F2 + F1 \\ F1 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \frac{1}{2}F1 \\ F1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Así:

$$X = A^{-1}(3C - B) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left[3\begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -33 & -90 \\ 19 & 53 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$$

$$Y = A^{-1}(2C - B) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left[2\begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -16 & -60 \\ 9 & 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

JUN05, **P1B**

El sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + \alpha y + \alpha^2 z = 1 \\ x + \alpha y + \alpha z = \alpha \\ x + \alpha^2 y + \alpha^2 z = \alpha^2 \end{cases}$$

depende del parámetro α. Discutir para qué valores de α es incompatible, compatible determinado y compatible indeterminado, y resolverlo en los casos compatibles.

RESOLUCIÓN:

Vamos a aplicar el teorema de Rouché-Frobenius:

Calculamos rg(A).

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{vmatrix} = \alpha^4 - 2\alpha^3 + \alpha^2 = \alpha^2(\alpha^2 - 2\alpha + 1).$$

Resolvemos $|A| = 0$

$$\alpha^2(\alpha^2 - 2\alpha + 1) = 0 \to \begin{cases} \alpha^2 = 0 \to \alpha = 0 \text{ (doble)} \\ \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \to \alpha = 1 \text{ (doble)} \end{cases}$$

Por tanto, cuando $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$,

$$|A| \neq 0 \to rg(A) = 3 = rg(A^*) = n^o\ incóg. \to SCD$$

Si $\alpha = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to rg(A) = 1 \neq rg(A^*) = 2 \to SI$$

Si $\alpha = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to rg(A) = 1 = rg(A^*) = 1 \to SCI$$

con 2 grados de libertad ya que nº incógnitas=3 (nº incog – rg(A) = 2)

Ahora vamos a resolver el sistema en los casos compatibles.

Caso SCD ($\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$). Por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & \alpha^2 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & \alpha^2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-\alpha^2 & \alpha-1 \\ 0 & \alpha^2-\alpha & 0 & \alpha^2-1 \end{array}\right)$$

Así, de las dos últimas ecuaciones obtenemos

$$z = \frac{\alpha-1}{\alpha-\alpha^2} = \frac{1}{\alpha},\ y = \frac{\alpha^2-1}{\alpha^2-\alpha} = \frac{\alpha+1}{\alpha}.$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$x + \alpha\frac{\alpha+1}{\alpha} + \alpha^2\frac{1}{\alpha} = 1 \to x+\alpha+1+\alpha = 1 \to x = -2\alpha$$

$$\text{Solución}\ :\ (-2\alpha, \frac{\alpha+1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha})$$

Caso SCI ($\alpha = 1$). Las dos últimas ecuaciones quedan todo ceros. ($y = t$, $z = u$)

$$x+y+z = 1 \to x+t+u = 1 \to x = 1-t-u$$

$$\text{Solución}\ :\ \{(1-t-u,\ t,\ u)\ :\ t,u \in \mathbb{R}\}$$

SEP05, P1A

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

calcular razonadamente la matriz $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que verifica la ecuación

$$(AB^t + C)X = (A^tD)E$$

donde M^t significa la matriz transpuesta de la matriz M.

RESOLUCIÓN:

Calculemos $(AB^t + C)$

$$(AB^t + C) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 4 & -4 \\ 21 & 6 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

Y ahora calculemos $(A^tD)E$

$$(A^tD)E = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 10 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Tenemos que resolver

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Así

$$X = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Calculamos esta matriz inversa por la regla de los determinantes :

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}[Adj(M)]^t = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{60}{7} \\ 10 \\ -30 \end{pmatrix}$$

SEP05, **P1B**

En el mercado podemos encontrar tres alimentos preparados para gatos que se fabrican poniendo, por kilo, las siguientes cantidades de carne, pescado y verdura:

Alimento Migado: 600 g de carne, 300 de pescado y 100 g de verdura.

Alimento Catomeal: 300 g de carne, 400 g de pescado y 300 g de verdura.

Alimento Comecat; 200 g de carne, 600 g de pescado y 200 g de verdura.

Si queremos ofrecer a nuestro gato 470 g de carne, 370 g de pescado y 160 g de verdura por kilo de alimento, ¿qué porcentaje de cada uno de los compuestos anteriores hemos de mezclar para obtener la proporción deseada?

RESOLUCIÓN:

Sean *x*,*y*,*z*, los porcentajes (en tanto por uno) de cada uno de los compuestos alimenticios (Migado, Catomeal y Comecat respectivamente) que utilizaremos en la mezcla.

La cantidad de carne obtenida será:

(Porcentaje de Migado) • 600 g + (Porcentaje de Catomeal) • 300 g + (Porcentaje de Comecat) • 200 g.

Dicha cantidad de carne habrá de ser igual a 470 g. Es decir:

$$600x + 300y + 200z = 470$$

De forma análoga obtenemos las otras 2 ecuaciones, y el sistema queda:

$$\left\{\begin{array}{l} 600x + 300y + 200z = 470 \\ 300x + 400y + 600z = 370 \\ 100x + 300y + 200z = 160 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 6x + 3y + 2z = 4.7 \\ 3x + 4y + 6z = 3.7 \\ 1x + 3y + 2z = 1.6 \end{array}\right.$$

Este sistema, resuelto por Gauss o por Cramer, tiene por solución $x = 0{,}62$, $y = 0{,}22$, $z = 0{,}16$.

Por lo que los porcentajes que se deben utilizar son: 62 % del alimento Migado, 22% del alimento Catomeal y 16% del alimento Comecat.