Tema 1: TRAZADOS FUNDAMENTALES EN EL PLANO:

Índice de contenidos:

OBJETIVOS:

1. **Realizar los trazados geométricos en el plano referentes a proporcionalidad de segmentos, arco capaz, rectificación de arcos y ejes radicales.**
2. **Conocer los fundamentos teóricos de dichos trazados.**
3. **Aplicar dichos trazados a la realización de trabajos mas complejos**
4. **Usar correctamente el compás, la escuadra y el cartabón, la regla y el lápiz.**

Nomenclatura:

A lo largo del curso nos referiremos a los elementos geométricos de la siguiente manera:

Punto: se suele indicar con letra Mayúscula; por ejemplo: A, B, C, P, etc.
Recta: se suele indicar con letra minúscula; por ejemplo: r, s, etc.
Segmento: se suele indicar con letras mayúsculas: ejemplo: AB, BC, etc.

proporcionalidad:.

Hallar La media proporcional entre dos segmentos:

Método 1 para hallar La media proporcional entre dos segmentos:

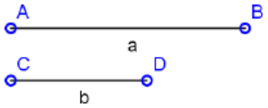
Teorema de la altura

Dados dos segmentos que sumados constituyen la hipotenusa de un triángulo rectángulo.
En todo triángulo rectángulo la altura sobre la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos en que queda dividida la hipotenusa:

1. Sobre la recta r se trasladan los segmentos a=AB y b=CD, trazando

una semicircunferencia de diámetro la suma de ambos AD

2. Por el punto B =C se traza recta perpendicular a r hasta cortar a la semicircunferencia en el punto F.
3. El segmento x = AF es la media proporcional buscada



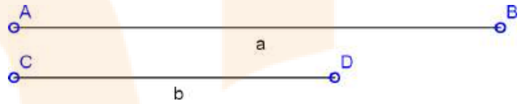
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

Método 2 para hallar La media proporcional entre dos segmentos.

Teorema del cateto

En todo triángulo rectángulo un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.

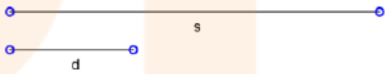
1. Restar los dos segmentos, trazando una semicircunferencia cuyo diámetro sea el segmento mayor A B.
2. La perpendicular trazada por el extremo C del segmento menor BC nos determina sobre la semicircunferencia el punto D, siendo el segmento D B la media proporcional buscada.



$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

Hallar dos segmentos conocida su suma y su diferencia.

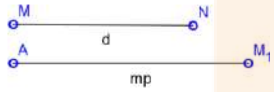
1. Sobre el segmento suma A C (S), sitúese el segmento diferencia A D (D) con orígenes A comunes, trazando la mediatriz al segmento D C comprendido entre los dos extremos no comunes, obteniendo el punto B.
2. Los segmentos pedidos son A B Y B C.



Según la construcción, la mitad del segmento S - D es el segmento menor, puesto que S = A B + B C y D = A B - B C. Restando miembro a miembro, S - D = 2 B C, de donde B C =S/2-D/2

Hallar dos segmentos conociendo su suma y el segmento media proporcional entre ambos.

Hallar dos segmentos conociendo su diferencia y el segmento media proporcional entre ambos.



1. Tomando como diámetro la diferencia de segmentos M N conocida, trazar una circunferencia así como una tangente (perpendicular a M N), por uno de los extremos M del diámetro, transportando sobre la misma la longitud A M de la media proporcional conocida.
2. La recta que une el extremo A con el centro O de la circunferencia queda interceptada por la misma en los puntos B y C, siendo A C y A B los segmentos pedidos.

Dado un segmento, hallar su raíz cuadrada:

1. Sobre una recta se toma el segmento AB y a continuación el segmento unidad BC
2. Hallamos D, punto medio del segmento AC y trazamos semicircunferencia de diámetro AC
3. La perpendicular al diámetro por el punto B corta a la semicircunferencia en el punto E
4. El segmento BE es la raíz cuadrada del segmento AB

Sección Áurea.

Se denomina sección Áurea de un segmento a la división que le produce un punto de tal forma que la proporción que existe entre la parte mas pequeña y la parte mas grande es la misma que hay entre la parte mas grande y el todo

Dado UN SEGMENTO HALLAR SU SECCIÓN AUREA.

1. Por B se traza la perpendicular r
2. Se halla el punto medio C de AB y con centro en B y radio BC se traza un arco
3. Se une A y D, y con centro en D y radio DB se traza un Arco
4. Con centro en A y radio AE se traza otro arco. AF es la división Áurea.

Hallar un segmento cuya división Áurea es un segmento dado.

1. Dado el segmento AB
2. Por uno de los extremos B, se traza una recta r perpendicular al segmento
3. Se halla el punto medio C del segmento AB trazando su mediatriz, y con centro en B y radio BC se describe un arco hasta cortar a r en el punto D.
4.se une el punto D con el extremo A, y con centro en B y radio DB se describe un arco hasta cortar a la prolongación de la recta AD en el punto E
5. Con centro en A y radio AE se traza otro arco hasta cortar la prolongación del segmento AB en F. AF es el segmento cuya parte Áurea es AB

Rectángulo áureo:

Se denomina **Rectángulo Áureo** a aquel cuyos lados están relacionados según la proporción áurea.
Trazado:

1. Por uno de los extremos se traza la recta r perpendicular al segmento AB y sobre ella se lleva la distancia BD=1/2AB
2. Con centro en D y radio se traza un arco hasta cortar a la recta AD en el punto E,
3. El segmento AE es el otro lado del rectángulo

Circunferencia:

Definiciones.

Circunferencia es el lugar geométrico o conjunto de
Puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.
Arco es un segmento de circunferencia.
Círculo es la parte de plano interior a la circunferencia.
Sector circular es la porción de círculo comprendida entre dos radios (fig. 34).
Segmento circular es la parte de círculo comprendida entre una cuerda y su arco.

Rectas de una circunferencia.

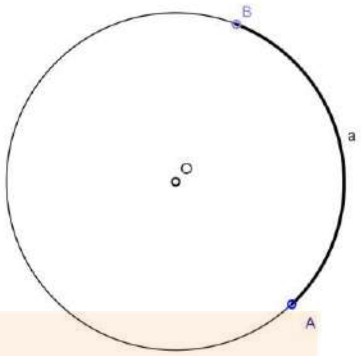
Radio (r): es el segmento *OA* de la recta que une el centro con cualquier punto de la circunferencia (fig. 35).

Tangente (t): es la recta que tiene un solo punto común *F* con la circunferencia.

Ángulos de una circunferencia.

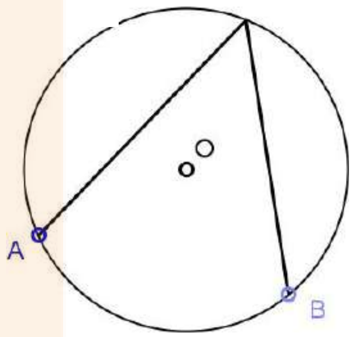
Ángulo central (fig. 36): el vértice del ángulo es el centro de la circunferencia. Su valor es:

$$\varphi = \frac{a}{r} \cdot \frac{180^{o}}{\pi}$$



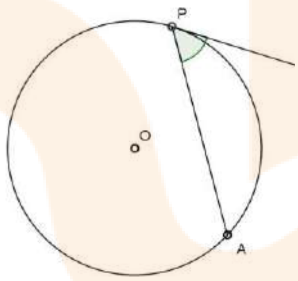
Ángulo inscrito (fig. 37): el vértice es un punto de la circunferencia y sus lados son cuerdas de la misma.

$$\varphi = \frac{\alpha}{2}$$



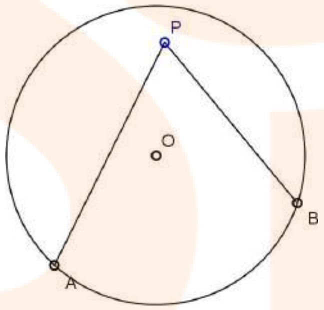
Ángulo semiinscrito (fig. 38): el vértice es un punto de la circunferencia, uno de los lados es secante y el otro es tangente a la circunferencia.

$$\varphi = \frac{\alpha}{2}$$



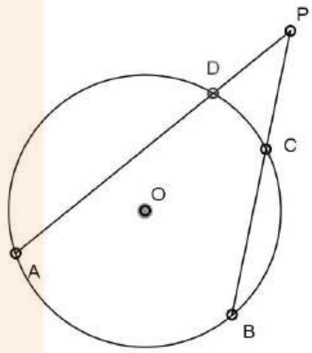
Ángulo interior (fig. 39): el vértice es un punto interior de la circunferencia.

$$\varphi = \frac{\alpha + \beta}{2}$$



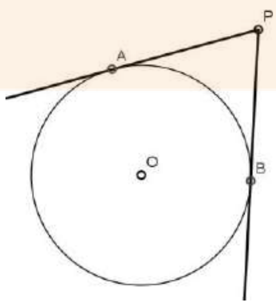
Ángulo exterior (fig. 40): el vértice es un punto exterior de la circunferencia y los lados son rectas secantes.

$$\varphi = \frac{\alpha - \beta}{2}$$



Ángulo circunscrito (fig. 41): el vértice es un punto exterior y los lados son rectas tangentes a la circunferencia.

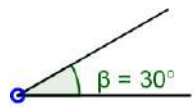
$$\varphi = \frac{\alpha - \beta}{2}$$



Arco capaz.

- Lugar geométrico es el conjunto de puntos que cumplen una condición común

- La mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos
- La esfera es el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidista de uno fijo llamado centro
- Se llama arco capaz de un ángulo **μ** dado respecto a un segmento también conocido , al lugar geométrico de los puntos del plano desde los cuales se ve el segmento dado bajo el ángulo **μ.**

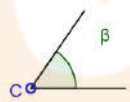


Dibujo de un arco capaz

Dado el segmento AB y el ángulo **β**.Por uno de los extremos A del segmento dado, se traza la recta m perpendicular a AB, restando a continuación el ángulo **β** hasta cortar a la mediatriz en O´ , de tal forma que el ángulo O´AB es de **90 - β** .
Con centro en O´ se traza un arco de circunferencia que pase por A y B . Dicho arco es el arco capaz buscado

Aplicación de un arco capaz en la construcción de un triángulo

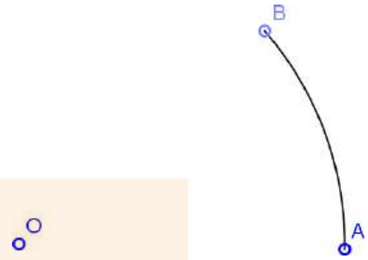
Los datos del triángulo son el lado a Y el ángulo *Â* opuesto al lado a.
Se puede obtener el triángulo construyendo el arco capaz del segmento a, bajo el ángulo *Â* son los triángulos ABC en todas sus variantes los cuales se obtienen haciendo centro en C y con radio *r* cortando el arco capaz, que es la circunferencia de centro O y radio <u>*OB*</u> = <u>*OC.*</u>



Rectificar un arco de circunferencia es hallar el segmento recto cuya longitud sea igual a la del arco dado

Rectificación de un arco menor .de 90°

Sea el arco *AB* de centro O
1. Por el punto *A,* uno de los extremos del arco, se traza el diámetro *AD* y la recta r tangente al arco.
2 Se divide el radio OD en cuatro partes iguales, y haciendo centro en el punto D y tomando como radio tres de esas cuatro partes, se describe un arco hasta cortar a la prolongación del diámetro en el punto C.
3.Se une el punto C con el otro extremo B del arco hasta cortar a la recta tangente *r* en el punto *E.* El segmento *AE* es la rectificación del arco *AB*



Rectificación de un arco de 90°

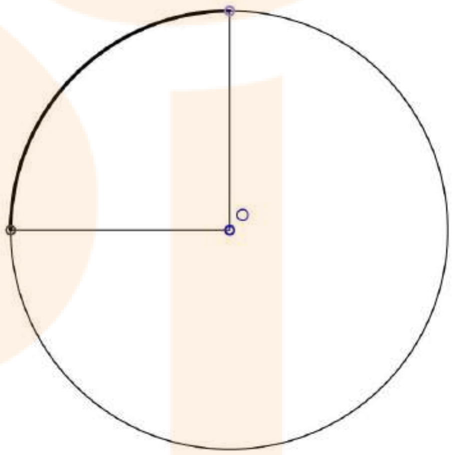
Sea la circunferencia de centro O

•1 Con centros en los extremos *A* y B de un diámetro se describen dos arcos del mismo radio que la circunferencia hasta cortar a esta en C y D.

•2. Con centro en *A* y radio *AD,* y centro en B y radio *BE*
se trazan dos arcos que se cortan en *E*

•3, Por último, con centro en C y radio CE se describe otro arco que corta a la circunferencia en *F.* El segmento *AF* es la rectificación del arco de 90º.

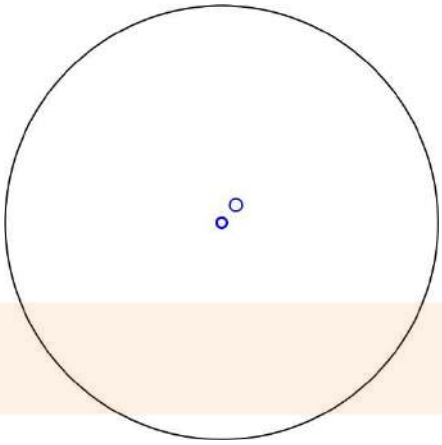
También podría haberse aplicado el procedimiento del caso anterior



Rectificación de una semicircunferencia

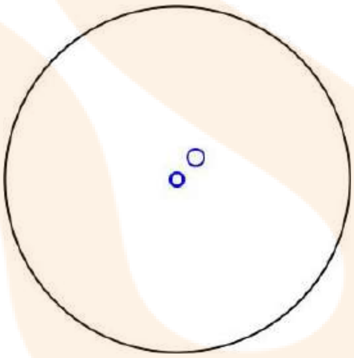
1, Se trazan dos diámetros *AB* y CD perpendiculares entre sí, y con centro en B y radio BO se dibuja un arco que corta a la circunferencia en el punto E.

2 .Con centro en *A* y radio *AC*(lado del cuadrado inscrito) y con centro en *A* y radio *AE* (lado del triángulo inscrito), se trazan dos arcos que cortan a la recta tangente a la circunferencia en el punto *A,* en *F* y G. El segmento *FG* es la rectificación buscada



Rectificación de una circunferencia

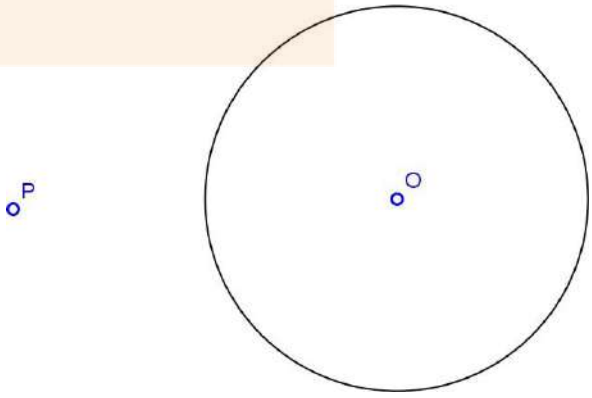
La longitud de una circunferencia es aproximadamente igual a tres veces el diámetro más una séptima parte del mismo; por tanto, dada la circunferencia de centro O
1 Se traza un diámetro cualquiera *AB* y se divide en siete partes iguales.
2 Sobre una recta *r* a partir de un punto C, se lleva tres veces el diámetro más una de las siete partes en que se ha dividido. El segmento CD total es la rectificación de la circunferencia.



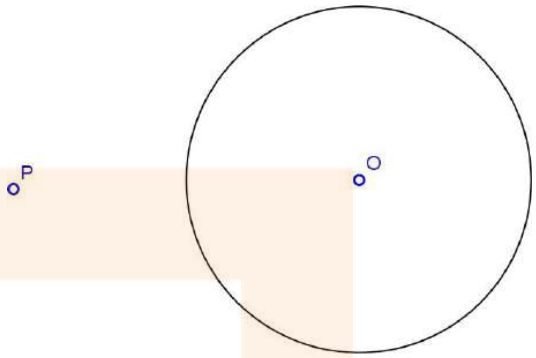
Potencia de un punto respecto de una circunferencia

Concepto de potencia

- Aparentemente parece no existir ninguna relación entre un punto y una circunferencia.
- Si partiendo del punto P se traza un haz de rectas, unas serán secantes, otras tangentes, otras no cortarán a la circunferencia.
- Las rectas que no corten a la circunferencia no tienen ninguna



relación con ella, pero las que sean secantes o tangentes determinarán unos puntos intersección con ella y, por tanto, cada recta quedará dividida en magnitudes, segmentos o distancias desde el punto P a los puntos intersección con la circunferencia. El producto de distancias de dicho punto a los puntos de la circunferencia, determina una constante PA . PA' = K que es la potencia de un punto respecto de una circunferencia .



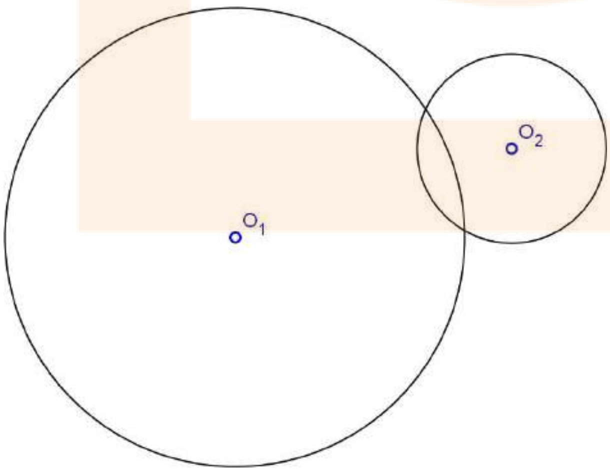
- Esta constante K es la misma para todas las rectas que partiendo del punto P sean secantes o tangentes a la circunferencia.
- Esta propiedad se desprende de la semejanza de los triángulos A'PB y B'PA formados al trazar estas rectas. Observa que los ángulos A' y B' son iguales por ser inscritos, los dos triángulos tienen común el ángulo P. Al tener todos sus ángulos iguales, son proporcionales, pudiendo establecer
- En el caso límite en que una secante se transforme en tangente el punto T es doble pues cumple una doble alineación con P , por tanto, PT = PT')

Eje radical de dos circunferencias

Dadas dos circunferencias de centros 01 y O2
se llama eje radical al lugar geométrico de los puntos del plano que tienen la misma potencia respecto de ambas circunferencias:
MA x MB = MC x MD
El eje radical es siempre perpendicular a la recta que une los centros de las dos circunferencias.

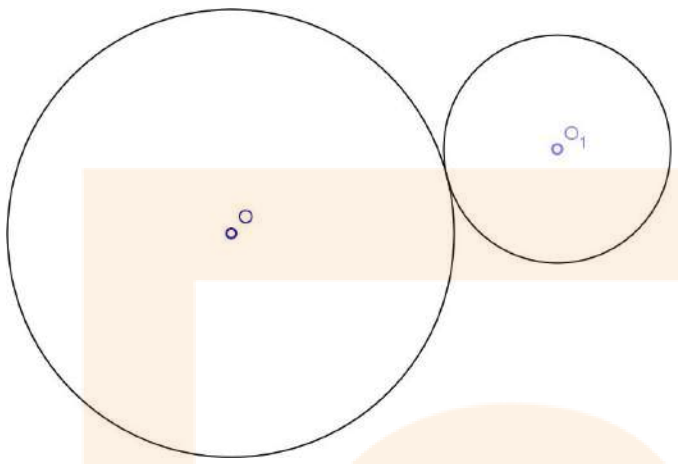
Eje radical de dos circunferencias secantes

Se halla uniendo los puntos de intersección *A* y *B* de ambas circunferencias.



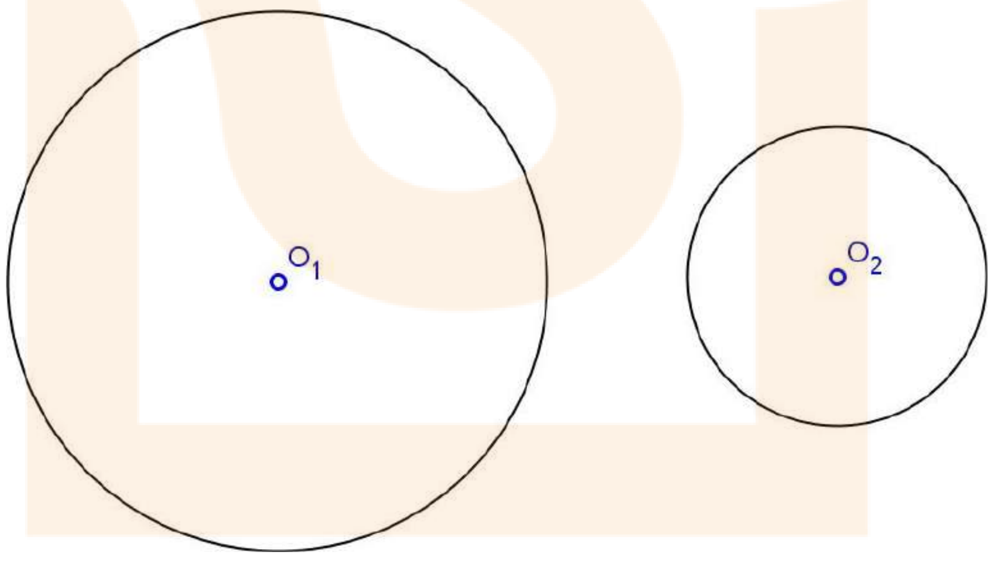
Eje radical de dos circunferencias tangentes

Se halla trazando la recta tangente común a ambas circunferencias

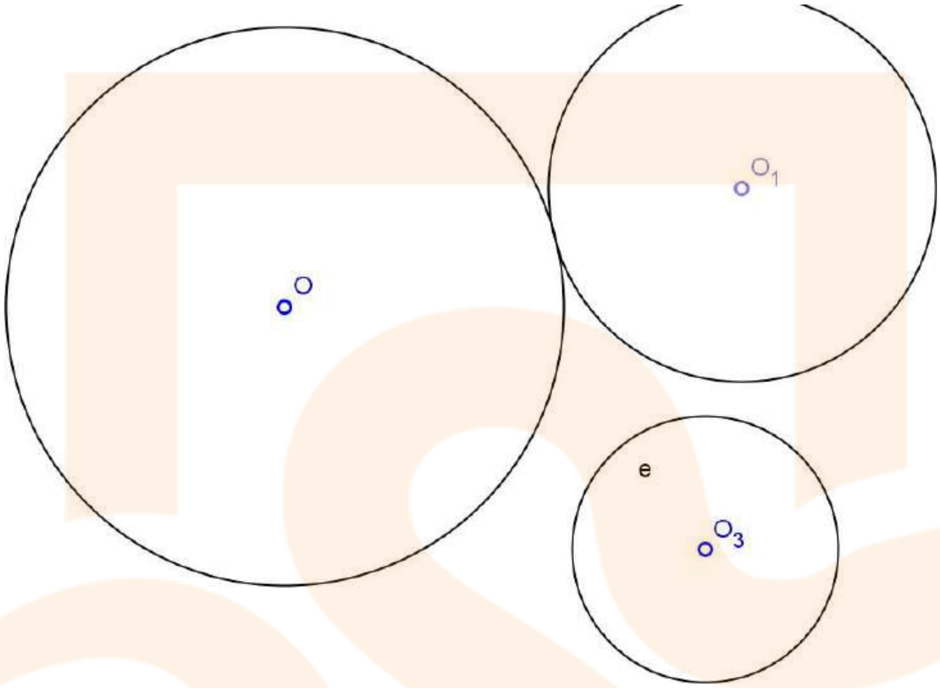


Eje radical de dos circunferencias exteriores .

El eje se determina trazando una circunferencia auxiliar de centro O), hallando los ejes radicales *r y* s de esta con las de centro O1y O2 Y trazando por último la recta e que pasa por el punto *E* de intersección y es perpendicular a la recta 01 02 que une los centros dados



Eje radical de TRES circunferencias.



FIN

Tema 2: SEMEJANZA Y EQUIVALENCIA:

Índice de contenidos:

1. semejanza: directa e inversa. Aplicación en escalas.
2. equivalencias: métodos para hallar figuras equivalentes sencillas.

Objetivos:

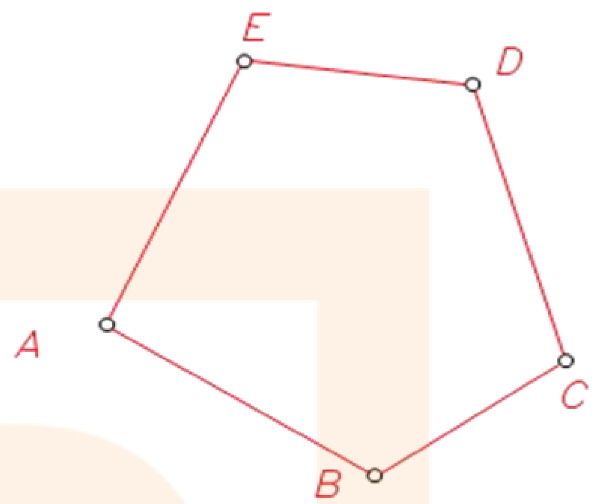
1. Resolver y aplicar problemas gráficos relacionados con la semejanza.
2. Resolver y aplicar problemas gráficos relacionados con las escalas.
3. Construir y dibujar figuras geométricas planas que tengan la misma superficie que otras.
4. saber aplicar dichos trazados a la realización de trabajos más complejos

Semejanza

CONSTRUCCIÓN DE UNA FIGURA DIRECTAMENTE SEMEJANTE A OTRA CONOCIENDO LA RAZÓN DE SEMEJANZA (POR RADIACIÓN)

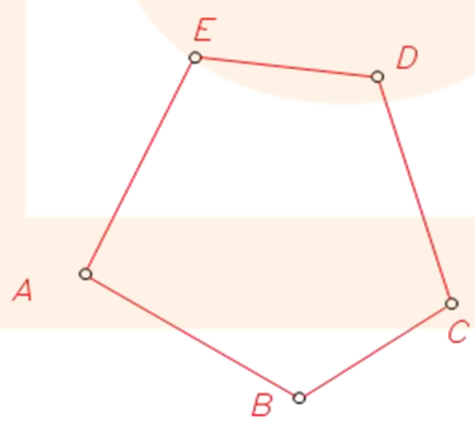
Razón 2/3

Dado el polígono **ABCDE** supongamos que la razón de semejanza es **2/3**:
1 Se toma un punto arbitrario **O** y se une con todos los vértices del polígono dado.
2 Uno de los segmentos así hallados, por ejemplo **DA**, se divide en *tantas partes* como indique el **denominador** de la razón de semejanza, en nuestro caso **3**, ya partir del punto **O** se toman *tantas partes* como indique el **numerador**; el punto así hallado es **A'**.
3 Por el punto **A**' se traza la paralela a la recta **AB** hasta cortar a la recta **OB** en el punto **B**'.
4 Por el punto B' se traza la paralela a la recta BG hasta cortar a la recta OG en el punto G', y así sucesivamente hasta cerrar el polígono solicitado.



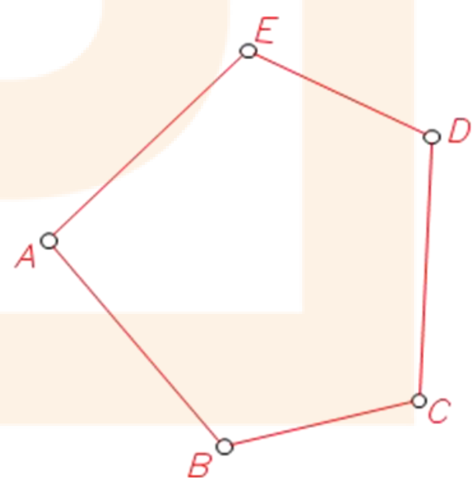
CONSTRUCCIÓN DE UNA FIGURA DIRECTAMENTE SEMEJANTE A OTRA CONOCIENDO LA RAZÓN DE SEMEJANZA (POR RADIACIÓN)

Razón 3/2



CONSTRUCCIÓN DE UNA FIGURA INVERSAMENTE PROPORCIONAL A OTRA

En este caso la razón de semejanza es negativa y, por tanto, se actúa como en el caso anterior, salvo en el momento de tomar tantas partes como indica el numerador, que en vez de tomarlas en el mismo sentido que hayamos tomado el denominador, se toman en sentido contrario.



CONSTRUCCIÓN DE UNA FIGURA DIRECTAMENTE SEMEJANTE A OTRA CONOCIENDO LA RAZÓN DE SEMEJANZA (POR COORDENADAS)

Razón 2/3

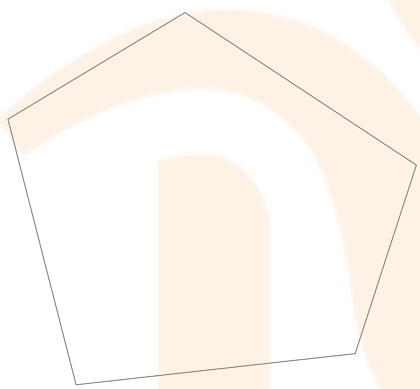
Este caso es similar al de igualdad de figuras. Dado el polígono ABCDE), y la razón de semejanza **2/3**:

1 Se dibujan dos ejes coordenadas **X** e **Y** cualesquiera.

2 Se proyectan todos los vértices sobre el eje **X** (puntos **Ax Bx, Cx**, etc.) y el eje Y (puntos **Ay, By, Cy**, etc.,

3 Sobre dos nuevos ejes coordenadas cualesquiera **X**' e **Y**' se llevan, a partir del origen, las distancias **O'A = 2/3(oA) , O'B'x = 2/3(OB)** , O'C = 2/3(OCx) , etc. sobre el eje X, y O'A_ = 2/3(OA) , O'B_ = 2/3(08), O'C = 2/3(OCy), etc., sobre el otro eje Y'.

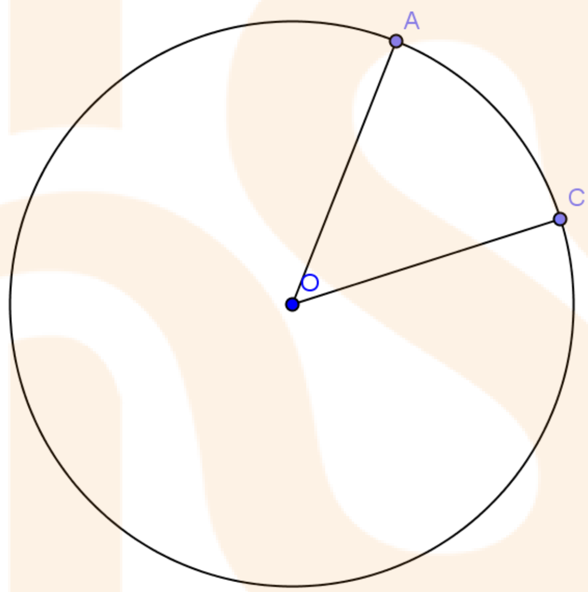
4 Por los puntos hallados anteriormente se trazan perpendiculares a los ejes respectivos **X**' e **Y'**, de tal forma que los puntos de intersección son los vértices del nuevo polígono **A'B'C'D'E**', semejante al dado.



SEMEJANZA DIRECTA: APLICACIÓN

Sea la circunferencia de centro O y los radios OA y OB

1. Sobre la recta AB se determinan los puntos C y D de forma que BC=AD=AB
2. Hallamos E y F como las intersecciones de las rectas OC y OD con la circunferencia
3. La recta EF es la cuerda que queda dividida en tres partes iguales EG, GH y HF



ESCALAS

Las escalas pueden considerarse como la aplicación práctica de la semejanza. Según esto, **escala es la relación que existe entre dos figuras**, una de ellas es la del **dibujo** y la otra, **la figura real**. Esta relación, igual que en una semejanza, se representa por un cociente donde el *numerador representa la medida del dibujo y el denominador, la medida en la realidad.*

Por ejemplo, supongamos que la dimensión de un objeto mide **1.475** mm y sobre el papeL la vamos a representar como **55** mm; esto significa que hemos aplicado una escala E = 55/1.475 o, simplificando, E = 1/25.

ESCALA=DIBUJO/REALIDAD
Clases de escalas
- De reducción: reducen el objeto real al dibujarlo *(el* numerador es menor que el denominador).
- De ampliación: aumentan el objeto real (*el numerador* es mayor que el denominador).
- **De tamaño natural**: el dibujo y el objeto tienen las mismas medidas (se representa por **E = 1/1).**
Escalas más usuales
1:1, 1:2, 1:5 y todas aquellas que se deducen de las anteriores añadiendo ceros (**1:10, 1:20, 1:50, 1:100, 1:200, 1:500, 1:1.000, 1:2.000**, etcJ.
En escalas de ampliación: 2:1, 5:1 y 10:1.

EMPLEO DE LAS ESCALAS MULTIPLICANDO Y DIVIDIENDO

De todo lo dicho anteriormente se deduce una primera forma de dibujar a escala que consistiría en:
1 Se toma la medida del objeto real que se pretende dibujar.
2 Dicha medida se multiplica por el numerador de la escala y se divide por el denominador.
3 El resultado de la operación anterior se lleva al papel en el que se hace el dibujo.
Evidentemente este es un procedimiento poco ortodoxo; en dibujo deben realizarse todas las operaciones de forma gráfica; otras materias se encargan de resolver los problemas por otros procedimientos.

TRIÁNGULO UNIVERSAL DE ESCALA

Se trata ahora de construir un triángulo, denominado triángulo universal de escalas, de forma que en una misma construcción podamos obtener las escalas más frecuentemente utilizadas.
1 *Se construye un triángulo cualquiera con la única condición de que un lado mida 10 cm*. No obstante, por facilidad de construcción, se aconseja que dicho triángulo sea equilátero o bien rectángulo isósceles cuyos catetos midan **10 cm**
2 El lado que mida **10 cm** se divide en **diez partes iguales**. Cada uno de los puntos de división, numerados del **1 al 10**, se une con el vértice opuesto A del triángulo.
3 Uno cualquiera de los otros dos lados se divide también en diez partes iguales, numerando los puntos de división del **1 al 10**, comenzando por el vértice A. Por cada uno de estos puntos de división se trazan rectas paralelas al lado que mide 10 cm, quedando todas ellas divididas en diez partes iguales al cortarse con las rectas que concurren en el punto A, y obteniendo así diversas escalas de reducción, tales como **1:10**, **1:5**, **3:10**,

2:5, **1:2**, etc.
4 Si se prolongan las rectas que concurren en el punto A y se siguen trazando rectas paralelas a la recta que contiene la escala natural, por debajo
de ella ya la misma distancia que las anteriores, se obtienen las escalas de ampliación **11: 10**, **6:5**, **13: 10**, etc.

ESCALA GRÁFICA

La escala gráfica o escala volante consiste en la construcción de una regla reducida o ampliada, según sea el caso, que nos permita dibujar con ella, de tal forma que las magnitudes del objeto real sean tomadas con la regla natural pero dibujadas sobre el papel con la regla volante que nos hayamos "fabricado" .

Proceso para la construcción de una escala gráfica:

1 Se elige la unidad que vayamos a reducir. Por ejemplo, si se quiere construir la escala **E 3:20 no se elegirá el centímetro como unidad a reducir**, puesto que al multiplicar por 3 y dividir por 20 nos da como resultado 0,15 cm = 1,5 mm, que es una unidad muy pequeña para trabajar con ella; **tampoco convendría elegir el metro** como unidad a reducir, pues al efectuar la operación anterior da como resultado 0,15 m = **15 cm** que, por el contrario, es una magnitud muy grande. Sin embargo, al tomar como unidad **el decímetro** el resultado de la operación es 0,15 dm = 1,5 cm, **tamaño apropiado** para nuestro propósito.

2 Sobre una cartulina se trazan dos rectas paralelas al borde de la misma ya continuación se llevan, a partir del extremo de la izquierda, tantas unidades reducidas (1,5 cm) como quepan, numerándolas a partir del-1 (-1, O, 1,2,3, ...).

***3* La primera de las divisiones** obtenidas la dividimos a su vez en diez partes iguales por el procedimiento de división de un segmento en partes iguales. La graduación así obtenida se denomina ***contra escala gráfica**.*

La forma de utilizar una escala volante, teniendo en cuenta que dicha escala solo sirve para medir en un dibujo lo que previamente se haya medido en la realidad con una regla natural, consiste en hacer coincidir la medida con una división entera de la escala gráfica, observando los decimales en la contra escala gráfica, tal como se indica en el ejemplo de la figura 9 al tomar una medida de 8,6 dm sobre el dibujo.

Equivalencia

Dos figuras son equivalentes cuando tienen la misma superficie.

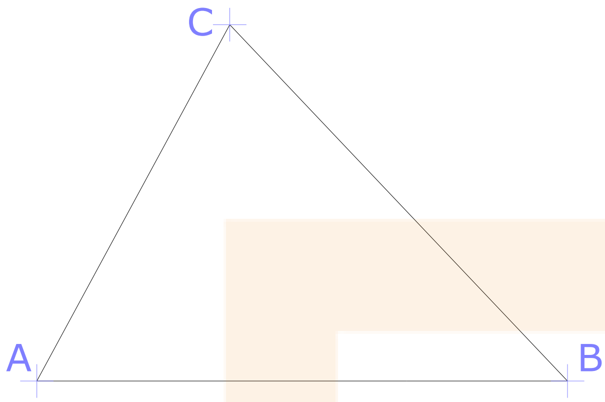
DADO UN TRIÁNGULO, DIBUJAR OTRO EQUIVALENTE

El área de un triángulo es igual a la base por la altura,
por tanto, sea el triángulo ***ABC***:

- 1 Por el punto **C** se traza la paralela a la base ***AB***

2 Cualquier punto ***D*** de **la paralela, unido con *A*** y **B**, determina un

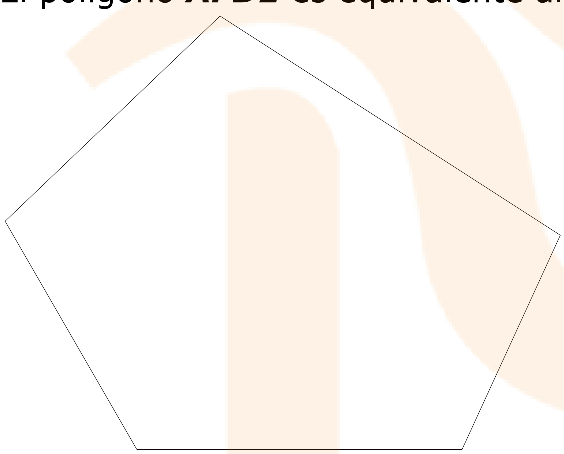
triángulo equivalente al dado.



DADO UN POLÍGONO CUALQUIERA, DBUJAR OTRO EQUIVALENTE CON UN LADO MENOS

Sea el polígono ***ABCDE*** (fig. 4):

1 Por el punto **C** se traza la paralela a la diagonal ***BD*** hasta cortar a la prolongación del lado ***AB*** en el punto ***F.***
El polígono ***AFDE*** es equivalente al anterior pero con un lado menos.

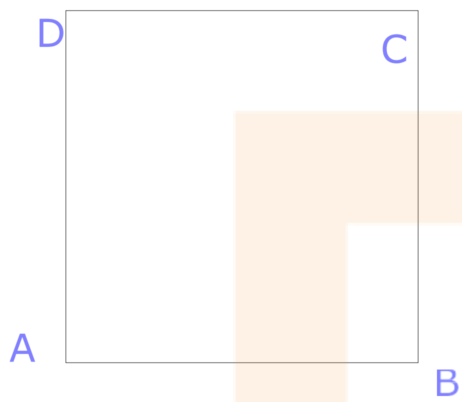


DADO UN CUADRADO, DIBUJAR UN TRIÁNGULO EQUIVALENTE

Sea el cuadrado ***ABCD***:

1 Con centro en ***E,*** punto medio del lado ***AB,*** se traza la semicircunferencia que pasa por los vértices **C** y ***D*** del cuadrado y que corta a las prolongaciones del lado ***AB*** en los puntos ***F y* G.**
2 Con centro en **B** y radio **BG** se traza un arco de circunferencia que corta aliado BC en el punto *H,* y con centro en *H* e igual radio se traza otro arco que corta a la prolongación del lado BC en el punto *I.*

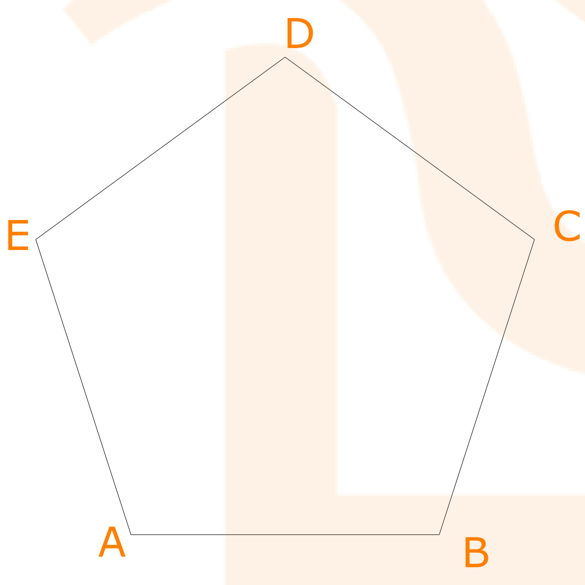
3 Por el punto ***I*** se traza la recta **r** paralela al lado *AB.* Cualquier punto **J** de la recta ***r,*** unido con los puntos ***B y F*** determina el triángulo que se busca.



DADO UN PENTÁGONO, DIBUJAR UN TRIÁNGULO EQUIVALENTE

Sea el pentágono ***ABCDE***:

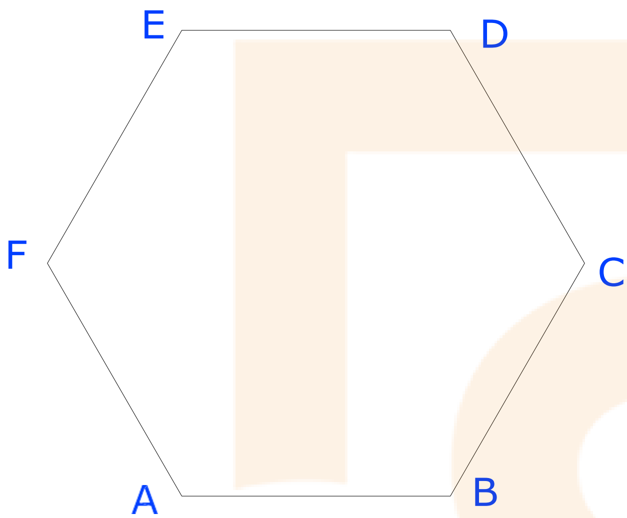
- **1** Por el vértice ***E*** se traza la paralela a la diagonal ***A D*** hasta cortar a la prolongación del lado ***AB*** en el punto ***F.***
- **2** Por el vértice **C** se traza la paralela a la diagonal ***B D*** asta cortar a la prolongación del lado ***AB*** en el punto **G**. El triángulo ***FGD*** es el que se busca.



DADO UN HEXÁGONO REGULAR, DIBUJAR UN TRIÁNGULO EQUIVALENTE

Sea el hexágono ***ABCDEF***:

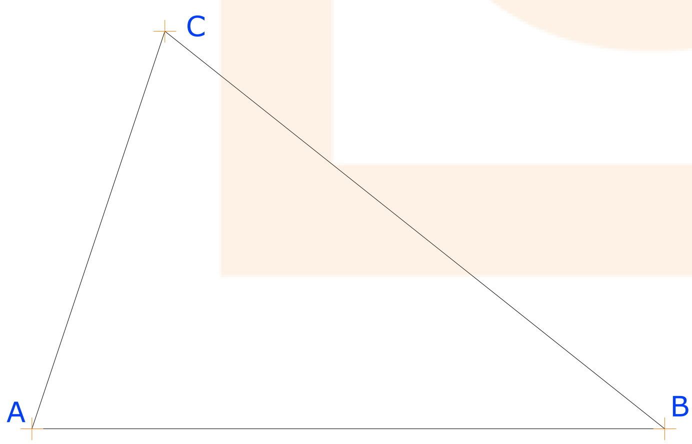
- **1** Por el vértice ***F*** se traza la perpendicular aliado ***AB*** hasta cortar a su prolongación en el punto **G.**
- **2** Con centro en **B** y radio **BG** se traza la semicircunferencia que corta a la prolongación del lado ***AB*** en el punto ***H.*** Los puntos **G** y **H** unidos con cualquier punto ***I*** del lado ***ED*** determinan un triángulo equivalente al hexágono.



DADO UN TRIÁNGULO, DIBUJAR UN RECTÁNGULO EQUIVALENTE

Sea el triángulo ***ABC***:

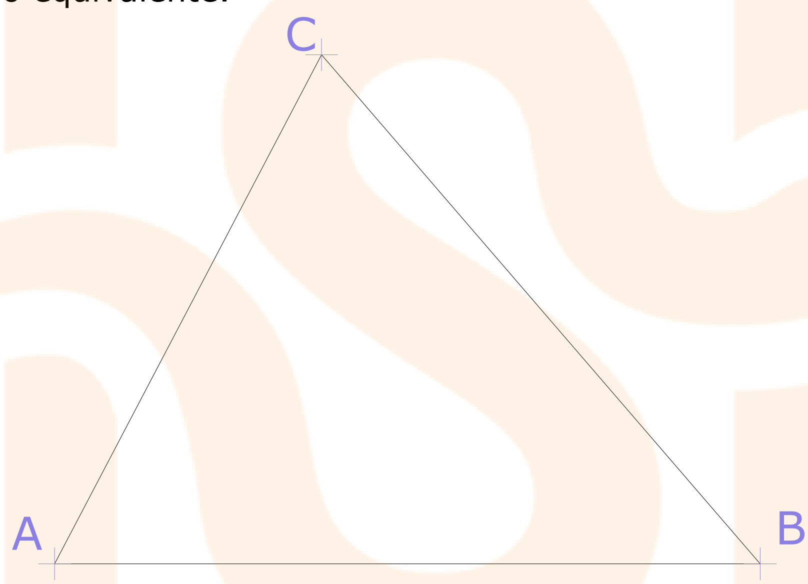
- **1** Por los vértices ***A*** y **B** se trazan sendas perpendiculares al lado ***AB.***
- **2** La mediatriz de la altura ***C****D* se corta con las perpendiculares anteriores en los puntos **E y F**



DADO UN TRIÁNGULO, DIBUJAR UN CUADRADO EQUIVALENTE.

Sea el triángulo **ABC** :

- **1** Se dibuja un rectángulo equivalente al triángulo dado: a) por ***A* y B** se trazan perpendiculares al lado **AB** y b) se traza la mediatriz a la altura **CD**
- **2** Con centro en **B** y radio ***BE*** se traza un arco hasta cortar a prolongación del lado **AB** en el punto **G**
- **3** Se dibuja la semicircunferencia de diámetro ***GA**,* q se corta con la prolongación del lado ***BE*** en el punto **J**. El segmento ***BJ*** es el lado del cuadrado equivalente.

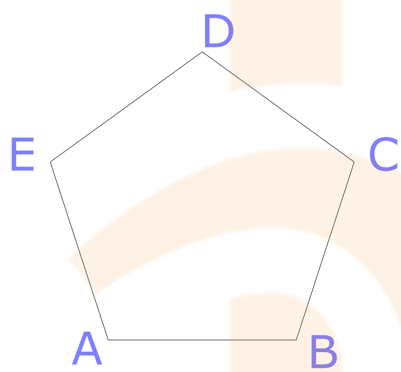


DADO UN PENTÁGONO REGULAR, DIBUJAR EL CUADRADO EQUIVALENTE

Sea el pentágono ***ABCDE***

- **1** Por el vértice **C** se traza la paralela a la diagonal ***SO*** hasta cortar en el punto **G** a la prolongación del lado ***AB.***
- **2** Por el punto **G** se traza la perpendicular al lado ***AB*** y por el vértice ***D*** la paralela al mismo, obteniéndose así el rectángulo ***FGHD,*** equivalente al pentágono dado.
- **3** Se dibuja el cuadrado equivalente al rectángulo:

a) con centro en **F** y radio ***FG*** se traza un arco hasta cortar a la prolongación de ***FD*** en el punto ***J,*** y **b**) se, dibuja la semicircunferencia de diámetro ***DJ,*** que se corta con el lado ***AB*** el punto ***L.*** El segmento **FL** es el lado del cuadrado equivalente.
Obsérvese que el triángulo rectángulo ***FGD*** es equivalente al polígono ***FBCD*** (medio pentágono), por tanto el rectángulo ***FGHD*** es equivalente al pentágono.

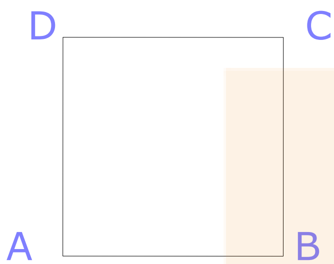


DIBUJAR EL CUADRADO QUE TENGA POR ÁREA EL DOBLE QUE OTRO DADO

Sea el cuadrado ***ABCD***:

- **1** Se traza la diagonal ***BD*** *y a* continuación la perpendicular por el extremo **B**.
- **2** Sobre la perpendicular anterior se traslada el

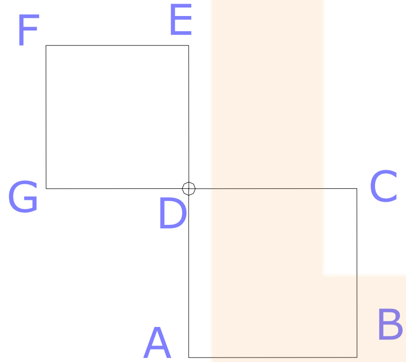
segmento ***BE = BD.***
Si se trazan las diagonales ***DE*** y ***BF*** del cuadrado solución se observa fácilmente que se forman cuatro triángulos rectángulos iguales a los dos que se formaban al trazar la diagonal del cuadrado dado.



DIBUJAR EL CUADRADO QUE TENGA POR ÁREA LA SUMA DE OTROS DOS

Sean los cuadrados ***ABC****D* y ***GDEF*** :

- **1** El cuadrado que se busca tiene por lado la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos son los lados de los cuadrados dados. Por tanto, se traza la perpendicular a la hipotenusa por el punto **C** y sobre ella se traslada la longitud ***CH = CE****.*
- **2** El punto ***J*** se obtiene trazando por ***H*** la paralela a ***CE*** y por ***E*** la perpendicular a ***CH****.* Esta construcción está basada en el teorema de Pitágoras, como fácilmente puede observarse.



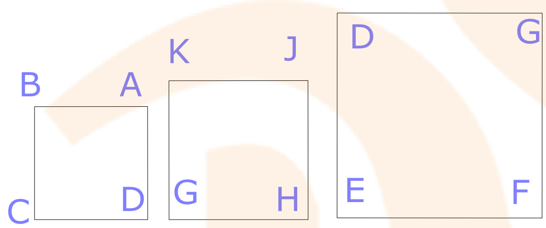
DIBUJAR EL CUADRADO QUE TENGA POR ÁREA LA SUMA DE OTROS TRES

Sean los cuadrados ***ABCO, OEFG* y *GHJK*** (fig. 13):

- **1** Se dibuja el triángulo rectángulo cuyos catetos son los lados de dos de los cuadrados dados y a continuación se traza la perpendicular a la hipotenusa por el punto **G**.

- **2** Se dibuja otro triángulo rectángulo cuyos catetos son ahora la hipotenusa anterior y el lado del tercer cuadrado. La hipotenusa de este segundo triángulo rectángulo es el lado del cuadrado suma de los tres.

Esta construcción se basa igualmente en el teorema de Pitágoras aplicado dos veces.



DADO UN CÍRCULO, DIBUJAR EL CUADRADO EQUIVALENTE .

Los distintos métodos para construir un cuadrado que tenga la misma superficie que un círculo dado son métodos aproximados, sin solución exacta.

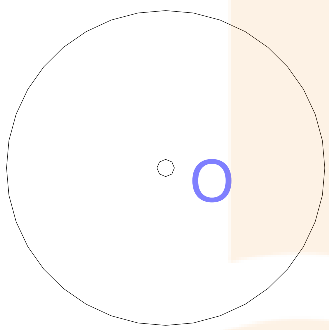
Sea la circunferencia de **centro O:**

- **1** Se traza un diámetro **AB** cualquiera y se divide en **siete** partes iguales.
- **2** Por el extremo **B** del diámetro se traza la recta ***r*** tangente a la circunferencia y con centro en ***A***

y *radio 3 de las siete partes* del diámetro, se traza un arco que corta a la prolongación del diámetro en el punto

- **3** Con centro en el punto **4** del diámetro y radio **4C** se dibuja un arco que corta a la recta ***r*** en el punto **D.** EL segmento ***BD*** es el lado del cuadrado cuya superficie es aproximadamente igual a la del círculo dado.

Este caso de equivalencia se conoce también como la cuadratura del círculo.



TEMA 3: POLÍGONOS

DEFINICIÓN, PROPIEDADES Y CLASIFICACIÓN D TRIÁNGULOS.

Definición

Triángulo es una superficie plana limitada por tres
rectas que se cortan dos a dos. Los puntos de intersección de las rectas se llaman *vértices,* y los segmentos comprendidos entre los vértices se denominan *lados* del triángulo.
Los vértices se designan con letras mayúsculas latinas en sentido contrario a las agujas del reloj, y los lados se designan con letras minúsculas también latinas, utilizando para ello la misma letra del vértice opuesto; el lado *a* será el lado opuesto al vértice *A.*

Propiedades

a) La suma de los tres ángulos interiores de un triángulo vale 180°.
b) Cada lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos, pero mayor que su diferencia.
c) En un triángulo rectángulo la hipotenusa es mayor que cada uno de sus catetos.

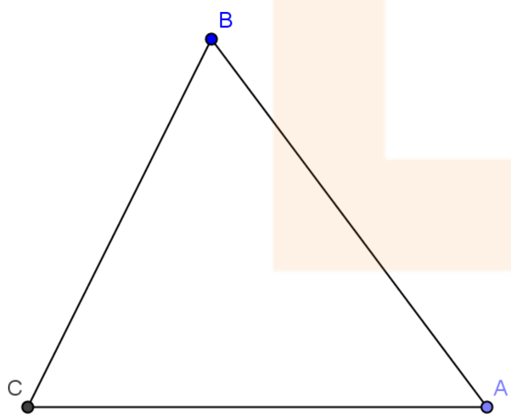
Clasificación

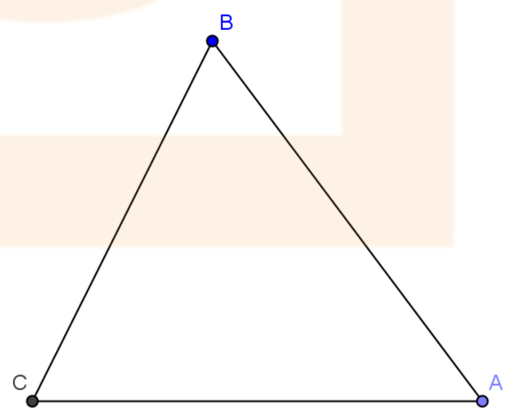
a) Según sus lados :

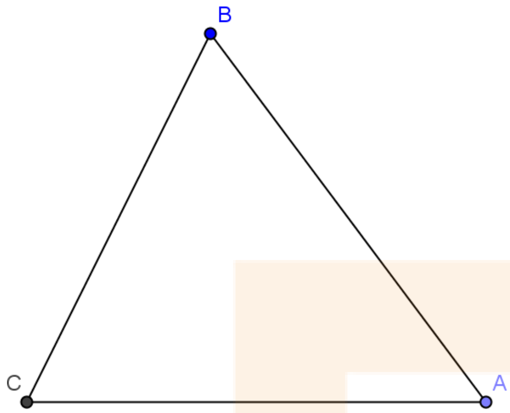
- **Equilátero** *(a):* los tres lados son iguales. Isósceles *(b):* dos lados son iguales y el tercero distinto.
- **Escaleno** *(e):* los tres lados son desiguales.

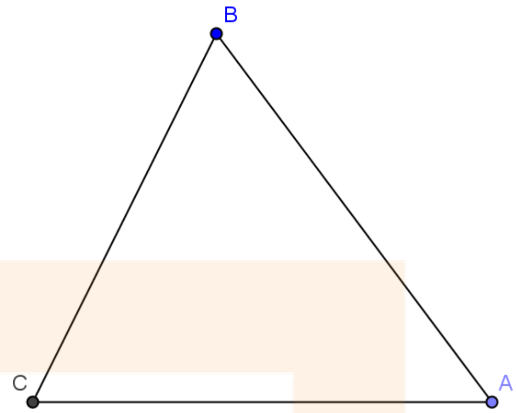
b) Según sus ángulos :

- **Rectángulo** *(a):* un ángulo es recto (= 90°).
- **Acutángulo** *(b):* los tres ángulos son agudos « 90°).
- **Obtusángulo** *(e):* un ángulo es obtuso (> 90°)
-
-
- REPRESENTA AQUÍ LOS PUNTOS Y RECTAS NOTABLES DE LOS TRIÁNGULOS

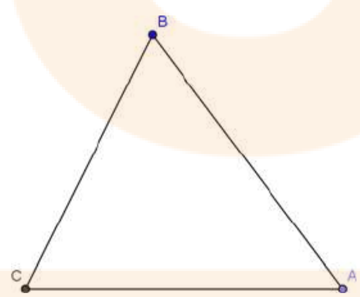




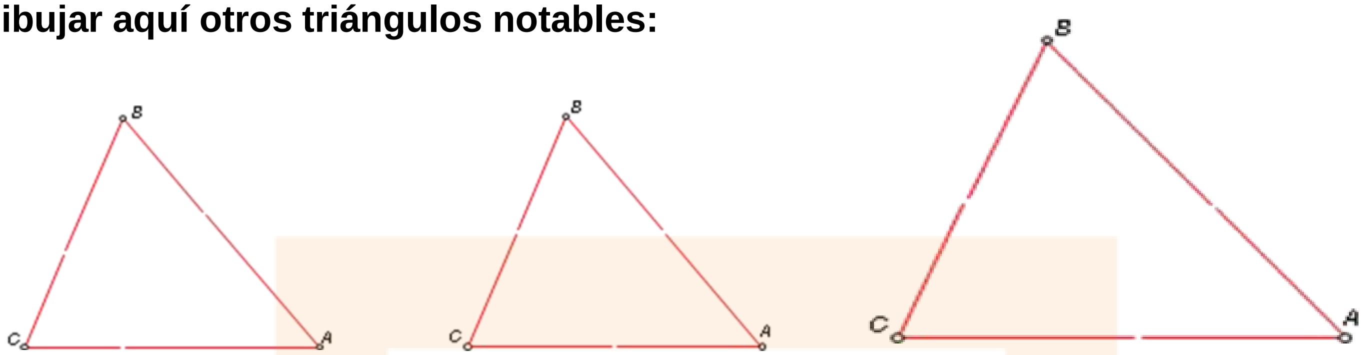




Dibuja aquí las bisectrices exteriores del triángulo



Dibujar aquí otros triángulos notables:



Construcciones imprescindibles:

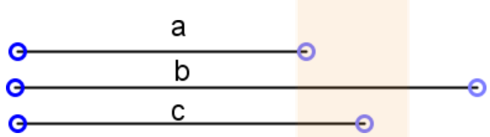
CONSTRUIR UN TRIÁNGULO CONOCIENDO SUS TRES LADOS

Sean los segmentos ***a, b*** y **c:**

1 Sobre una recta (cualquiera se toma un segmento
AB igual a uno de los lados.

2 Con centro en un extremo *A* y radio igual al segundo
de los lados *AC,* se describe un arco de circunferencia.

3 Con centro en el otro extremo B y radio igual al tercero de los lados conocidos *BC,* se describe otro arco que se corta con el anterior en el punto C, tercer vértice del triángulo.



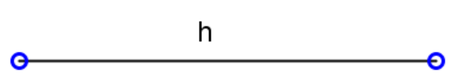
CONSTRUIR UN TRIÁNGULO EQUILÁTERO CONOCIENDO LA ALTURA

Sea ***h*** la altura del triángulo:

1 Sobre una recta (cualquiera se toma un punto *A* arbitrario.

2 Por el punto *A* se traza la perpendicular a la recta r. Sobre la perpendicular anterior, ya partir del punto *A,* se lleva una longitud *AB* igual a la altura dada.

artes iguales, nombrando al punto C primero a partir



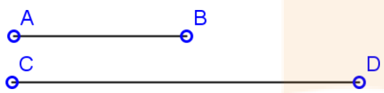
5 Con centro en el punto C y radio *CB,* dos tercios de la altura, se describe una circunferencia que cortará a la recta (inicial en dos puntos D y *E,* que junto con el vértice B forman el triángulo solicitado.

CONSTRUIR UN TRIÁNGULO ISÓSCELES CONOCIENDO LA BASE Y LA ALTURA

Sea *AB* la base y CD la altura:
1 Sobre una recta (cualquiera se toma un segmento *AB* igual a la base.

2 Se traza la mediatriz del segmento *AB.*

3 Sobre la mediatriz, ya partir del punto medio C, se transporta la altura *CD,* quedando determinado el tercer vértice O.



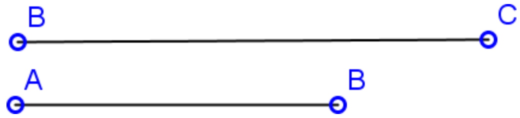
CONSTRUIR UN TRIÁNGULO ISÓSCELES CONOCIENDO LOS LADOS IGUALES Y LA ALTURA

Sea BC el lado y *AB* la altura :
1 Sobre una recta (se toma un punto *A* arbitrario.

2 Por el punto *A* se traza la perpendicular a la recta r.

3 Sobre la perpendicular anterior, ya partir del punto *A,* se transporta la altura dada *AB.*

4 Con centro en el punto B y radio igual aliado se describe un arco que corta a la recta (en dos puntos C y *D* que, junto con el punto B, son los vértices del triángulo.



CONSTRUIR UN TRIÁNGULO ISÓSCELES CONOCIENDO LA BASE Y EL ÁNGULO OPUESTO A LA MISMA

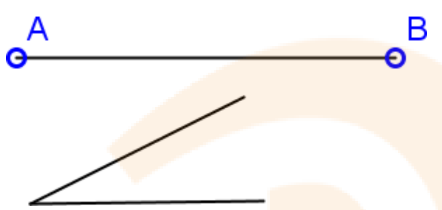
Sea *AB* la base y η el ángulo:

1 Sobre una recta *r* cualquiera se toma un segmento *AB* igual a la base.

2 Se traza la mediatriz del segmento *AB.*

3 Por un punto C cualquiera de la mediatriz se traza un ángulo igual al dado, de tal forma que la mediatriz sea la bisectriz del ángulo.

4 Por los extremos del segmento *AB* se trazan sendas paralelas a los lados del ángulo anterior. Dichas paralelas se cortan en el punto *D,* tercer vértice del triángulo que se pide.

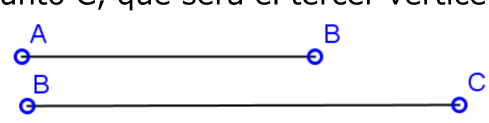


CONSTRUIR UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO CONOCIENDO LA HIPOTENUSA y UN CATETO

Sea *AB* el cateto y BC la hipotenusa:
1 Sobre una recta *r* cualquiera se toma un segmento *AB* igual al cateto conocido.

2 Por un extremo *A* se traza la perpendicular a la recta *r.*

3 Con centro en el otro extremo B y radio igual a la hipotenusa, se traza un arco de circunferencia que corta a la perpendicular en el punto C, que será el tercer vértice.



CONSTRUIR UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO CONOCIENDO UN CATETO Y EL ÁNGULO OPUESTO

Sea *AB* el cateto y ꝗ el ángulo :

1 Sobre una recta *r* cualquiera se toma un segmento *AB* igual al cateto conocido.

2 Por un extremo *A* se traza la perpendicular a la recta *r.* 3 Por un punto C cualquiera de la perpendicular se traza una recta que forme un ángulo igual al dado.

4 Por el otro extremo B del cateto se traza la paralela al lado del ángulo construido anteriormente.

Esta paralela corta a la perpendicular trazada por el extremo *A* en el punto *D,* que será el tercer vértice.

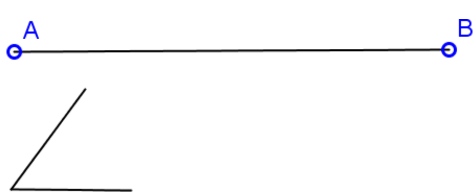
CONSTRUIR UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO CONOCIENDO UN CATETO Y EL ÁNGULO ADYACENTE NO RECTO

Sea *AB(b)* el cateto y ꝗ el ángulo :

1 Sobre una recta *r* cualquiera se toma un segmento *AB* igual al cateto conocido.

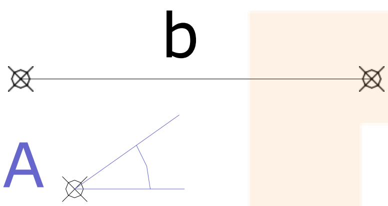
2 Por un extremo *A* se traza la perpendicular a *r.*

3 Por el otro extremo B se construye un ángulo igual al dado.
4 Donde el lado del ángulo anterior se corta con la perpendicular trazada por *A* se obtiene el vértice C.



CONSTRUIR UN TRIÁNGULO ISÓSCELES CONOCIENDO LOS LADOS IGUALES Y EL ÁNGULO COMPRENDIDO ENTRE LOS MISMOS.

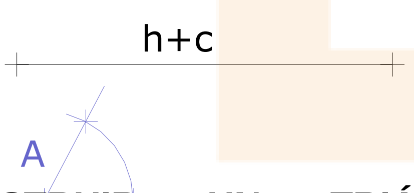
Con centro en el vértice **A** del ángulo, describir un arco de radio igual a los lados conocidos, el cual *corta* a los lados del ángulo en **B** y **C,** vértices del triángulo.



CONSTRUIR UN TRIÁNGULO ISÓSCELES DADA LA SUMA DE LA ALTURA Y UNO DE LOS LADOS IGUALES, ASÍ COMO EL ÁNGULO OPUESTO A LA BASE.

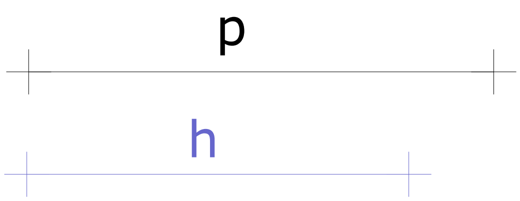
1. Se levanta sobre una recta base indefinida una perpendicular de longitud igual a la suma conocida.
2. Por el extremo **E** se construye un ángulo igual a la cuarta parte del dado, obteniendo con ello sobre la recta base el vértice **B**.

El **A** se determina trazando la mediatriz al segmento **E B,** Y el e por simetría del **B** respecto a **D**, o mediante un arco de centro en **A** y radio **A B**.



CONSTRUIR UN TRIÁNGULO ISÓSCELES CONOCIDO EL SEMIPERÍMETRO Y LA ALTURA.

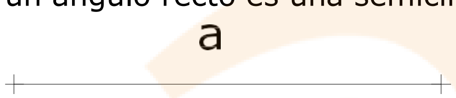
Trácense la altura **A M (h)** Y el semiperímetro **M N (p)**..formando ángulo recto. La mediatriz del segmento **A N** determina sobre **M N** el vértice **C** obteniéndose el **B** por simetría de **C** respecto a **M**



CONSTRUIR UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO ISÓSCELES, DADA LA HIPOTENUSA.

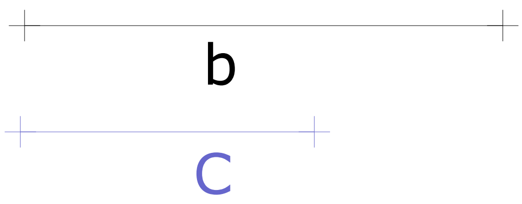
1. Con diámetro igual a la hipotenusa, dada, trazar una semicircunferencia. La mediatriz al diámetro determina sobre la semicircunferencia el vértice del ángulo recto.

2. Todo **ángulo inscrito** en media circunferencia tiene por valor **90°,** puesto que el ángulo inscrito vale la mitad del central correspondiente. De aquí que el arco capaz de un ángulo recto es una semicircunferencia,



Construir un triángulo rectángulo conociendo sus dos catetos.

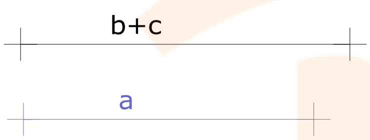
Trazar por el extremo de uno de ellos una perpendicular de longitud igual al otro cateto. Unidos entre sí los dos extremos libres, queda definida la hipotenusa de dicho triángulo.



Construir un triángulo rectángulo dada la hipotenusa y la suma de los catetos.

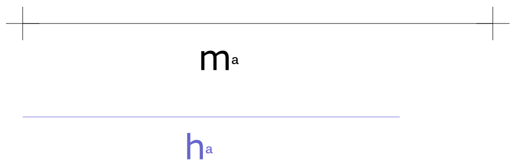
Se toma un segmento **DC** igual a la suma ***b* + c** de los dos catetos, construyendo en uno de sus extremos **D**, un ángulo de **45°,** y con centro en el otro extremo **C** se describe un **arco de radio** igual a la hipotenusa dada. Este arco corta al lado oblicuo del ángulo en el vértice B. El vértice A se obtiene trazando una perpendicular a **D C** desde **B**. El punto **B'** donde el arco también corta a **D B**, nos proporciona otra solución, que es simétrica a la obtenida.
De resultar **tangente** al arco el lado oblicuo de ángulo de **45°,** existe una sola solución, no produciendo ninguna si es exterior.

Al ser el ángulo A O B de 45° y B A perpendicular a O A, el triángulo O A B es rectángulo e isósceles, por lo que O A = B A, lo que confirma la construcción.



Construir un triángulo rectángulo dadas la mediana m_a y la altura h_a correspondientes a la hipotenusa.

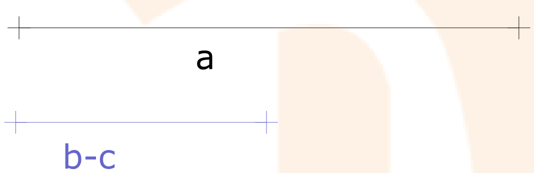
Dado que la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide dos veces su mediana correspondiente, el problema se reduce a la construcción de un triángulo rectángulo conocida la hipotenusa y la altura relativa a dicha hipotenusa. ._,.
Para ello, tómese por hipotenusa un segmento **BC** igual a dos veces **m_a** describiendo con centro en su punto medio **M_a** una semicircunferencia. Trazando una paralela a **BC** a una distancia igual a **h_a** queda determinado, en su intersección con la semicircunferencia, el vértice **A**. La intersección **A'** produce otra solución simétrica. .



Construir un triángulo rectángulo dada la hipotenusa y la diferencia de los cateto

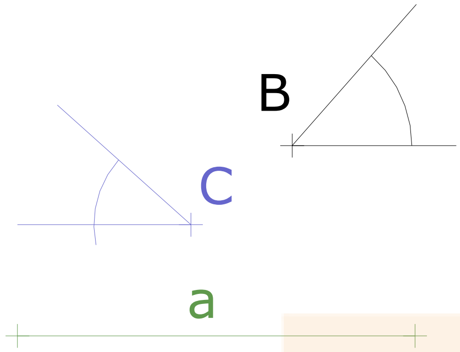
A un segmento **DC**,igual a la diferencia de catetos conocida, construir en uno de sus extremos y sobre su prolongación un ángulo de **45°**, trazando con centro en el otro extremo, y radio igual a la longitud dada para la hipotenusa, un arco, que cortará al lado libre del ángulo en el vértice B. La perpendicular trazada por_B a la prolongación de O C nos determina el vértice A.

Siendo el triángulo B A D rectángulo e isósceles por construcción, B A = A D, con lo que el segmento D e resulta igual a la diferencia de los catetos.



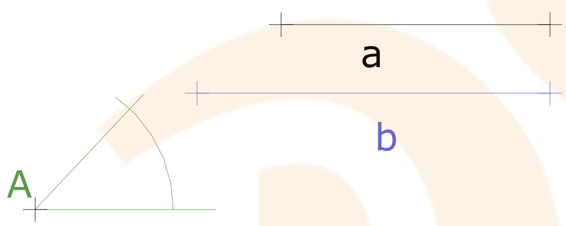
Construir un triángulo conociendo un lado y los ángulos adyacentes al mismo.

Situar el lado dado como base del triángulo, construyendo en sus extremos ángulos respectivamente iguales a los dados.



Construir un triángulo conocidos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

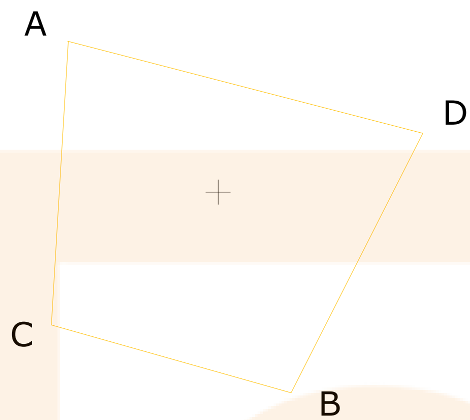
Construir un ángulo igual al dado, transportando sobre uno de sus lados la magnitud de uno dlos lados conocidos, obteniendo el punto **C.** Con centro en dicho punto y radio igual al otro lado, describir un arco que determinará el tercer vértice del triángulo al cortar al lado tomado como base del triángulo. Este problema puede tener dos, una o ninguna solución, dependiendo ello de que el lado a sea mayor, igualo menor respectivamente que la distancia del vértice **C** a la base.



CUADRILÁTERO INSCRIBIBLE

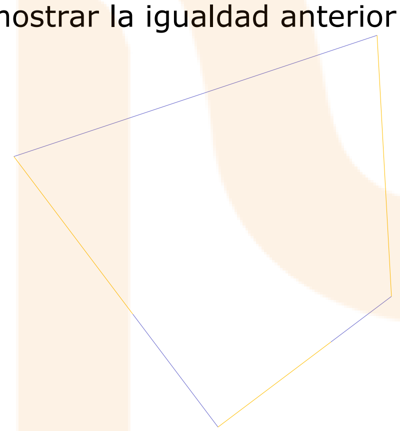
Se llama así al cuadrilátero que se puede inscribir en una circunferencia .
En un cuadrilátero inscribible sus **ángulos opuestos** son suplementarios, es decir, **suman 180°.**
Recíprocamente, un cuadrilátero que tenga sus ángulos opuestos suplementarios es inscribible.
A + B = C + D = 180°
Teniendo en cuenta que el valor de un ángulo inscrito es la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco:

$A + B = \Omega/2+\beta/2 = 360º/2=180º$



CUADRILÁTERO CIRCUNSCRIBIBLE:

Se denomina así al cuadrilátero en el que se puede inscribir una circunferencia.
En un cuadrilátero circunscribible la suma de los **<u>lados</u>** opuestos vale lo mismo.
Recíprocamente, un cuadrilátero cuya suma de lados opuestos valga lo mismo es circunscribible.
$A+C=B+D$
Teniendo en cuenta que si trazamos desde un punto exterior las tangentes a una circunferencia, las distancias desde el punto exterior a los puntos de tangencia valen lo mismo, es fácil demostrar la igualdad anterior.



DEFINICIÓN, PROPIEDAD Y CLASIFICACiÓN CUADRILÁTERO.

Definición

Cuadrilátero es la superficie plana limitada por cuatro rectas que se cortan dos a dos; los puntos de intersección se llaman *vértices* y los segmentos entre los vértices reciben el nombre de *lados.* Puede definirse también como un polígono de cuatro lados.
Al igual que en los triángulos, sus vértices se designan con letras mayúsculas y sus lados con minúsculas.

Propiedad

La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero vale 360º.

Clasificación

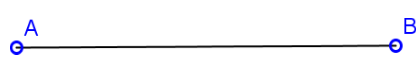
1) **Paralelogramos** : tienen sus lados paralelos dos a dos. A su vez se clasifican en:
- **Cuadrado** *(a):* los cuatro lados son iguales y los cuatro ángulos miden 900. Las diagonales son iguales y perpendiculares entre sí; se *cortan en su punto medio.*
- **Rectángulo** *(b):* los lados opuestos son iguales entre sí y los cuatro ángulos miden 900. Las diagonales son oblicuas y de igual tamaño; se *cortan en su punto medio.*
- **Rombo** (e): los cuatro lados son iguales y los ángulos opuestos miden lo mismo. Las diagonales son perpendiculares pero de distinto tamaño; se *cortan en su punto medio.*
- **Romboide** *(d):* los lados y ángulos opuestos son iguales entre sí. Las diagonales son desiguales y oblicuas; se *cortan en su punto medio.*

2) **Trapecios** : tienen solo dos lados paralelos, que reciben el nombre de bases. Pueden ser:
- *Isósceles (a):* Los lados que no son las bases son iguales; también tiene los ángulos iguales dos a dos. Tiene un eje de simetría.
- **Rectángulo** *(b):* tiene un ángulo recto, coincidiendo la altura con uno de sus lados.
- **Escaleno** (e): no tiene ninguna característica de los dos anteriores.

3) **Trapezoides** : cuadriláteros que tienen todos sus lados y ángulos distintos.

CONSTRUIR UN CUADRADO CONOCIDO EL LADO

Sea *AB* el lado :
1 Sobre un segmento *AB* igual aliado se traza la perpendicular por uno de sus extremos *A.*
2 Sobre la perpendicular trazada, con radio igual aliado *AB* y centro en *A,* se transporta la magnitud *AD* del lado.
3 Con centro en B y D, Y radio *AB,* se describen sendos arcos que se cortan en el cuarto vértice e.

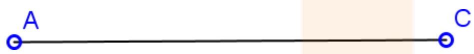


CONSTRUIR UN CUADRADO CONOCIDA SU DIAGONAL

Sea *AC* la diagonal

1 Con la diagonal *AC* como diámetro, se dibuja la circunferencia de centro O.

2 Se traza la mediatriz del segmento *AC,* que corta a la circunferencia en los puntos B y D.

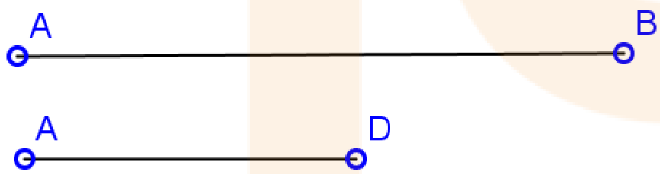


CONSTRUIR UN RECTÁNGULO CONOCIENDO SUS LADOS

Sean *AB* y *AD* los lados :
1 Por el extremo de un lado *AB* se traza la perpendicular al mismo, y sobre esta se traslada la magnitud del otro lado *AD.*

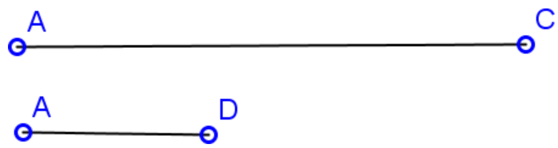
2 Con centro en el vértice B y radio igual aliado *AD* se traza un arco.

3 Con centro en el vértice D y radio igual al lado *AB* se traza otro arco que se corta con el anterior en el punto e, cuarto vértice del rectángulo.



CONSTRUIR UN RECTÁNGULO CONOCIENDO UN LADO Y LA DIAGONAL

Sean *AD* el lado y *AC* la diagonal :
1 Con la diagonal *AC* como diámetro se dibuja la circunferencia de centro O.
2 Haciendo centro en los puntos *A* y C y con radio igual aliado conocido se trazan dos arcos de circunferencia en sentido contrario hasta cortar a la circunferencia en los puntos B y D.



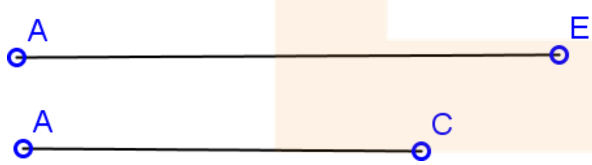
CONSTRUIR UN RECTÁNGULO CONOCIENDO LA SUMA DE LOS LADOS Y LA DIAGONAL

Sea *AE* un segmento igual a la suma de los lados y *AC* la diagonal:
1 Por el punto *E,* uno de los extremos del segmento *AE,* se traza la recta que forma 45° con dicho segmento.

2 Con centro en el otro extremo *A* y radio igual a la diagonal dada se traza un arco que corta a la recta anterior en el punto C.

3 Por el punto C se traza la perpendicular al segmento *AE,* que lo corta en el punto *B.*

4 Con centros en *A* y C y radios igual a *CB* y *AB,* respectivamente, se trazan dos arcos que se cortan en el punto *D.* Los puntos *A, B,* C y *D* son los vértices del rectángulo.

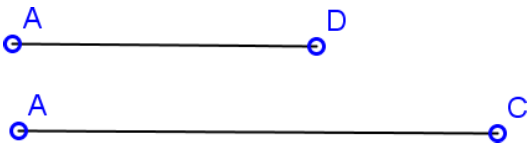


CONSTRUIR UN ROMBO CONOCIENDO EL LADO Y UNA DIAGONAL

Sea *AD* el lado y *AC* la diagonal :

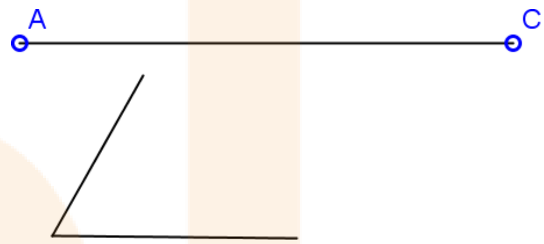
1 Con centros en los extremos *A* y C de la diagonal y radio igual aliado se describen cuatro arcos, que se cortan en los puntos *B y* D.

2 Los puntos *A, B,* C y *O* son los vértices del rombo.



CONSTRUIR UN ROMBO CONOCIENDO UN ÁNGULO Y SU DIAGONAL

Sean *AC* la diagonal y **ף** el ángulo:



1 Se dibuja el ángulo **ף** conocido, de vértice *A,* trazando la bisectriz del mismo.

2 A partir del punto *A* y sobre la bisectriz se lleva la magnitud *AC* de la diagonal conocida.

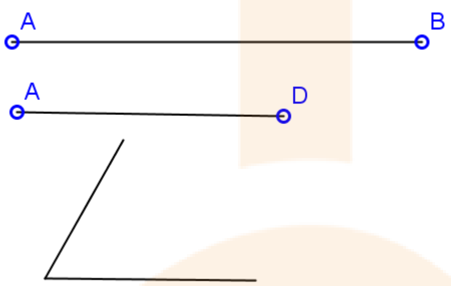
3 Por el punto C se trazan las paralelas a los lados del ángulo que se cortarán con estos en los puntos *B y D,* determinando los otros dos vértices del rombo.

CONSTRUIR UN ROMBOIDE CONOCIENDO SUS LADOS Y UN ÁNGULO

Sean *AD* y *AB* los lados y ໆ el ángulo:

1 Se dibuja el ángulo ໆ conocido, de vértice *A,* transportando sobre cada lado las longitudes *AB* y *AD* iguales a los lados del romboide conocidos.

2 Desde el punto *B* y con radio *AD* se traza un arco; y desde el punto *O* y radio *AB* se traza otro arco que se corta con el anterior en el punto C.



CONSTRUIR UN ROMBOIDE CONOCIENDO SUS LADOS Y LA ALTURA

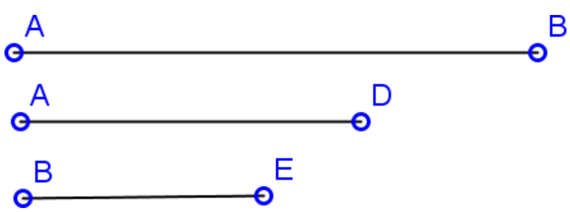
Sean *AD* y *AB* los lados y *BE* la altura:

1 Se dibuja un segmento *AB* igual a uno de los lados conocidos.

2 Por el punto B se traza la perpendicular al mismo, transportando a partir de B la distancia *BE* igual a la altura.

3 Por el punto *E* se traza la recta paralela al segmento *AB.*

4 Con centro en los puntos *A* y B Y radio igual al otro lado conocido se trazan sendos arcos que cortan a la paralela trazada por *E* en los puntos C y *D.*



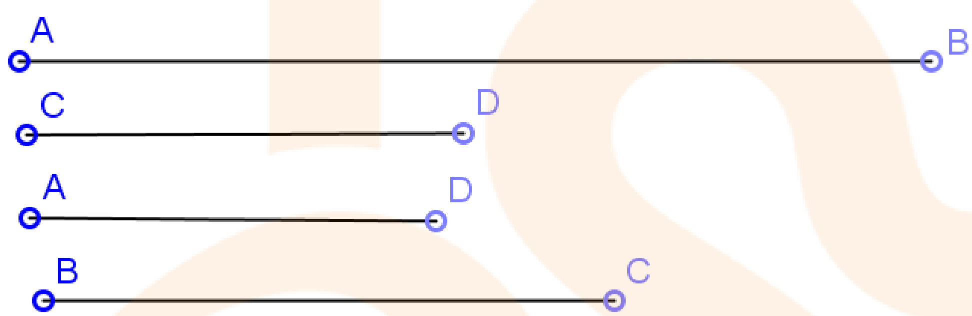
CONSTRUIR UN TRAPECIO ESCALENO CONOCIENDO LOS CUATRO LADOS

Sean *DC, AD,* BC y *AB* los cuatro lados donde *AB* y *CD* son las bases:

1 Se dibuja un segmento *AB* igual a uno de los lados conocidos.
2 A partir del punto *A* y sobre dicho segmento se traslada el segmento *AE* = *CD.*

3 Con centro en *E* y radio igual a uno de los lados laterales se describe un arco; con centro en el punto B y radio igual al otro lado lateral se traza otro arco que se corta con el anterior en el punto C.

4 Con centro en *A* y radio *EC* y con centro en C y radio *AE* se describen dos arcos que se cortan en el cuarto vértice *D.*



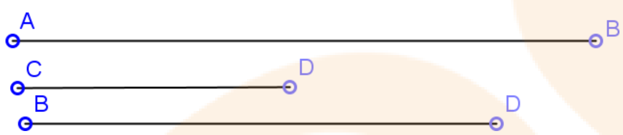
CONSTRUIR UN TRAPECIO ESCALENO CONOCIENDO SUS BASES Y SUS DIAGONALES

Sean *AB* y *CD* las bases y *AC* y *BD* las diagonales :

1 Sobre una recta *r* cualquiera ya partir de un punto *A* se lleva el segmento *AB* igual a una de las bases.
A partir del punto B se suma el segmento *BE* igual a la otra base.

2 Con centro en *A* y radio igual a una de las diagonales se traza un arco, y con centro en *E* y radio igual a la otra diagonal se traza otro arco que se corta con el anterior en el punto C.

3 La intersección de la recta paralela a *AE* trazada por el punto C con el arco de centro B y radio *EC* es el vértice *D.*



DEFINICIÓN, PROPIEDADES Y CLASIFICACiÓN

Polígono es el espacio limitado por una línea quebrada, cerrada y plana. Cada segmento de la línea quebrada se denomina *lado,* y los puntos de intersección de los lados se llaman *vértices.*
Si todos los lados son iguales, el polígono se llama *equilátero;* si los ángulos son iguales, se llama *equiángulo;* si los lados y ángulos son iguales, el polígono se llama *regular;* en caso contrario se denominan polígonos *irregulares.* En el presente tema nos referiremos siempre a los polígonos regulares. Un polígono es *cóncavo* si al trazar cualquier recta solo lo corta en dos puntos. El polígono es *convexo* si existe alguna recta que lo corte en mas de dos puntos.
Se dice que un polígono está *inscrito* en una circunferencia si todos sus vértices están en ella. El polígono está *circunscrito* si todos sus lados son tangentes a la circunferencia.

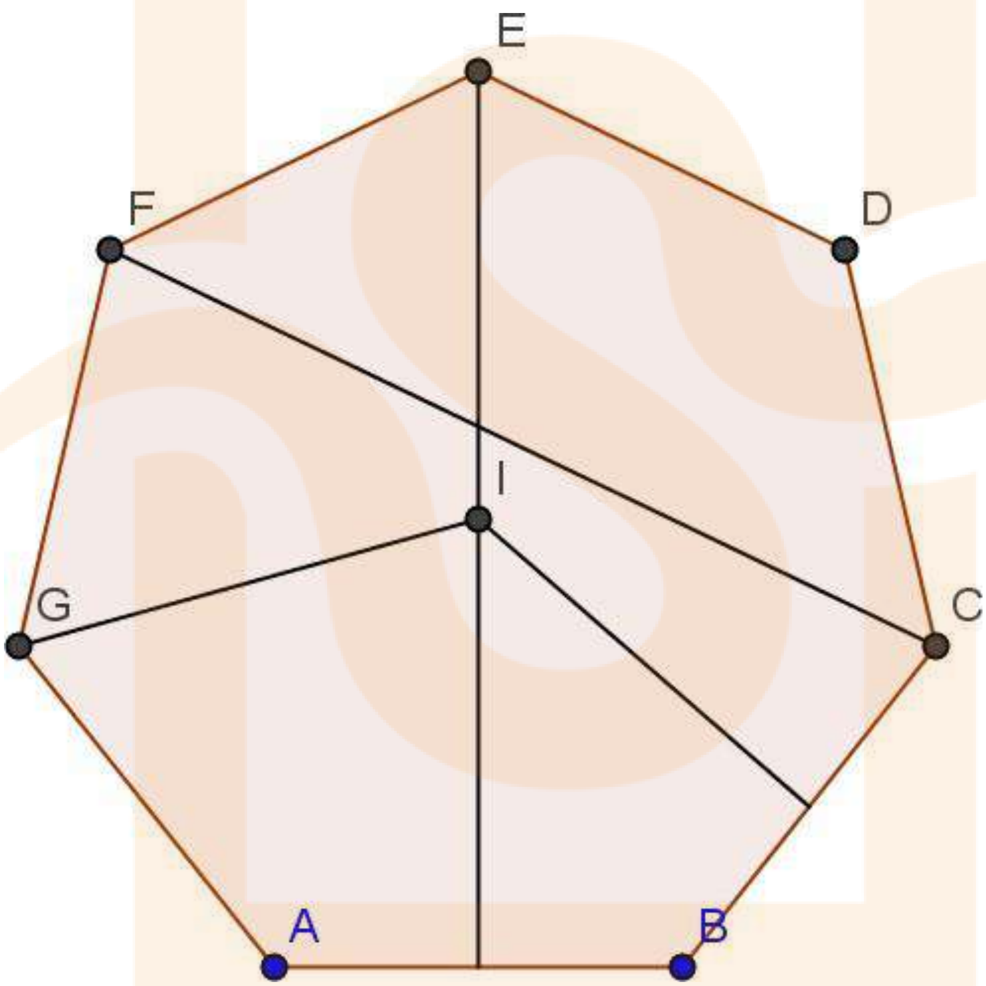
Propiedades

a) La suma de los ángulos internos de un polígono
de *n* lados es igual a 180° por el número de lados menos dos: ƞ = 180(n-2).
b) La suma de los ángulos externos de un polígono es igual a 360°.
c) El número de diagonales de un polígono de *n* lados es: nº = n(n-3)/2.

Clasificación

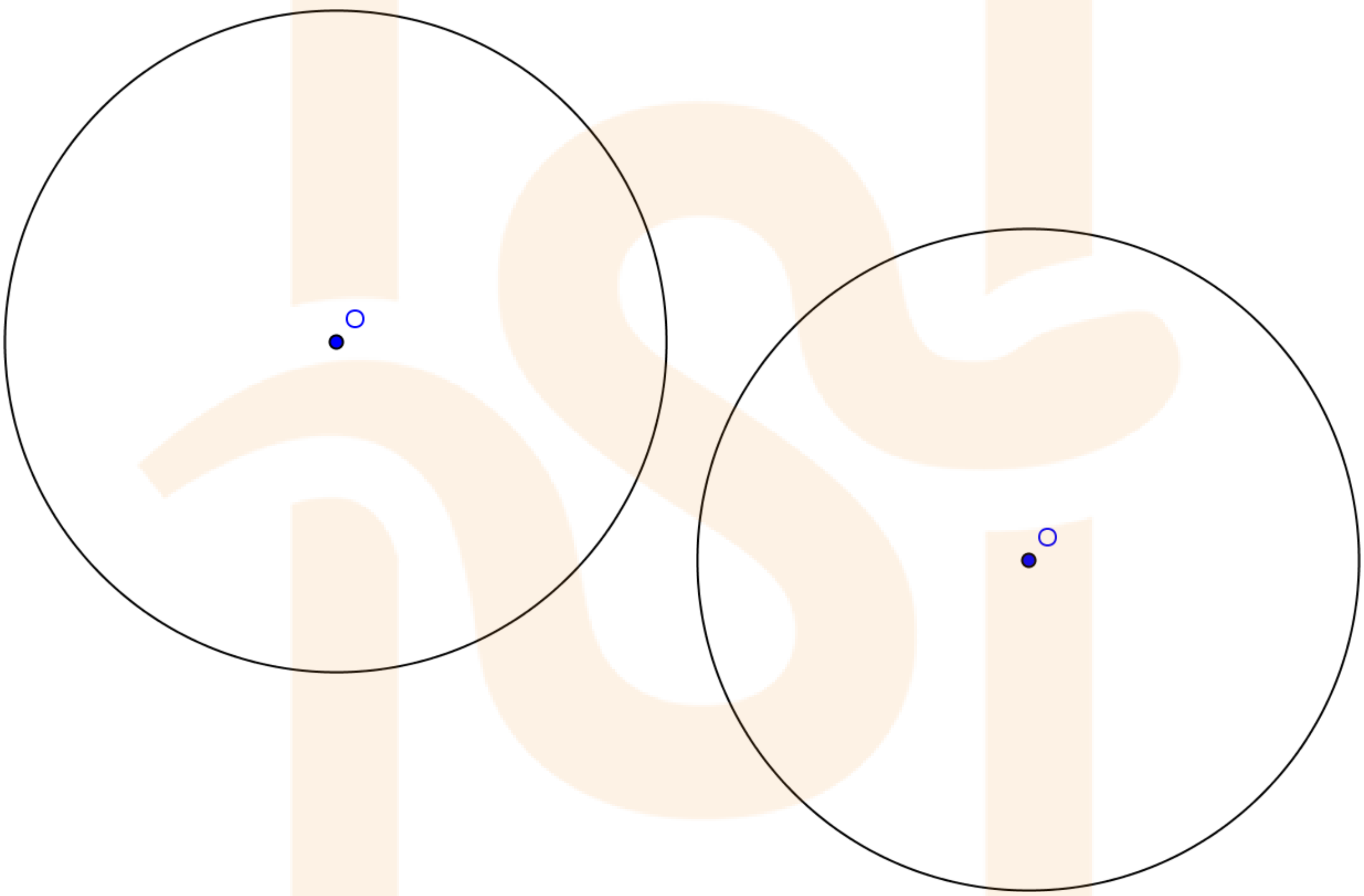
Según el número de lados:

. Triángulo:	polígono de	3	LADOS
. Cuadrilátero:	‟	4	‟
. Pentágono:	‟	5	‟
. Hexágono:	‟	6	‟
. Heptágono:	‟	7	‟
. Octógono:	‟	8	‟
. Eneágono:	‟	9	‟
. Decágono:	‟	10	‟
. Undecágono:	‟	11	‟
. Dodecágono:	‟	12	‟
. Pentadecágono:	‟	15	



DIVISIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA EN 3, 6, 12, ... PARTES IGUALES

Sea la circunferencia de centro **O:**
1 Se traza un diámetro ***AG*** cualquiera.
2 **Hexágono**. Con radio igual al radio de la circunferencia dada y con centros en ***A*** y **G** se trazan dos arcos hasta cortar a la circunferencia en los puntos ***K*** *y* **C**e **I** y **C**, vértices del hexágono
3 **Triángul**o. El triángulo equilátero se hallará uniendo
los vértices del hexágono de dos en dos.
4 **Dodecágono**. Trazando desde el centro **d_** la circunferencia las perpendiculares a los lados del hexágono, estas cortarán a la circunferencia en seis puntos que junto con los vértices del hexágono formarán el polígono de doce lados.



DIVISIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA EN 4, 8, 16, ... PARTES IGUALES

Sea la circunferencia de centro **O**:
1 **Cuadrado**. Se trazan dos diámetros ***AE*** *y* **CG** perpendiculares entre sí, que dividen a la circunferencia en cuatro partes iguales.
2 **Octágono**. Trazando desde el centro de la circunferencia las perpendiculares a los lados del cuadrado, estas cortarán a la circunferencia en cuatro puntos que junto con los vértices del cuadrado formarán el polígono de ocho lados.
3 **Polígono de 16 lados**. Al trazar nuevas perpendiculares a los lados del octágono se obtiene la división de la circunferencia en dieciséis partes iguales.

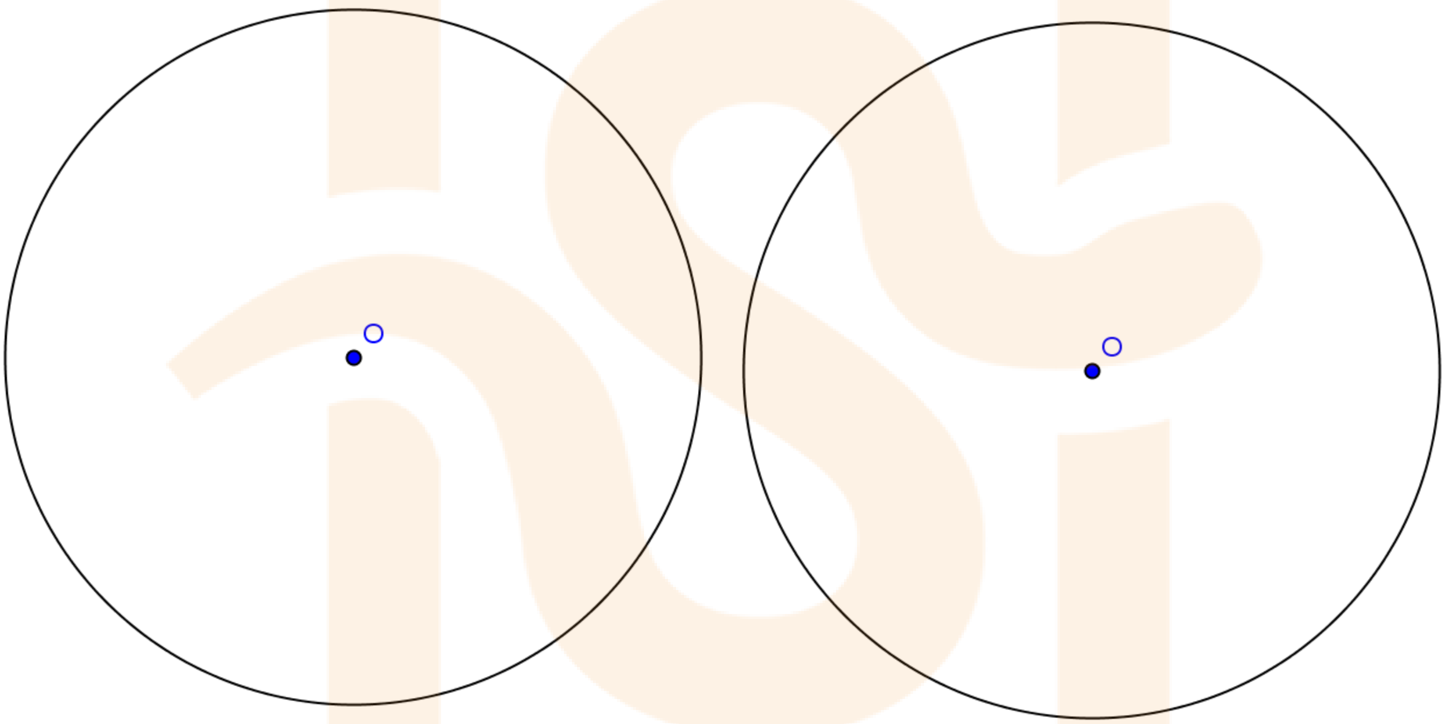
DIVISIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA EN 5, 10, ... PARTES IGUALES

Sea la circunferencia de centro **O**:
1 Se dibujan dos diámetros ***KL*** y ***AF**,* perpendiculares entre sí.

2 Se divide el radio ***OL*** en dos partes iguales mediante el trazado de la mediatriz, hallando así el puntd'**M**.

3 Con centro en ***M*** se describe un arco de radio ***MA*** hasta cortar al diámetro ***KL*** en el punto ***N.***
4 **Pentágon**o. El segmento ***AN*** es el lado *15* del pentágono inscrito.

5 **Decágono**. El segmento ***DE*** es el lado *10* del decágono regular.



DIVISIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA EN 7, 14, ... PARTES IGUALES

Sea la circunferencia de centro **D** :

1 Se traza un diámetro cualquiera **HA**.

2 **Heptágono**. Se traza la mediatriz del radio ***DA*** que cortará a la circunferencia en los puntos ***P*** y **Q,** siendo ***S*** el punto medio de ***DA****.* El segmento ***PS*** es el lado /**7** del heptágono.
3 Polígono de **14 lados**. Trazando desde el centro de la circunferencia las perpendiculares a los lados del heptágono, estarán cortarán a la circunferencia en siete puntos, que junto con los vértices del heptágono formarán el polígono de catorce lados.

DIVISIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA EN 9, 18, ... PARTES IGUALES

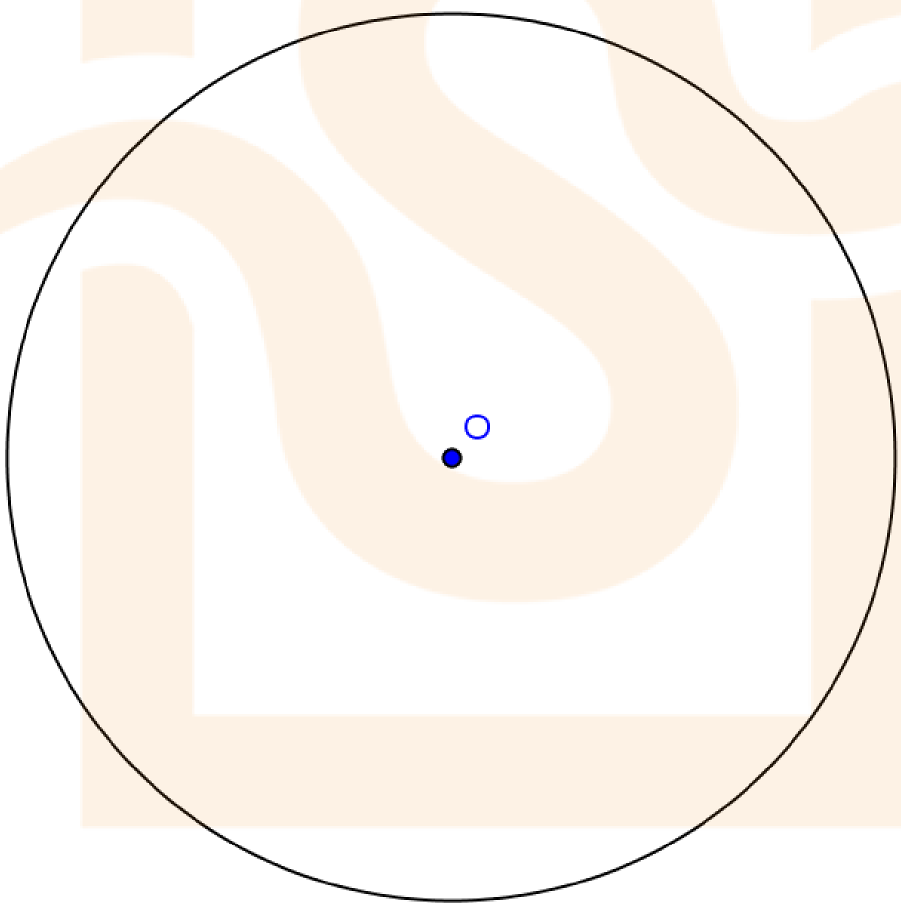
Sea la circunferencia de centro **D** :
1 Se trazan dos diámetros ***AQ*** y ***JK,*** perpendiculares entre sí.

2 Desde un extremo ***K*** de uno de los diámetros se traza un arco con el mismo radio de la circunferencia, cortando a esta en el punto ***L.***

3 Con centro en el otro extremo **J** del mismo diámetro, y radio ***JL,*** se traza un arco que corta a la prolongación del otro diámetro en el punto ***M.***

4 Con centro en ***M*** y radio ***MJ*** se traza un nuevo arco que corta al radio ***DA*** en el punto ***N.***
5 **Eneágono**. El segmento ***AN*** es el lado /**9** del polígono de nueve lados.

6 **Polígono de 18 lados**. Trazando desde el centro de la circunferencia las perpendiculares a los lados del eneágono, estas cortarán a la circunferencia en nueve puntos que, junto con los vértices del eneágono, formarán el polígono de dieciocho lados.



CONSTRUCCIÓN DE UN PENTÁGONO

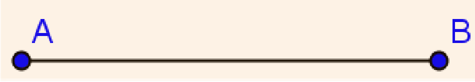
Dado el segmento ***AB*** :
1 Se prolonga el lado ***AB****;* se dibuja la mediatriz **S** del segmento ***AB****,* cuyo punto medio es ***F****,* y se traza la perpendicular tallado ***AB****,* por uno de los extremos.

2 Se traza un arco con centro en **B** y radio ***BA*** hasta cortar en **G** a la perpendicular ***t*** trazada por **B**.

3 Se traza un segundo arco con centro en ***F*** *y* radio ***FG*** hasta cortar en ***H*** a la prolongación del lado ***AB.***

4 Se traza un tercer arco con centro en ***A*** y radio ***AH*** hasta cortar al primer arco en **e** ya la mediatriz **S** en ***D****,* vértices ambos del pentágono.

5 Con centros en ***A*** y ***D*** Y radio ***AB*** se trazan dos arcos
que se cortarán en ***E.***



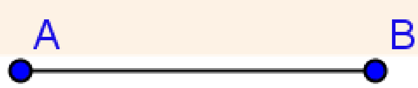
CONSTRUCCIÓN DE UN HEPTÁGONO

Dado el segmento ***AB***:

1 Se trazan la mediatriz **S** del segmento ***AB*** y la perpendicular ***t,*** por el extremo **B**, aliado ***AB.***

2 Con vértice en ***A,*** se construye un ángulo de **30°**, cuyo lado corta en ***H*** a la perpendicular ***t.***

3 Desde ***A*** y con radio ***AH*** se describe un arco que corta a la mediatriz **S** en **O**, centro de la circunferencia que inscribe al polígono.



CONSTRUCCIÓN DE UN OCTÓGO

Dado el segmento ***AB***:

1 Se traza la mediatriz ***s***, cuyo punto medio es ***I*** Se dibuja una circunferencia con centro en ***I*** y diámetro ***AB**,* que corta a la mediatriz en el punto ***J.***

2 Con centro en ***J*** y radio ***JA**,* o ***JB,*** se traza un arco que corta a la mediatriz en el punto **O**, centro de la circunferencia que inscribe al octógono de lado ***AB**.*

CONSTRUCCIÓN DE UN ENEÁGONO:

Dado el segmento ***AB***:

1 Se traza la mediatriz **s** del segmento ***AB.***

2 Con centro en ***A*** y radio ***AB*** se traza un arco que corta a la mediatriz en ***J.***

3 Con centro en ***J*** y radio ***JB*** se traza un arco que corta a la mediatriz en ***K.***

4 Con centro en ***K*** *y* radio ***KJ*** se traza un arco que corta a s en el punto ***F,*** vértice opuesto aliado ***AB.***

5 La mediatriz de ***AF*** corta a la recta **s** en el punto **O,** centro de la circunferencia.

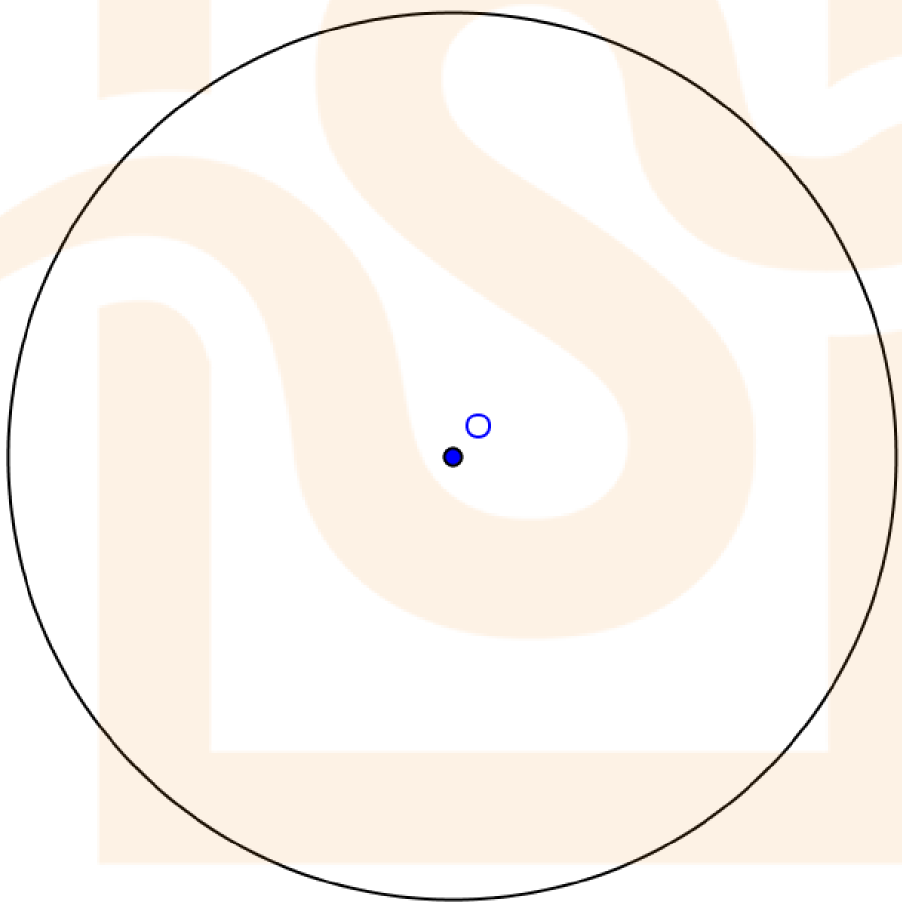
DIVISIÓN APROXIMADA DE UNA CIRCUNFERENCIA EN UN NÚMERO CUALQUIERA DE PARTES IGUALES (MÉTODO GENERAL)

Dada la circunferencia de centro O:

1 Se divide un diámetro *AL* de la circunferencia en el mismo número de partes iguales en que se desea dividir la circunferencia, numerando dichas divisiones: En este caso, en 11 partes.

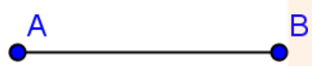
2 Con centros en los extremos *A* y *L* del diámetro anterior y radio igual al diámetro se trazan dos arcos que se cortan en el punto M.

3 El punto *M* se une con el punto número 2 del diámetro, prolongando dicha recta hasta que corte a la circunferencia en el punto B. El segmento *AB* es el lado aproximado del polígono que se busca.



CONSTRUCCIÓN DE UN POLÍGONO DE UN NÚMERO CUALQUIERA DE LADOS CONOCIENDO EL LADO (MÉTODO GENERAL)

1 Con centro en un punto O cualquiera se traza una circunferencia de radio arbitrario .
2 Se toma un diámetro *LM* cualquiera y se divide en tantas partes como lados tenga el polígono que se desea construir, numerando dichos puntos 1, 2, ... 3 Con centros en *L* y *M* Y radio *LM* se trazan dos arcos que se cortan en *P.*
4.Se une el punto *P* con el punto 2; la prolongación de dicha recta corta a la circunferencia en Q.
5 Se prolonga el segmento *LQ* ya partir del punto *L* se lleva la distancia *LR,* igual aliado del polígono que se desea construir.
6 Por el punto *R* se traza la paralela al radio *OL* que corta a la prolongación del radio OQ en el punto B.
7 La distancia OB es el radio de la circunferencia que inscribe al polígono que se pide.

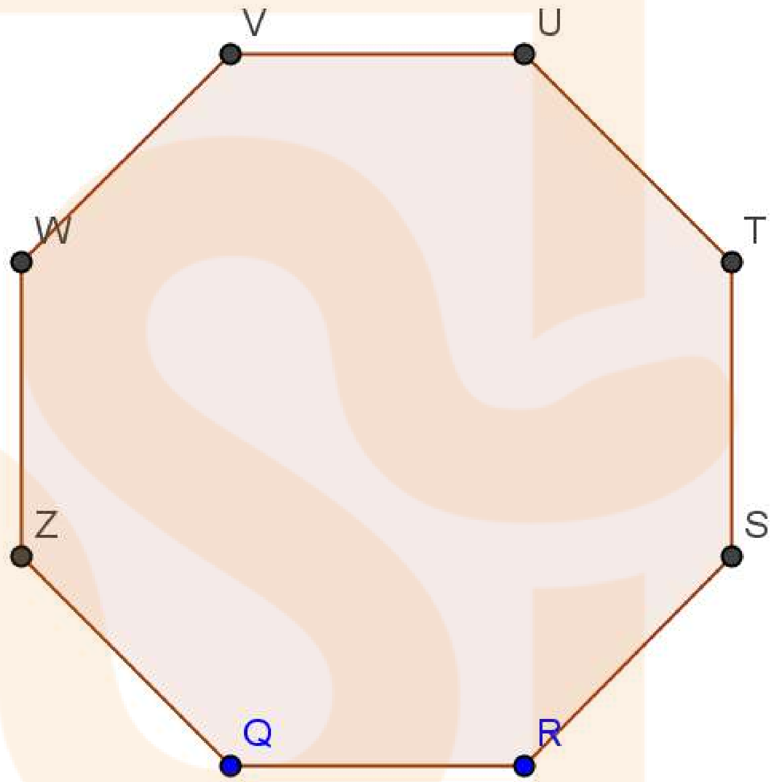


POLÍGONOS ESTRELLADOS:

Un polígono regular estrellado de un número determinado de vértices se halla dividiendo la circunferencia en tantas partes como vértices tenga el polígono a construir, y uniendo dichos vértices de dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro, etc. Para unir los vértices se ha de partir de uno de ellos y, recorriendo todos y cada uno de los vértices, cerrar el polígono en el mismo vértice que se comenzó.
El número de polígonos estrellados que existen de un número ***v*** de vértices es igual al número de cifras primas con ***v*** (números que no tienen división exacta con ***v)*** que sean menores de ***v/2*** y dichos polígonos se hallan uniendo los vértices de la manera que nos indican las cifras primas.
El siguiente cuadro indica el número de polígonos estrellados que existen de un número determinado de vértices, así co

v	p	n
I5	1	2
6	o	-
7	2	2-3
8	1	3
9	2	2-4
10	2	3-4

v	p	n
11	4	2-3-4-5
12	1	5
13	5	2-3-4-5-6
14	4	3-4-5-6
15	4	2-4-6-7
....	...	...



siendo:
v Número de vértices del polígono estrellado.
p Número de polígonos estrellados de **v** vértices. **n** Números primos con **v** menores de la mitad, que indican además la forma de unir los vértices.

CONSTRUCCIÓN DE UN OCTÓGONO ESTRELLADO

Tal como se indica en la tabla anterior, solo existe un polígono estrellado de ocho vértices, ya que solo hay un número menor que **4 (8/2**), que sea primo con **8**.
El polígono estrellado se halla dividiendo la circunferencia en ocho partes iguales y uniendo los vértices de tres en tres, puesto que el número primo con **8** es el **3**.

TEMA 4:Transformaciones geométricas

OBJETIVOS:

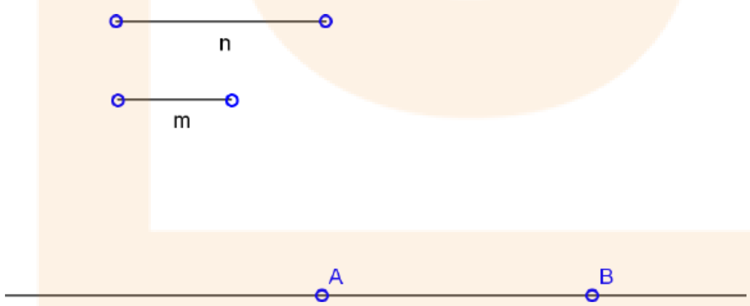
- Contactar con la geometría proyectiva como ampliación de la conocida g. euclediana.
- Realizar transformaciones en el plano, tales como la homología y sus casos particulares, afinidades e inversiónes.
- Ampliar dichas transformaciones a otros tipos de problemas.
- Conocer las relaciones de las transformaciones con la geometría descriptiva que se estudiará más adelante.

Transformaciones geométricas
Una transformación geométrica **es una correspondencia** (o aplicación) entre elementos de dos formas geométricas.
El concepto de *transformación* en geometría es equivalente al concepto de *función* en álgebra.
Transformaciones proyectivas. Es una transformación tal que cuatro puntos en línea recta se transforman en cuatro puntos en línea recta, siendo la razón doble de los cuatro primeros igual a la razón doble de los cuatro segundos.
Existen también transformaciones entre haces de rectas, haces de planos, etc.
En geometría se dice que dos formas son proyectivas si una puede obtenerse de la otra mediante proyecciones y secciones.
Homografía. Se denomina así a la correspondencia entre dos formas geométricas tal que a un elemento de una forma le corresponde un elemento de la misma especie de la otra forma (a un punto le corresponde un punto, a una recta le corresponde una recta, etc.), según una determinada ley.

Correlación. Es la correspondencia entre elementos de distinta especie (a un punto le corresponde una recta, a una recta le corresponde un plano, etc.). Son transformaciones homográficas: la homología, la afinidad, la homotecia, la traslación, la simetría y el giro.

RAZÓN SIMPLE:

Sean A Y B los puntos fijados sobre una recta, dibujar un punto P para que la razón simple h de PAB sea igual a m/n.
Para construir el punto P cuya razón **h** es conocida, se trazan por **A** y **B** dos rectas paralelas cualesquiera, tomando sobre ellas dos segmentos que están en la relación **m/n** , al mismo o a distinto lado, según que el valor de **h** sea positivo o negativo.
El segmento que une los extremos obtenidos determina sobre la recta el punto buscado (**P_1** para **+** y **P_2** para **-**)



CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA DE UNA CUATERNA ARMÓNICA

Dados tres puntos N,A y B, sobre una recta r, hallar el punto M conjugado armónico del N respecto a los puntos A y B se trazan por A y B dos líneas paralelas cualesquiera y por M una recta secante arbitraria que determina sobre las paralelas los segmentos f y r , cuya razón es precisamente, la razón (MAB). Trácese sobre la prolongación de la paralela trazada por A un segmento igual a f y su unión con el extremo de r determina el cuarto armónico N.

HOMOLOGÍA

Homología plana es una transformación homográfica que cumple las siguientes leyes (fig. 3):
- Dos puntos homólogos están alineados con un punto fijo llamado centro de homología.
- Dos rectas homólogas se cortan siempre en una recta fija llamada eje de homología.

El eje, por tanto, es el lugar geométrico de los puntos que son homólogos de sí mismos (puntos dobles).

Coeficiente de homología

Es la razón doble que forman dos puntos homólogos *A* y *A',* el centro O y el punto *P* de intersección de la recta *AA'* con el eje e.

$$k = (OPAA') = \frac{OAA'}{(PAA')} = \frac{OA/OA'}{PA/lPA'}$$

Si **-1** a la homología se le denomina *involución.*

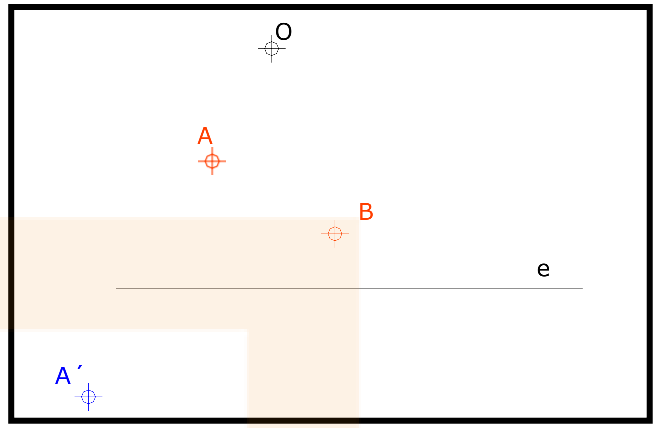
Ejercicio

Hallar el homólogo **B'** de **B** , conociendo el centro O, el eje **e** y un par de puntos homólogos *A* y *A'*.

1 Se unen los puntos ***A*** y **B** mediante la recta **r** que corta al eje en el punto ***C-C'***.

2 El punto ***C-C'*** se une con el punto *A'* mediante la recta r', homóloga de la recta **r**.

3 Se une el centro **O** con el punto a hasta cortar a la recta **r'** en el punto **B'** solución.



RECTAS LíMITE

Es el lugar geométrico de los puntos cuyos homólogos están en el infinito. Son dos**:** ***l*** e **l´,** paralelas al eje.

Ejercicio

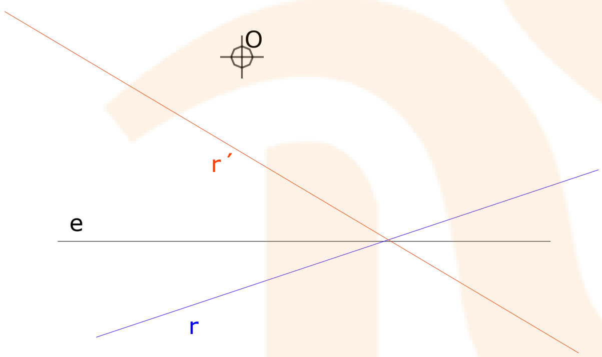
Dadas dos rectas homólogas **r** y **r',** el centro **O** y el eje **e**, hallar **las rectas límites**:

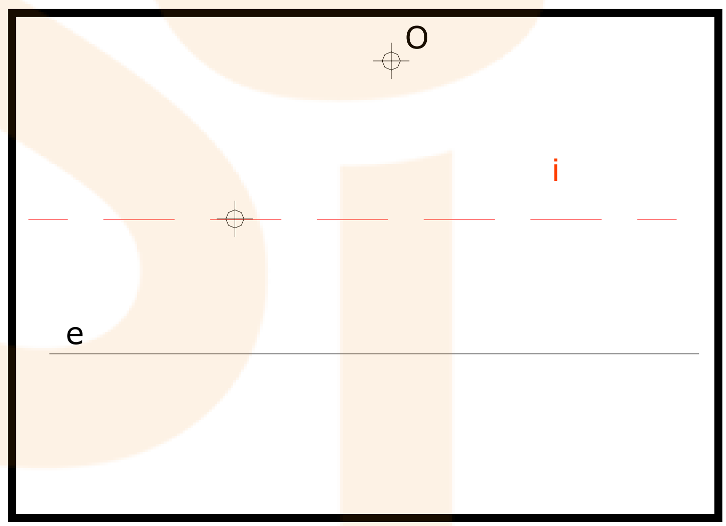
1 Por el centro de homología **O** se traza la paralela a la recta **r'** hasta cortar a la otra recta (en el punto ***K****.*

2 Por ***K*** se traza la recta límite ***l*** paralela al eje.

3 Por el centro de homología **O** se traza la paralela a la recta ***r*** hasta cortar a la otra recta **r**' en el punto ***J'.***

4 Por ***J'*** se traza la recta límite ***l'*** paralela al eje.



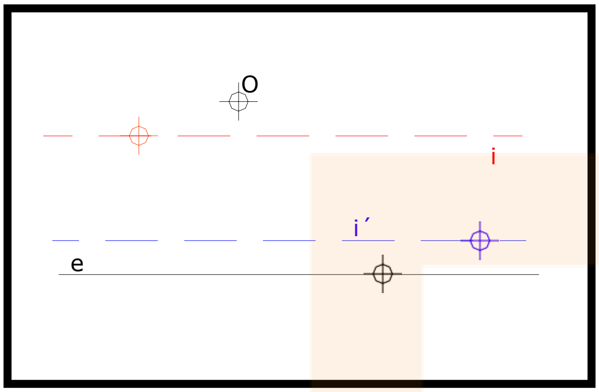


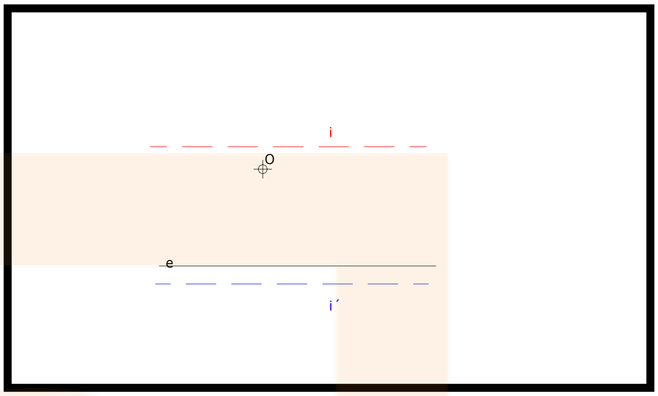
Propiedades

Todas las rectas que se cortan en un mismo punto ***P*** de la recta límite) tienen sus homólogas . paralelas a ***OP****.*

La distancia de una de las rectas límite al centro de homología es la misma que hay desde la otra recta límite al eje de homología.

Las rectas límite están siempre entre el centro **O** y el eje **e** , o bien fuera de ellos.





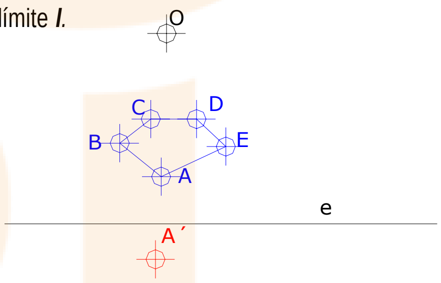
CONSTRUCCiÓN DE FIGURAS HOMÓLOGAS

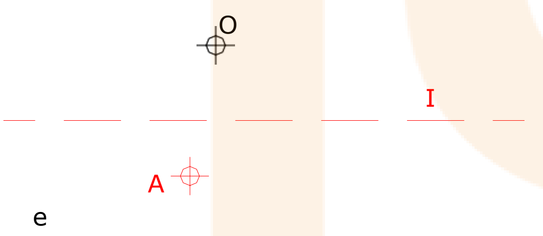
Una homología queda determinada conociendo los siguientes datos:

a) El eje, el centro y un par de puntos homólogos. b) El centro y dos pares de rectas homólogas.
c) Un punto doble y dos pares de puntos homólogos.
d) El centro, el eje y una recta límite.
e) El centro, una recta límite y dos puntos homólogos.
f) El centro, el eje y el coeficiente de homología.
g) El centro y las dos rectas límite.
h) Dos figuras homólogas.

Ejercicio

Hallar el homólogo ***A'*** de un punto ***A*** conociendo el centro de homología **O,** el eje ***e*** y la recta límite ***I.***
1 Se traza una recta *r* cualquiera que pase por ***A****;*
dicha recta corta al eje en ***P*** ya la recta límite en ***K.***
2 Se une el centro **O** con **K** y por el punto ***P*** se traza la paralela ***r'*** (homóloga de ***r****)* a ***OK****.*
3 Donde la recta ***OA*** corta a ***r'*** se obtiene el punto ***A'.***



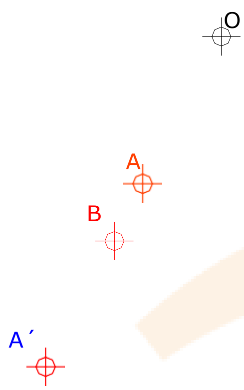


Ejercicio

Construir la figura homóloga del polígono ***ABCDE*** conociendo el centro **O**, el eje **e** y un punto ***A'****.*
1 Aplicando el procedimiento general, se une el punto ***A*** con cualquier otro, el **B** por ejemplo, hasta cortar al eje en el punto ***M****.*
2 El punto ***M*** se une con ***A'*** mediante una recta que

corta al rayo **OB** en el punto ***B'.***
3 Se une el punto **C** con el punto **B**, o con cualquier otro del que ya se conozca su homólogo, y se siguen las mismas operaciones anteriores hasta determinar los homólogos de todos los vértices.

Ejercicio
Hallar el homólogo **B'** de un punto **B** ,
conociendo el centro **O**, el **eje e** y un par de puntos homólogos ***A*** y ***A'*** alineados con **B.**
1 Se elige un punto **C**, arbitrario, y se une con ***A***
mediante la recta ***r*** que corta al eje en ***R.***
2 Se une ***R*** con ***A***' mediante la recta ***r'*** (homóloga
de **r**).
3 Se traza la recta que une el centro **O** con el punto **C** hasta cortar a ***r'*** en ***G***'.
4 Se une **C** con **B** hasta cortar al eje en ***S***.
5 Se traza la recta ***s'*** (homóloga de ***s***) uniendo ***S*** y ***C'.***
6 Donde la recta ***s'*** corta a la recta **OB** se obtiene el punto **B**' buscado.



CONICAS HOMOLOGICAS DE UNA CIRCUNFERENCIA
La figura homológica de una circunferencia es una
cónica que depende de la posición relativa de la circunferencia y su recta límite:
La recta límite es exterior: la figura es una elipse. La recta límite es tangente: la figura es una parábola. La recta límite es secante: la figura es una hipérbola.

Propiedades
- La tangente común a una cónica y a su homóloga
pasa por el vértice de homología.
- Si dos cónicas homológicas se cortan, la recta que
une los puntos de intersección es el eje de homología y si son tangentes, la tangente común es el eje.
- El centro de una cónica se transforma en el polo de
la recta límite respecto de la figura homológica.

ELIPSE HOMOLÓGICA DE LA CIRCUNFERENCIA

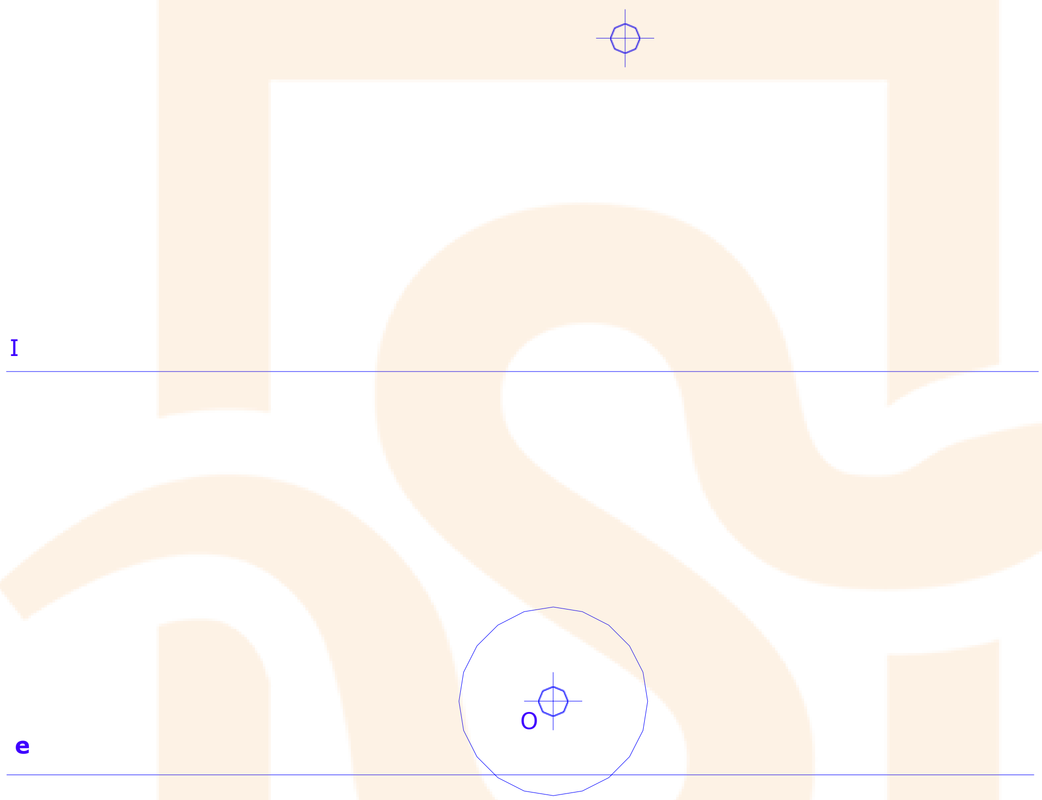
Sea la circunferencia de centro **O**, un eje **e**, la recta límite ***l*** y el vértice ***V*** :

Determinación del polo

1 Se elige un punto arbitrario ***M*** de la recta límite I y se trazan las tangentes a la circunferencia, cuyos puntos de tangencia son **C y D**.

2 Se unen los puntos **C** y **D** hasta cortar a la recta límite en ***N*** y desde este punto se trazan dos tangentes cuyos puntos de tangencia son ***A*** y **B.**

3 Se unen los puntos ***A*** y **B**. La intersección *P* de lasrectas ***AB*** y **CD** es el polo ***P****.*



Diámetros conjugados de la elipse

4 Son los segmentos homólogos de ***AB*** y ***CD:*** por el punto de intersección de la recta ***AB*** con el eje, se traza la paralela a ***VM*** y por el punto de intersección de **CD** con el eje se traza la paralela a ***VN.*** El homólogo ***P'*** del polo ***P*** es el centro de la elipse homóloga.

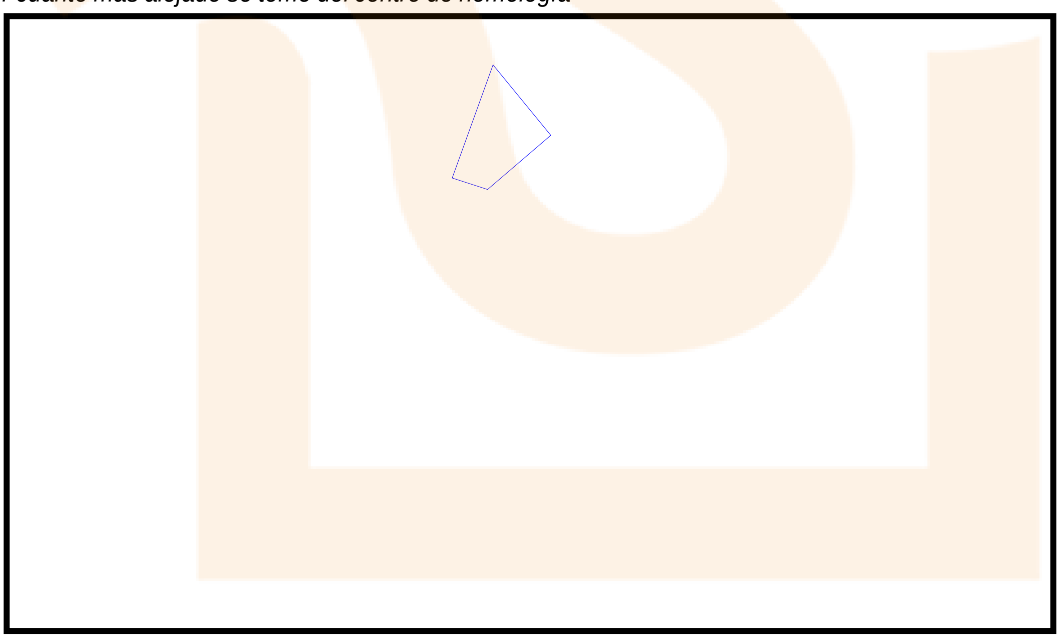
Trazado de la elipse

5 Por el polo ***P*** se traza una recta ***r*** cualquiera que corta a la circunferencia en los puntos **G** y ***H.*** Hallando la homóloga ***r'*** y los homólogos **G'** y ***H',*** se determinan puntos de la elipse.
6 Los puntos ***E-E'*** y ***F-F'*** de intersección de ambas
cónicas con el eje son puntos dobles.

Transformación homológica de un cuadrilátero cualquiera en un cuadrado.
Sea cuadrilátero **ABCD**. Hemos de determinar la posición del **centro de homología** y de la **recta límite** del polígono dado. situados de *modo* que en la transformación nos resulte un cuadrado.

Recordemos q los lados opuestos un cuadrado son paralelos, luego se cortan en un punto impropio.;. de aquí que los lados opuesto del polígono dado han de" cortarse en la recta límite.. Para obtener la recta límite basta, por tanto, obtener las intersecciones de **A D** con **B C** y de **A B** con **DC**, las cuales determinan los puntos **a** y ***d,*** que definen a **RL**

EL centro de homología ha de ser un punto desde el cual se vean los lados y las diagonales formando respectivamente ángulos rectos, puesto que en el cuadrado así se verifica, luego tomando como diámetro el segmento **a*d*** tracemos una semicircunferencia, lugar geométrico del ángulo de **90º,** y con los puntos ***b*** y ***c,*** donde es cortada **R L** por las diagonales, procedamos de igual modo, tomando el segmento ***BC*** como diámetro también. El punto **O**, común a ambas, es el punto buscado, centro de la homología. Los segmentos **Oa** y **O*d*** nos marcan las direcciones de los lados del cuadrado y los segmentos **O*C*** y **O*b*** de las diagonales.
Tracemos *en* cualquier posición paralelamente a **R L** el eje de homología y obtengamos los vértices **A', B', C'** y **D'**, homólogos de **A, B, C** y **D** según los procedimientos conocidos. *La posición del eje interviene solamente en la magnitud del cuadrado obtenido, mayor cuanto más alejado se tome del centro de homología*



AFINIDAD

La afinidad es una homología de centro impropio, es decir, que está en el infinito. Por tanto, la afinidad es una transformación homográfica que cumple las siguientes leyes.

- La recta que une dos puntos afines es paralela a una dirección ***d*** de afinidad.
- Dos rectas afines se cortan en un punto del eje de afinidad.
- En afinidad no existen rectas límite.

Coeficiente de afinidad

Si el coeficiente de afinidad es positivo, los dos puntos ***A*** y ***A'*** están al mismo lado del eje, y si es negativo están a distinto lado.

Ejercicio

Hallar el afín **B'** de un punto **B** , conociendo la dirección de afinidad ***d****,* el eje **e** y un par de puntos afines ***A*** y ***A':***

1 Se unen los puntos ***A*** y **B** mediante la recta ***r*** *que* corta al eje en el punto ***C-C'****.*

2 El punto ***C-C*** se une con el punto ***A'*** mediante la recta ***r'****,* afín de la recta ***r****.*

3 Por el punto **B** se traza una recta paralela a la dirección ***d*** de afinidad hasta cortar a la recta **r'** en el 'punto **B'** solución.

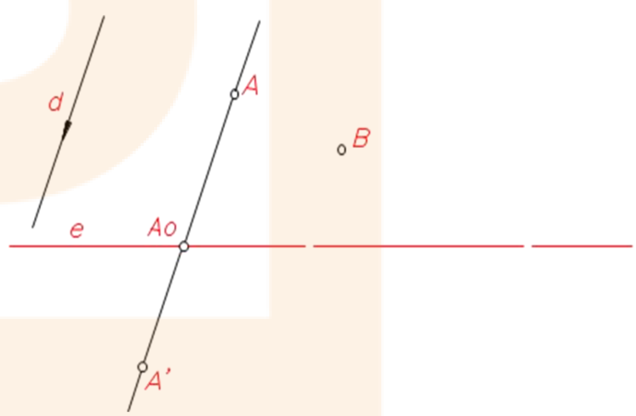
CONSTRUCCiÓN DE FIGURAS AFINES

Una afinidad queda determinada conociendo los siguientes datos:

a) El eje y dos puntos afines.

b) La dirección de afinidad y el coeficiente.

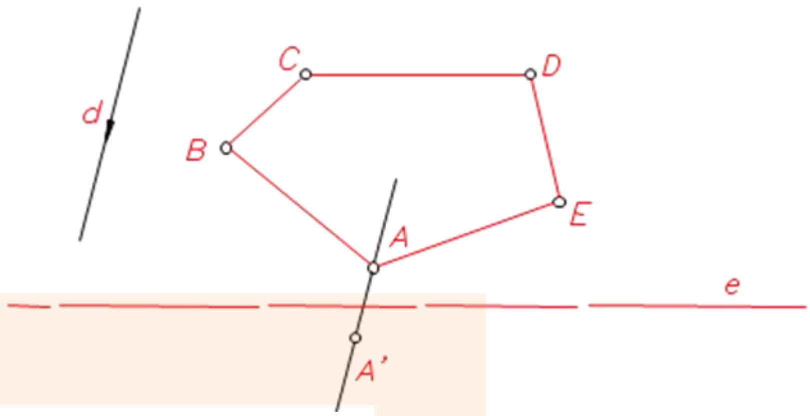
c) Dos figuras afines.



EJERCICIO:

Hallar el afín B' de un punto B , conociendo la dirección de afinidad *d,* el eje e y un par de puntos afines *A* y *A':*

Ejercicio
Construir la figura afín del polígono ***ABCDE*** conociendo la dirección *d* de afinidad, el eje ***e*** y un punto afín ***A'.***
1 Aplicando el procedimiento general, se une el punto ***A*** con cualquier otro, el **B** por ejemplo, hasta cortar al eje en el punto ***M.***
2 El punto ***M*** se une con ***A'*** mediante una recta que corta al rayo paralelo a la dirección de afinidad trazado por **B,** en el punto ***B´.***
3 Se une el punto **C** con el punto **B**, o con cualquier otro del que ya se conozca su afín, y se siguen las mismas operaciones anteriores hasta determinar los afines de todos los vértices.



Ejercicio
Hallar el afín **B**' de un punto **B** , conociendo la dirección de afinidad ***d****,* el eje **e** y un par de puntos afines ***A*** y ***A'*** alineados con **B**.
1 Se elige un punto **C**, arbitrario, y se une con ***A*** mediante la recta ***r*** que corta al eje en ***R****.*
2 Se une ***R*** con ***A'*** mediante la recta ***r'*** (afín de ***r****)*
3 Por el punto **C** se traza la paralela a la dirección de afinidad hasta cortar a ***r'*** en ***C´.***
4 Se une **C** con **B** hasta cortar al eje en ***S.***
5 Se traza la recta ***s'*** (afín de ***s****)* uniendo ***S*** y ***C.***
6 El corte de ***s'* y *AA'*** es el punto **B'** buscado.

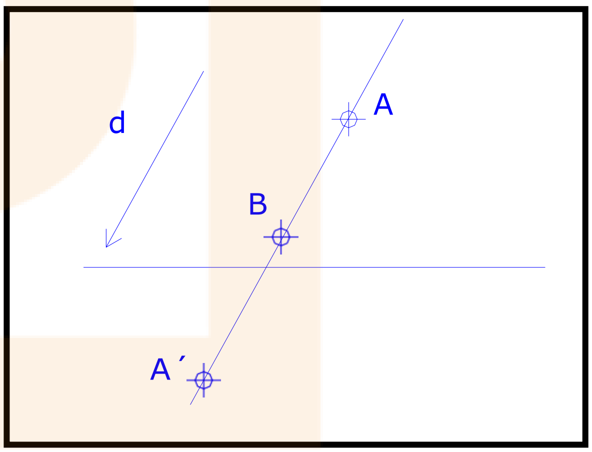
ELIPSE AFíN DE UNA CIRCUNFERENCIA

Caso general

Dada la circunferencia de centro **O**, el eje **e** y el punto **O'** afín de **O**

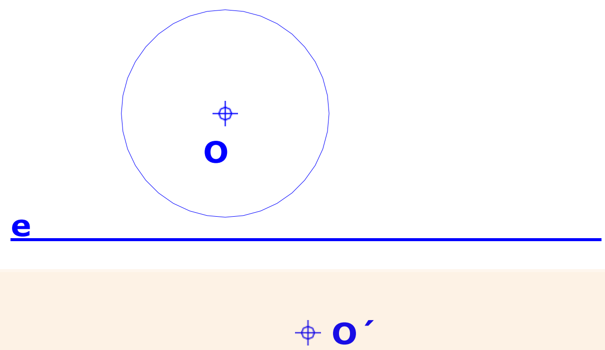
Ejes de la elipse

1 Se traza la mediatriz del segmento **00'** hasta cortar al eje en el punto ***E*** y con centro en ***E*** y radio ***EO*** = ***EO'*** se traza la circunferencia que corta al eje en los puntos ***F-F'*** y ***G-G'****.*
2 Las rectas ***a*** y ***b*** que unen estos puntos con **O** tienen sus homólogas en las rectas *a'* y *b'* que unen ***F-F'*** y ***G-G'*** con **O**'.
3 Por los puntos ***A*, B, C** y ***D*** de intersección de las rectas ***a´*** y ***b´*** con la circunferencia se trazan paralelas a la dirección de afinidad **00'**, obteniendo así los ejes ***A'B'*** y ***C'D'****.*



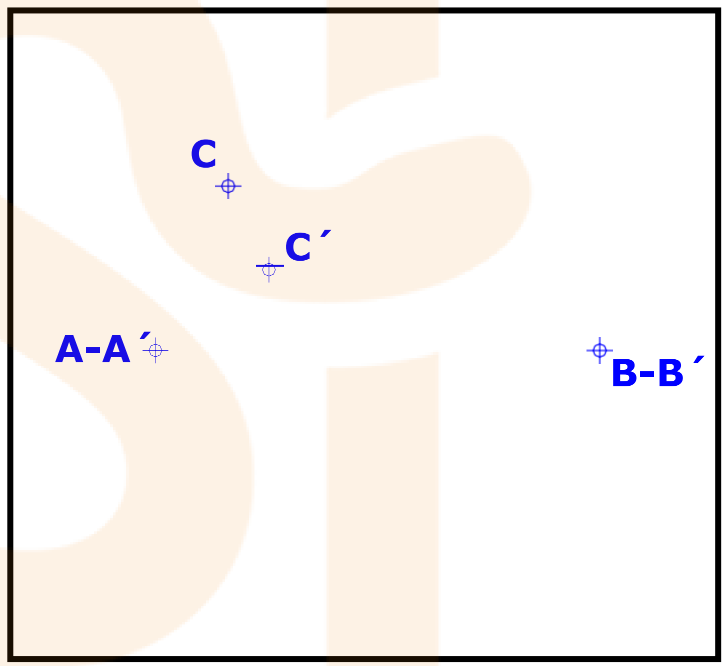
Trazado de la elipse

(...)

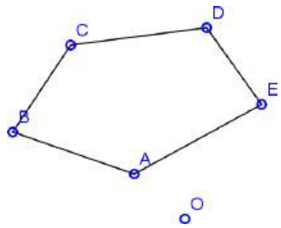


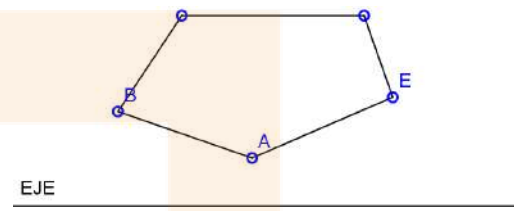
Si la circunferencia se cortara con el eje, los dos puntos de intersección serían puntos dobles.

Circunferencia y elipse de diámetro común
Dada la circunferencia de diámetro ***AB-A'B'*** y un par de puntos afines ***C-C´*** :
1 ***Eje de afinidad***. Es el diámetro común ***AB-A'B'*** de ambas cónicas.
2 Dirección de afinidad. Es la recta C-C´.
3 ***Trazado de la elipse***. Por el punto **C** se traza la perpendicular al eje hasta cortarlo en el punto **M.** Por cualquier otro punto ***N*** del eje se traza la perpendicular hasta cortar a la circunferencia en el punto ***E***. Por ***N*** se dibuja la paralela a ***MC´*** y por ***E*** la paralela a ***CC'***; ambas paralelas se cortan en el punto ***E'*** de la elipse y así sucesivamente.



SIMETRÍA CENTRAL:
Hallar A'B'C'D':

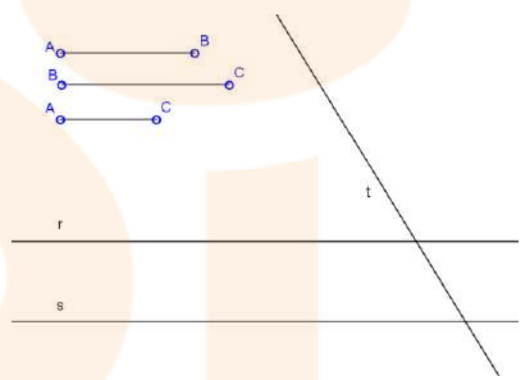




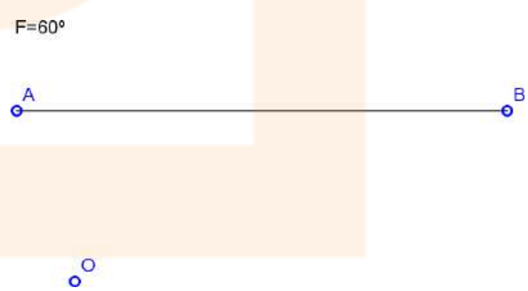
SIMETRÍA AXIAL:

Hallar A'B'C'D':

TRASLACIÓN:
Trazar el triángulo ABC situando un vértice en cada una de las rectas dadas:
1. Desde un punto cualquiera A se traza un arco de radio AB que corta a s en el punto B
2. Hallar C en la intersección de dos arcos. Uno de centro A y radio AC y el otro de centro B y radio BC
3. Trasladar el triángulo ABC en dirección r-s hasta que C coincida en la recta t



GIRO:
Girar la recta r un ángulo **f** respecto a O
1. Trazar una perpendicular a r por el punto O obteniendo A como intersección
2. Con centro O giramos el punto A un ángulo **f** hasta A’
3. Se traza por A’ la recta girada r’ que es perpendicular a OA. Comprobamos con B

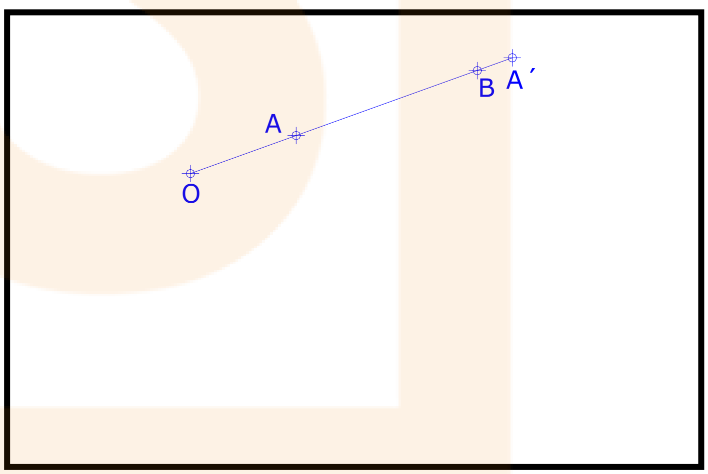


INVERSiÓN
La inversión es una transformación que cumple:
- Dos puntos inversos están alineados con otro fijo llamado centro de inversión.
- El producto de distancias del centro de inversión a dos puntos inversos es constante.

Potencia de inversión
Sea un punto **O**, una circunferencia de centro **C** y una recta ***r*** que pasa por el punto **O** y corta a la circunferencia en dos puntos ***A*** y ***A'*** ; tal como se vio en el tema anterior, se llama potencia ***p*** de un punto **O** respecto de la circunferencia de centro e al producto:
p = OA x OA'
Todos los pares de puntos que se obtienen al trazar desde un punto **O** rectas secantes a una circunferencia son inversos respecto al punto **O** (centro de inversión). Si la potencia es positiva, los pares de puntos inversos se encuentran a un mismo lado del centro de inversión, es decir, el centro **O** es exterior a la circunferencia; en cambio, si la potencia es negativa los pares de puntos se encontrarán a distinto lado y el centro es interior a la circunferencia.

Propiedades de una inversión
a) Dos pares de puntos inversos ***A, A',*** **By B'**
determinan una circunferencia.
b) Dos rectas inversas que unen entre sí dos puntos ***AB*** y sus inversos ***A'B'*** son antiparalelas de las rectas que unen los pares de puntos inversos ***AA'*** y ***AB'*** (cuatro rectas son antiparalelas cuando en el cuadrilátero que forman al cortarse, cada ángulo interior es igual al ángulo exterior del vértice opuesto, es decir, cada ángulo es complementario del opuesto).

Ejercicio
Hallar el inverso ***B'*** de un punto **B** (conociendo el centro de inversión **O** y un par de puntos inversos ***A*** y ***A'*** no alineados con ***B***:
1 Se dibuja la circunferencia que pase por los puntos ***A, A'*** Y **B**; para ello, se trazan las mediatrices de los segmentos ***AA'*** *y* ***AB*** que, al cortarse, determinan el centro e de la circunferencia.
2 El punto ***B'*** donde se cortan la circunferencia y la recta ***OB*** será el inverso del punto **B**.
También podría haberse hallado trazando la recta ***A'B'*** antiparalela de la recta ***AB*** respecto de las rectas **OA** y ***OB***.



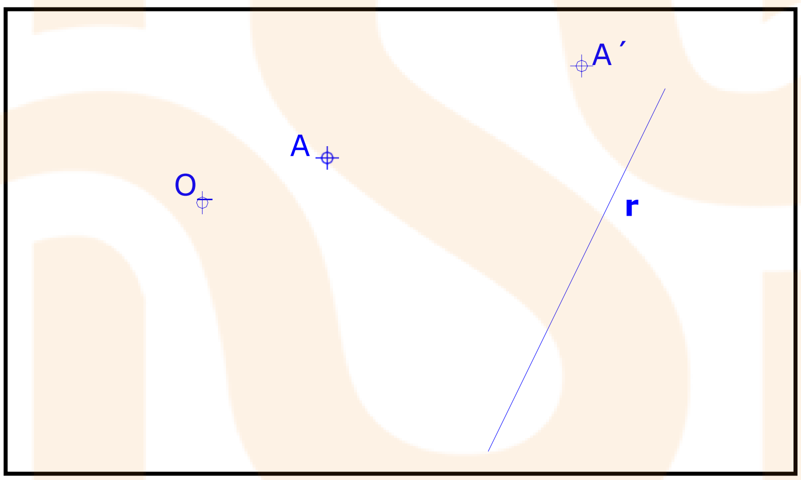
Ejercicio
Hallar el inverso **B'** de un punto **B**, conociendo el centro de inversión **O** y un par de puntos inversos ***A*** y ***A'*** alineados con **B**:
1 Se elige un punto e cualquiera, no alineado con *A* y ***A'***, Y se halla el inverso **C'** trazando la circunferencia que pasa por ***A, A'*** y **C**.
2 Se halla el inverso **B'** trazando la circunferencia que pasa por **B, C y *C´.***

Figuras Inversas
Una inversión queda determinada por:
a) El centro y un par de puntos inversos.
b) El centro y la potencia.
c) Dos figuras inversas.

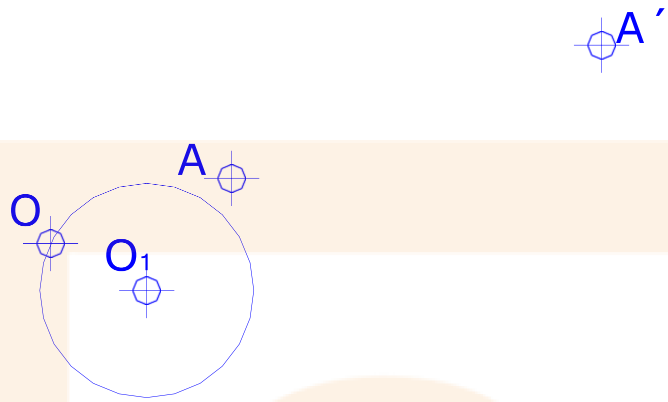
CIRCUNFERENCIA QUE PASA POR EL CENTRO DE INVERSiÓN

La figura inversa de una recta ***r***, que no pasa por el centro de inversión **O**, es una circunferencia que pasa por dicho centro, Y recíprocamente, la figura inversa de una circunferencia, de centro **C**, que pasa por el centro de inversión **O** es una recta ***r*** perpendicular al diámetro que pasa por **O** y **C**.

Ejercicio
Dado el centro de inversión **O** y un par de puntos inversos ***A*** y ***A'***, hallar la figura inversa de una recta ***r*** que no pasa por el centro de inversión **O**:
1 Se elige un punto **B'** cualquiera de la recta ***r*** *y* se halla su inverso **B** mediante la circunferencia de centro $\mathbf{0_1}$ que pasa por los puntos ***A, A'*** y ***B'***.
2 Por el centro de inversión **O** se traza la perpendicular a ***r***; como la circunferencia debe pasar por **O**, basta con trazar la mediatriz de **OB** hasta cortar a la perpendicular anterior en $\mathbf{O_2}$, centro de la circunferencia buscada.



Ejercicio
Dado el centro de inversión **O** y un par de puntos inversos ***A*** y ***A'***, hallar la figura inversa de una circunferencia de centro $\mathbf{0_1}$ que pasa por el centro de inversión:
1 Se elige un punto **B** cualquiera de la circunferencia y se halla su inverso **B'** mediante la circunferencia de centro $\mathbf{O_2}$ que pasa por los puntos ***A, A'*** Y **B**.
2 Por el centro de inversión **O** se traza la recta que une **O** y **01**, Y por **B'** (inverso de **B**) la recta ***r*** perpendicular a la recta $\mathbf{OO_1}$.


A´
A
O
O1

TEMA 4: Transformaciones geométricas-PARTE 2ª

INVERSIÓN

La inversión es una transformación anamórfica (produce deformaciones en las formas originales) basada en el concepto de potencia que vimos anteriormente. Para realizar la inversión de un punto seguiremos las siguientes tres reglas :

1ª Regla:

Una pareja de puntos inversos A y A' y el centro de inversión O se encuentran sobre una misma línea....

2ª Regla:

Al producto de distancias OA x OA' se le llama razón de inversión K.
K puede ser positivo o negativo.
2.1. Si K>0 ambos puntos se encuentran a un mismo lado de O.

2.2. Si K<0 entonces O se encuentra entre A y A'.

3ª Regla:

Se llama **circunferencia de puntos dobles** (c.p.d.) a la formada por puntos **inversos de sí mismos.**
El radio de esa circunferencia será siempre de valor $\sqrt{K}$

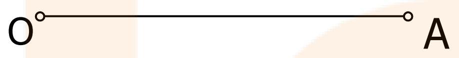
INVERSIÓN DE UN PUNTO:

CASO A:

Hallar la inversión de un punto A respecto al centro O cuando el dato es la potencia de inversión K = 9 cm2.
(resolveremos por el método sustractivo de Euclides)

1. Dibujamos la circunferencia de puntos dobles (c.p.d.). Su radio será la raíz de la potencia de inversión.
2. Trazamos la semicircunferencia entre O y A y obtenemos T.
3. Desde T lanzo una perpendicular a la recta OA obteniendo así el inverso A'.

Esto es así porque si recuerdas el tema de potencia observarás que
Pot. = OA'* OA= OT^2= r^2 = 9



Si suponemos que la potencia de inversión fuese negativa (K= -9 cm2) sabremos que, a diferencia del problema anterior, O quedará entre A y A´.
(resolveremos por el método aditivo de Euclides)

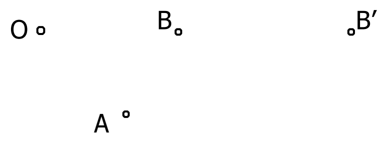
1. Al igual que en el problema anterior, nos basaremos en el Teorema de Euclides para resolverlo, pero ahora los segmentos que se multiplicarán (OA y OA') se colocarán de manera aditiva (uno a continuación del otro)
Levantamos por O un segmento perpendicular al OA y de longitud √ K = 3 cm localizando T.
2. Construimos la mediatriz entre T y A obteniendo el centro del arco C.
Una vez trazado con centro en C y apertura hasta T o hasta A obtenemos el inverso A'.

Al igual que en el problema anterior
Pot. = OA'. OA= OT2

CASO B:

Hallar la inversión de un punto A respecto al centro O cuando el dato es otro punto B y su inversión B'.
1. Construyo la circunferencia que pase por B, B' y A.
2. Lanzando una línea desde O hacia A, encontraremos su inverso A' al cortar nuevamente la circunferencia.

Esto es así porque, si recuerdas el tema de potencia, comprobarás que la potencia tiene el mismo valor tanto para A y A' como para B y B', ya que pertenecen a una misma circunferencia O.



INVERSIÓN DE UNA RECTA

CASO A:

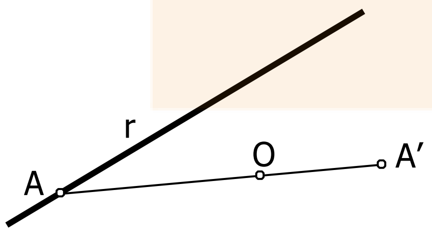
Hallar **la inversión de una recta** cuyo **centro de inversión O está sobre la recta r**.
Como sabemos que un punto y su invertido se encuentran alineados también con el centro O, al invertir los puntos de esta recta uno tras otro cambiarían su ubicación pero sobre esa misma recta con lo que la recta no variaría de situación. En este caso la recta coincide con su inversión.

CASO B:

Hallar la **inversión de una recta** r cuyo centro **de inversión O no esté sobre esa recta** y además nos dan un puntos invertido de esa recta (A y A').

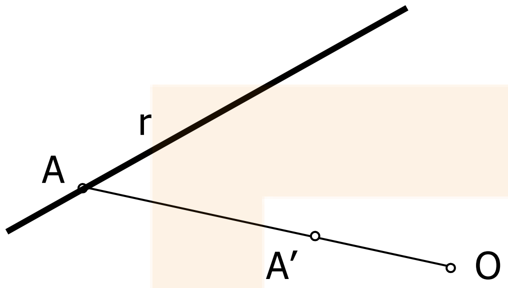
Veamos un ejemplo para cuando K <0 es decir, O se encuentre entre A y su inverso A'.

1. La inversa de una recta es una circunferencia cuyo centro C estará en la perpendicular a r por O.
2. Esa circunferencia también pasará por O y por A' por lo que construiremos mediatriz entre esos dos puntos.
3. Veamos otro ejemplo pero ahora para un valor de K >0 es decir, A y su inverso A' se encuentren a un mismo lado respecto al centro O.



Veamos otro ejemplo pero ahora para un valor de K >0 es decir, A y su inverso A’ se encuentren a un mismo lado respecto al centro O.

1. Procedemos exactamente igual que en el problema anterior.
2. Primero la perpendicular a la recta r por O.
3. Seguidamente mediatriz entre A’ y O, ya que la circunferencia pasará por esos dos puntos



TANGENCIAS

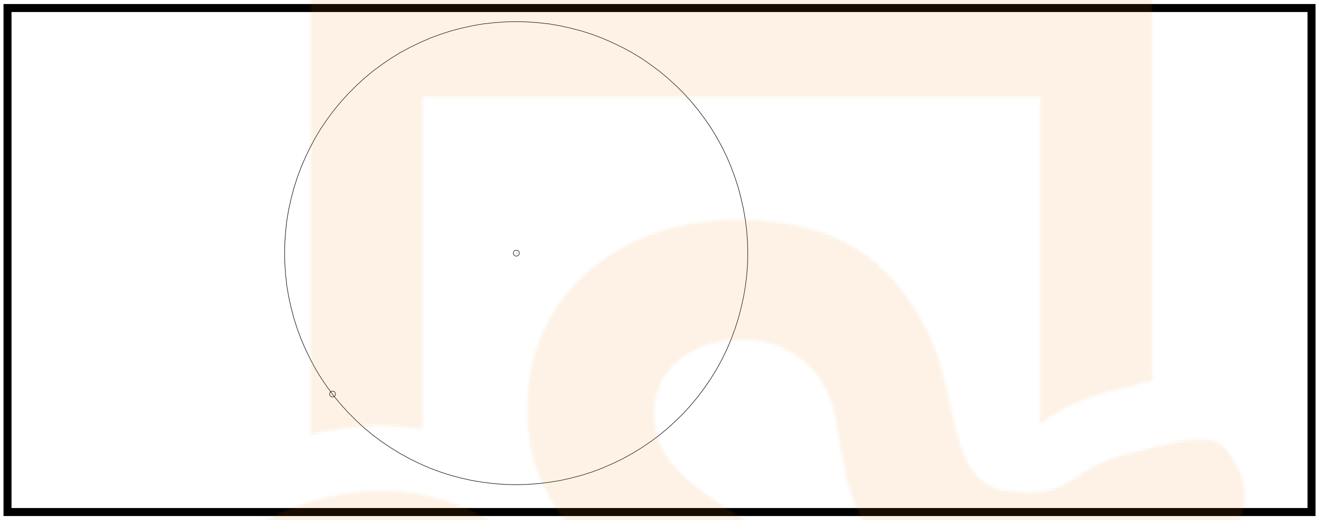
PROPIEDADES DE LAS TANGENCIAS:

1 Si **dos** circunferencias son **tangentes**, el *punto de tangencia* se encuentra en la **recta** que une los **centros**.
2 Si una **recta** es **tangente** a una **circunferencia**, el radio en el punto de tangencia es **perpendicula**r a la tangente.
3 El **centro** de cualquier circunferencia que pase por **dos puntos** está en la **mediatriz** del segmento. Todo radio perpendicular a una cuerda la divide en dos partes iguales.
4 El **centro** de cualquier **circunferencia tangente** a dos rectas se encuentra en la **bisectriz** del ángulo que forman.
A continuación vamos a estudiar los casos más relevantes en la práctica del dibujo técnico, indicando entre paréntesis la abreviatura que identifica cada caso para su posible sistematización. El significado de cada letra es el siguiente:
R radio
p punto
r recta
e circunferencia

RECTAS TANGENTES A UNA CIRCUNFERENCIA QUE PASAN POR UN PUNTO

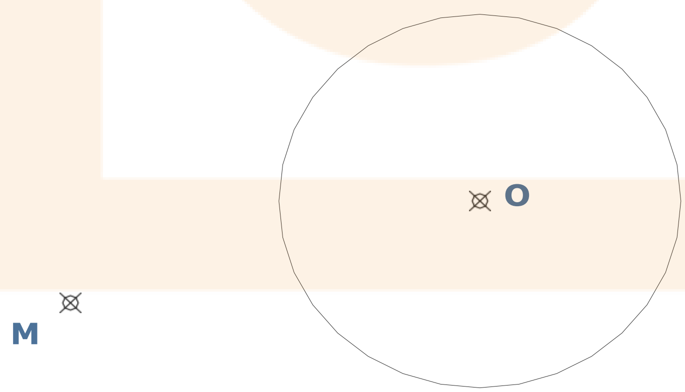
El punto está en la circunferencia.

(**Número de soluciones: 1**.)
Dada la circunferencia de centro **O** y el punto ***M***:
1 Se traza el radio ***OM*** correspondiente al punto dado. **2** Por el punto ***M*** se traza la recta ***r*** perpendicular al radio **OM**.



El punto es exterior a la circunferencia.

(**Número de soluciones: 2**.)
Dada la circunferencia de centro **O** y el punto ***M***:
1 Se dibuja el segmento ***OM*** y se halla el punto medio **A** del mismo mediante el trazado de la mediatriz.
2 Con centro en el punto ***A*** y radio ***AO = AM*** se traza la circunferencia que corta a la dada en los puntos **B** y **C**, puntos de tangencia de las soluciones.
3 Se une el punto ***M*** con los puntos **B** y **C** mediante las rectas ***r*** y **s**.



RECTAS TANGENTES A DOS CIRCUNFERENCIAS DE DISTINTO RADIO

Tangentes exteriores

(**Número de soluciones: 2**.)

Sean las circunferencias de centro **01** y **O2**. Y radios **1** y **2**, respectivamente:

1 Con centro en **O2**, centro de la circunferencia de mayor radio, se traza otra circunferencia cuyo radio valga $\mathbf{r_2 - r_1}$.

2 Desde el centro 01 se trazan las rectas **m** y ***n*** tangentes a la circunferencia anterior, de radio $\mathbf{r_2 - r_1}$ (para ello, con centro en el punto medio ***A*** del segmento $\mathbf{0_1 0_2}$, se dibuja un arco de radio ***AO2*** que corta a la circunferencia en los puntos **B** y **C**, que unidos con **01** nos dan las tangentes **m** y ***n.***

3 Las rectas que unen el punto **O2** con **B** y **C** se cortan con la circunferencia dato en los puntos **D** y ***E*** de tangencia. Los puntos de tangencia con la otra circunferencia se hallan trazando por $\mathbf{0_1}$ las rectas paralelas a $\boldsymbol{0_2 D}$ y a $\boldsymbol{0_2 E}$ hasta cortar a la circunferencia en los puntos **F** y **G**.

4 Las rectas **r** y **s** que unen los puntos de tangencia ***FD*** y ***GE*** son la solución.

Tangentes interiores

(**Número de soluciones: 2**.)

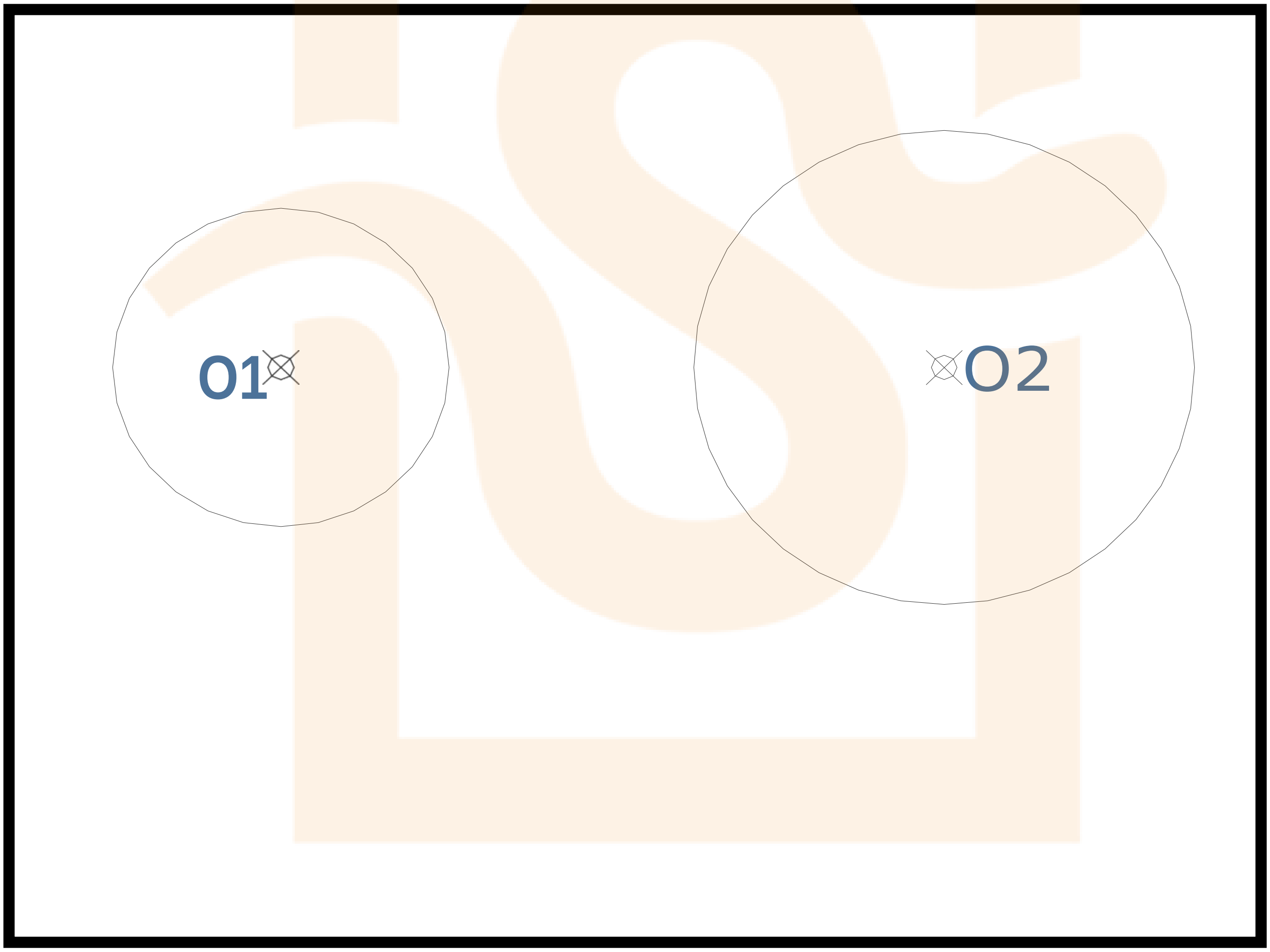
Sean las circunferencias de centro 0_1 y O_2, y radios **r1** y **r2**, respectivamente:

1 Con centro en **O_2**, centro de la circunferencia de mayor radio, se traza otra circunferencia cuyo radio valga **r2 + r1.**

2 Desde el centro **0_1** se trazan las rectas **m** y ***n*** tangentes a la circunferencia anterior, de radio **r2 + r1**; es decir, con centro en el punto medio ***A*** del segmento **$0_1 0_2$**, se dibuja un arco de radio ***AO_2*** que corta a la circunferencia en los puntos **B** y **C**, que unidos con **0_1** nos dan las tangentes **m** y ***n.***

3 Las rectas que unen el punto **O_2** con **B** y **C** se cortan con la circunferencia dado en los puntos **D** y ***E*** de tangencia. Los puntos de tangencia con la otra circunferencia se hallan trazando por **01** las rectas paralelas a ***02D*** y a ***02E,*** trazadas en sentido contrario, hasta cortar a la circunferencia en los puntos **F** y **G**.

4 Las rectas **r** y **s** que unen los puntos de tangencia ***FD*** y ***GE*** son la solución.



TRAZADO DE CIRCUNFERENCIAS CONOCIENDO EL RADIO.

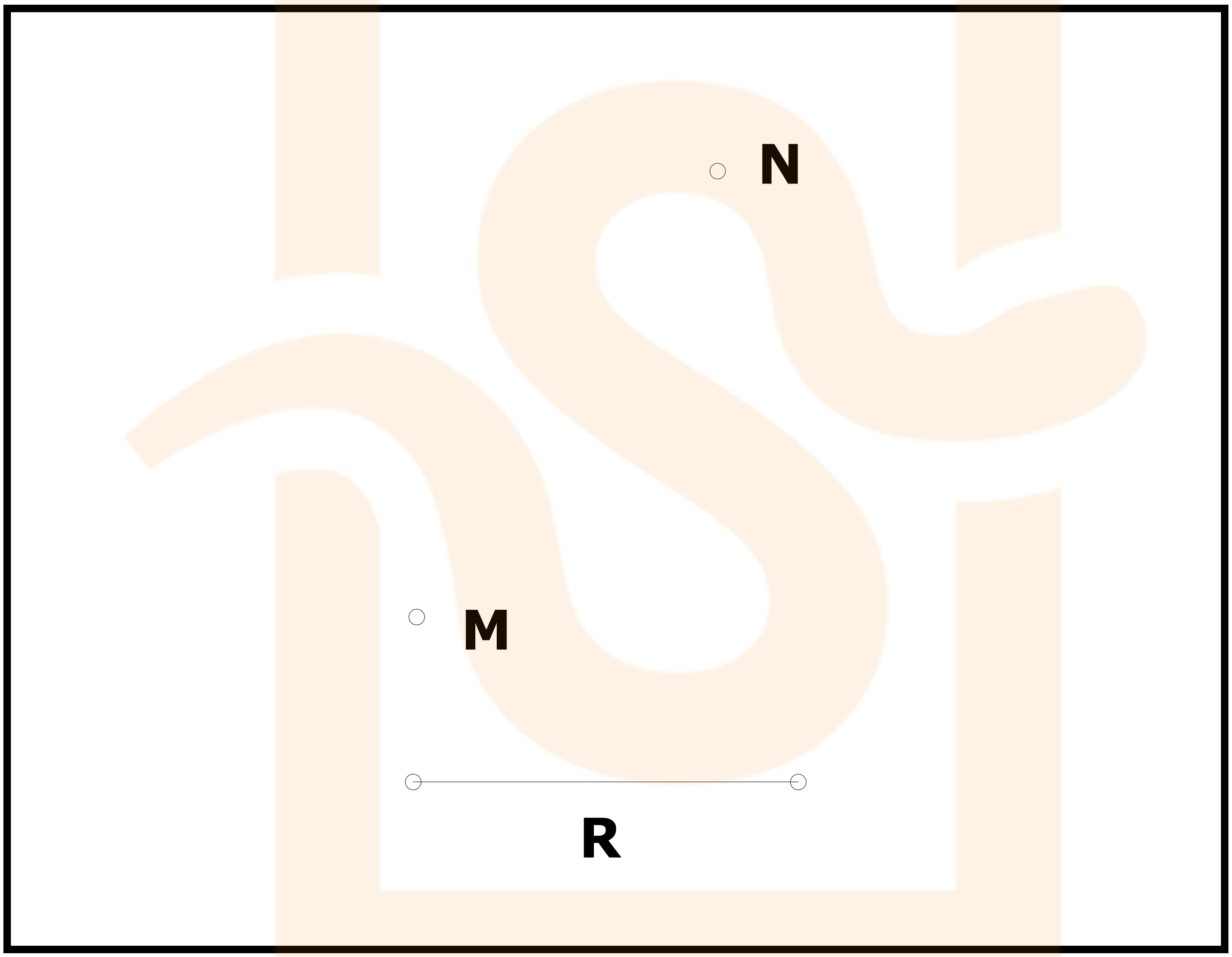
CIRCUNFERENCIAS QUE PASAN POR DOS PUNTOS (Rpp)

Este no es un caso propiamente de tangencias; no obstante, se incluye aquí por seguir una cierta sistematización en el trazado de las mismas.

Dados los puntos ***M*** y ***N,*** Y el radio ***R*** de la circunferencia:

1 Con centro en el punto ***M*** y radio ***R*** se trazan dos arcos de circunferencia.

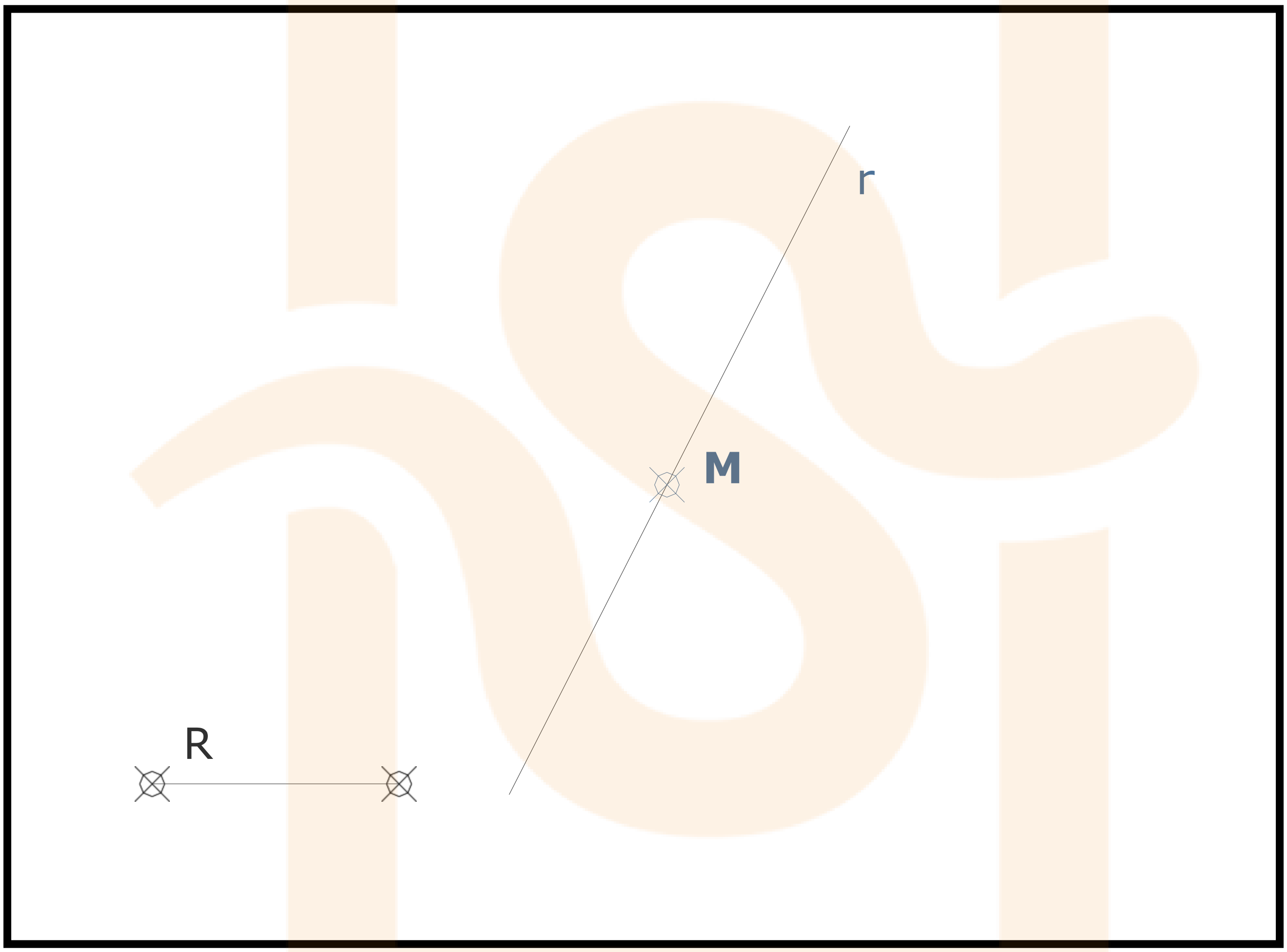
2 Con centro en ***N*** y radio ***R*** se trazan otros dos arcos de circunferencia que se cortan con los anteriores en los puntos **O1**y **O2**, centros de las circunferencias solución.



CIRCUNFERENCIAS QUE PASAN POR UN PUNTO Y SON TANGENTES A UNA RECTA (Rpr)

El punto está en la recta

Sean la recta ***r,*** el punto ***M*** de ella y el radio ***R*** de la circunferencia:
1 Por el punto ***M*** se traza la perpendicular a la recta ***r.***
2 Sobre la perpendicular, y a partir del punto ***M,*** se llevan en ambos sentidos las distancias ***MO1*** y ***M02*** iguales al radio ***R*** dado.
3 Los puntos **O1** y **O2** son los centros de las soluciones y ***M*** el punto de tangencia común.



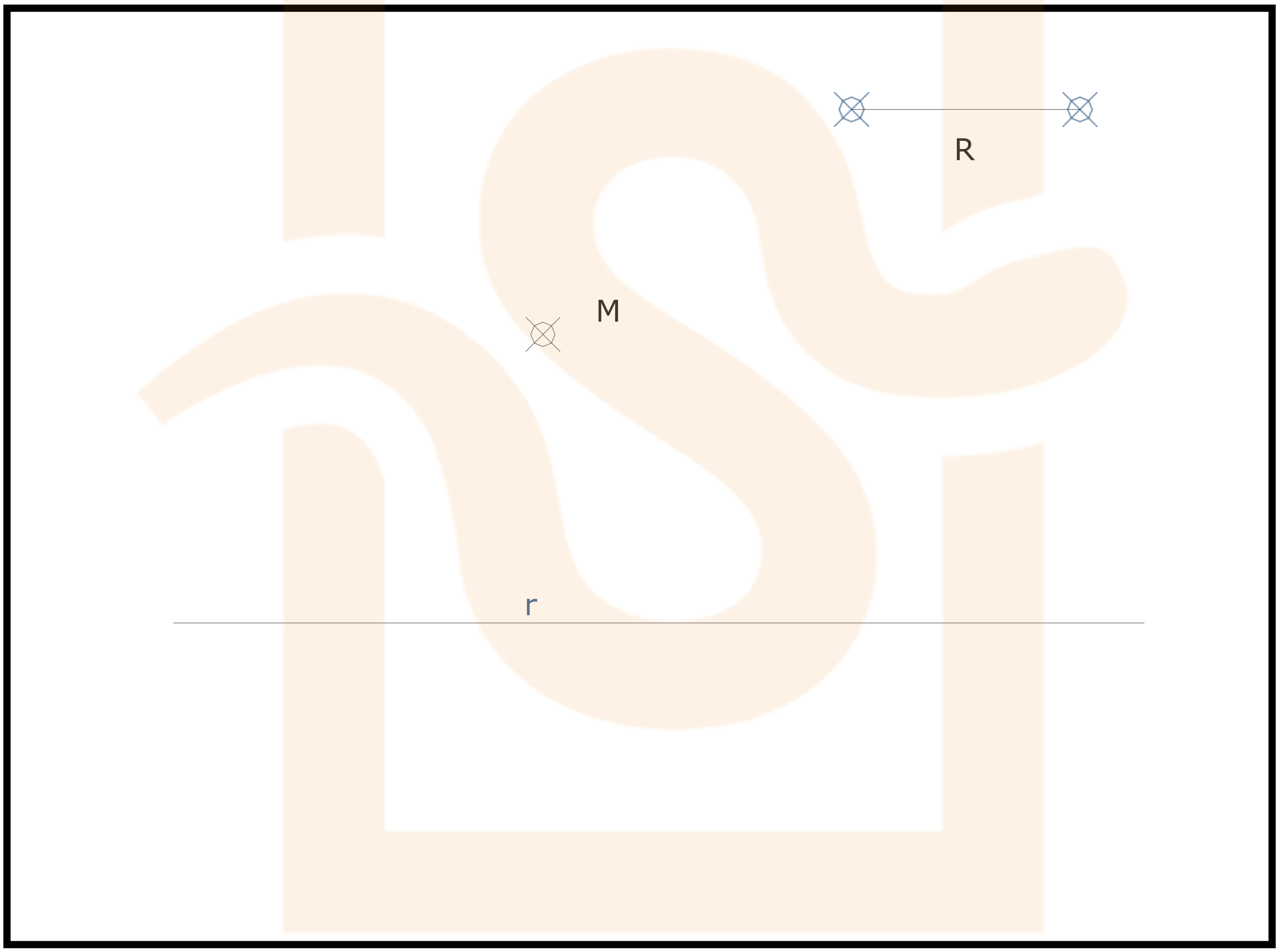
El punto es exterior

Sean la recta ***r,*** el punto ***M*** y el radio ***R*** de la circunferencia:

1 Por un punto ***A*** cualquiera de la recta ***r*** se traza la perpendicular a esta y sobre ella se transporta un segmento ***AB*** igual al radio ***R;*** a continuación, por el punto **B** se traza la recta **m** paralela a ***r.***

2 Con centro en el punto ***M*** y radio ***R*** se trazan dos arcos de circunferencia que cortan a la recta m en los puntos **01** y **O2**, centros de las dos soluciones.

3 Por **01** y **O2** se trazan las perpendiculares a la recta ***r,*** obteniendo los puntos **C** y **D** de tangencia.



CIRCUNFERENCIAS QUE PASAN POR UN PUNTO Y SON TANGENTES A UNA CIRCUNFERENCIA (Rpc)

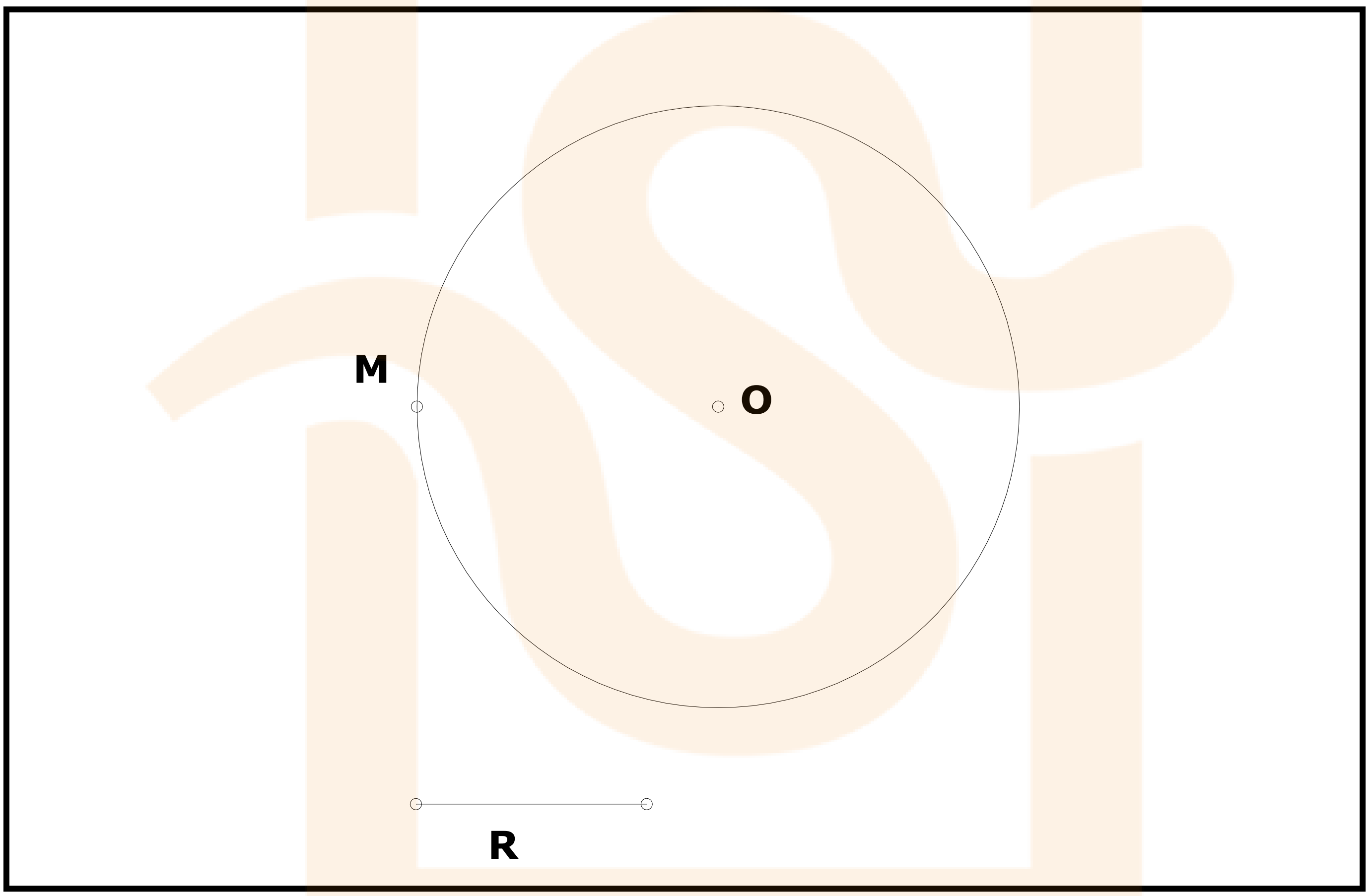
El punto está en la circunferencia

Sean la circunferencia de centro **O**, el punto ***M*** de ella y el radio ***R*** de las soluciones:

1 Se une el centro **O** con el punto ***M.***

2 Sobre la recta anterior y a partir del punto ***M*** se lleva en ambos sentidos las distancias ***MO₁*** y ***M0₂*** iguales al radio ***R*** dado.

3 Los puntos ***01*** y **O2** son los centros de las soluciones y ***M*** el punto de tangencia común.



El punto es exterior

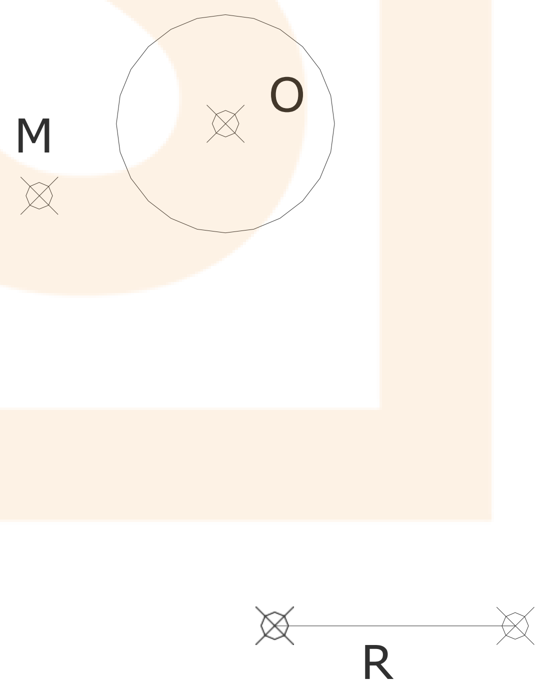
Sean la circunferencia de centro **O**, el punto ***M*** y el radio ***R*** de las circunferencias solución:

1 A partir del centro **O** se traza una recta cualquiera y sobre ella se transporta el segmento ***OA*** = ***R;*** en dicha recta se determinan también los punto B y e de forma que ***AB* = *AC* = *R'*,** siendo ***R'*** el radio de la circunferencia dada de centro **O.**

2 Con centro en **O** y radios **OB = *R* + *R'* y OC = *R* - *R'*** se trazan sendas circunferencias.

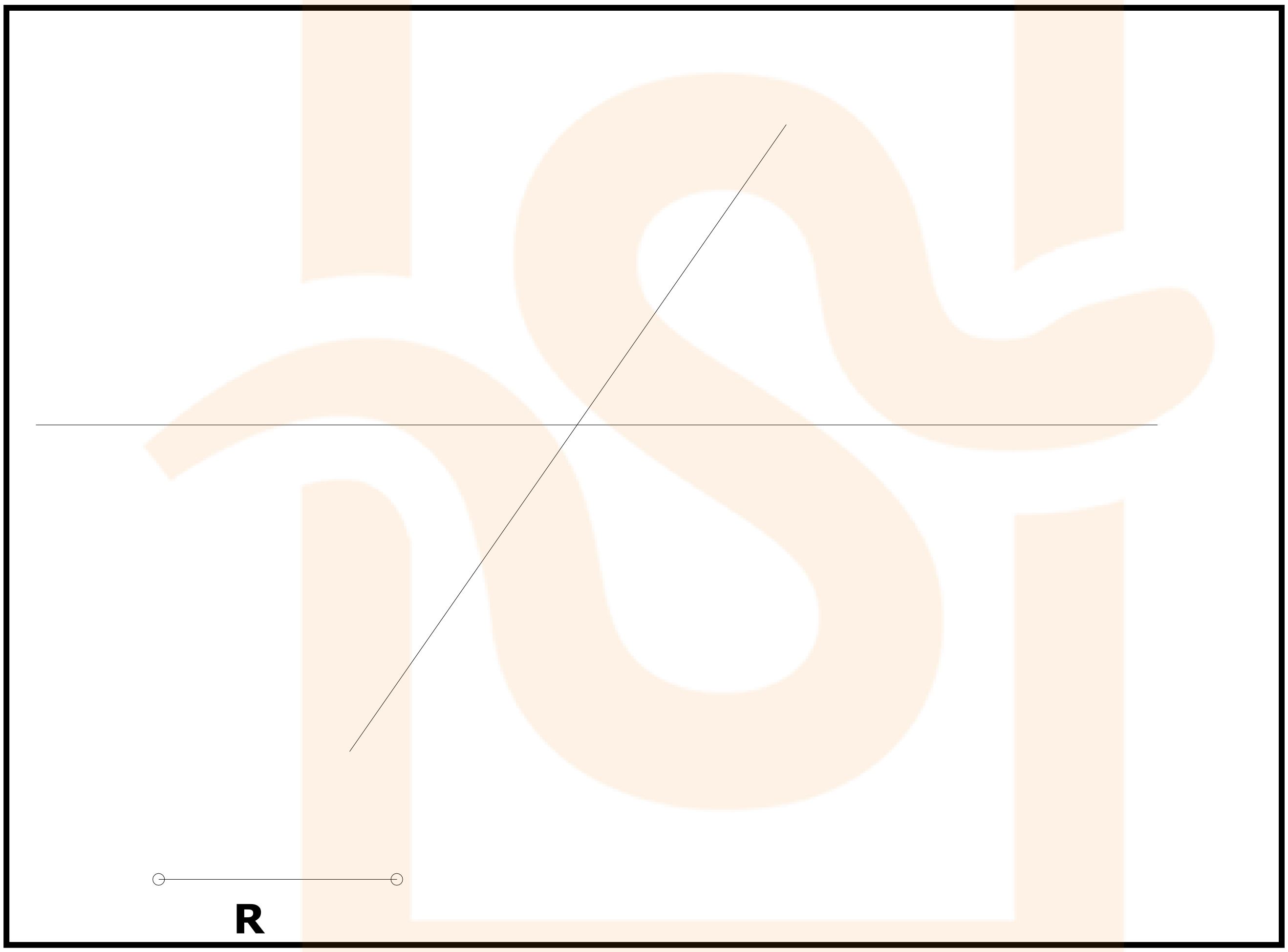
3 Con centro en el punto ***M*** y radio ***R*** se traza la circunferencia que corta a las anteriores en los puntos O1, O2, 03 Y 04, centros de las circunferencias solución.

4 Los puntos de intersección de la circunferencia dada con los segmentos **00_1, 00_2, 00_3 Y 00_4** determinan los puntos **D, *E, F*** *y* **G** de tangencia.



CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A DOS RECTAS QUE SE CORTAN (Rrr)

Sean las rectas ***r*** *y* ***s,*** y el radio ***R***:
1 Se trazan dos rectas **m** y ***n,*** paralelas a ***r,*** a una distancia ***R*** y otras dos rectas ***p*** y ***q,*** paralelas a ***s,*** a una misma distancia ***R.***
2 Donde las cuatro rectas **m,** ***n, p*** y ***q*** se cortan se obtienen los centros **O_1, O_2, 0_3 Y 0_4** de las soluciones.
3 Los puntos de tangencia ***A,*** **B, C,** etc., se hallan trazando por los centros **O_1, O_2, 0_3 Y 0_4** las perpendiculares a las rectas ***r*** y ***s.***



CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A UNA RECTA Y A UNA CIRCUNFERENCIA (Rrc)

La circunferencia y la recta son exteriores.

Dadas la recta ***r,*** la circunferencia de centro **O** y el radio ***R***:

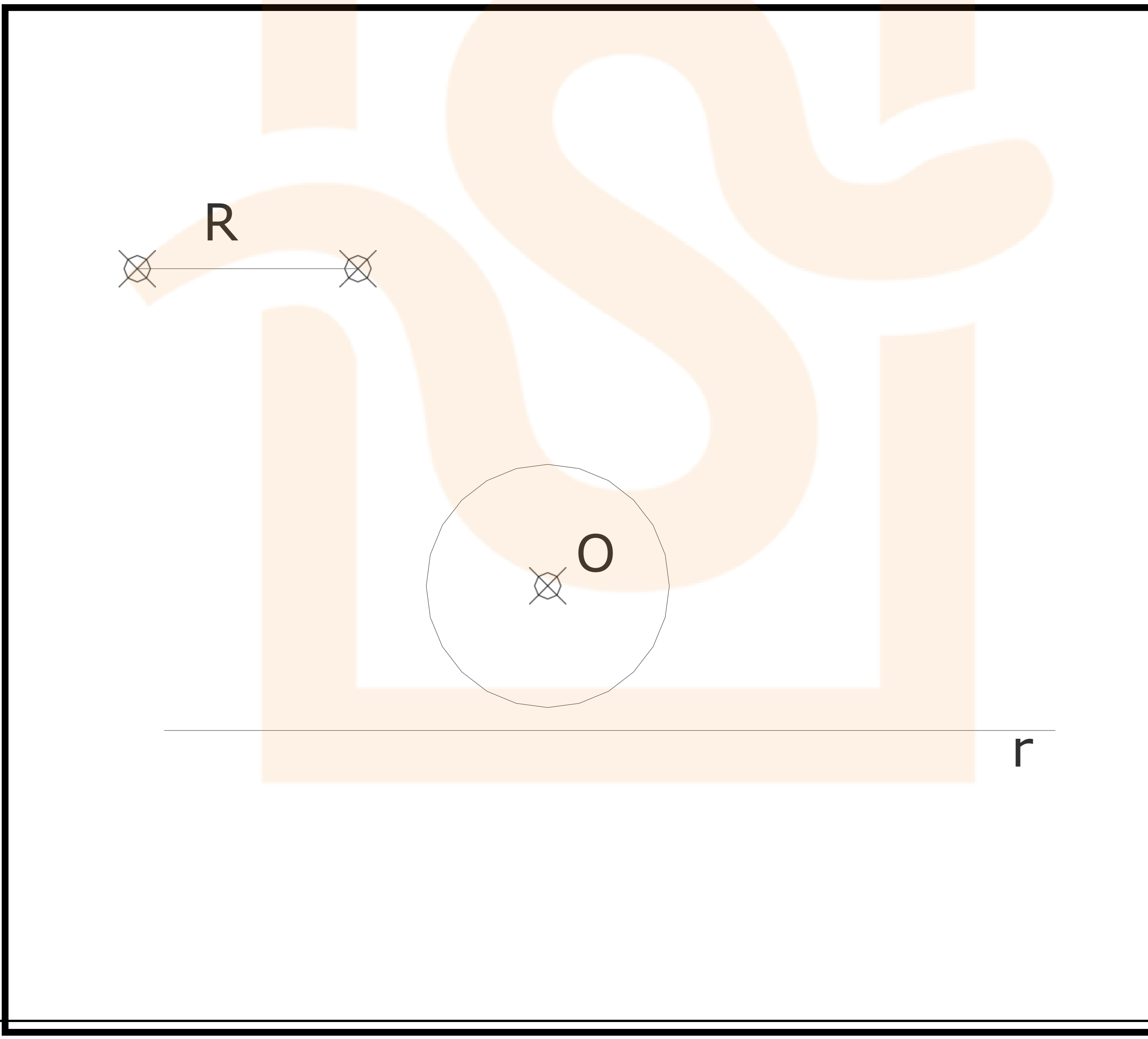
1. A partir del centro **O** se traza una recta cualquiera y sobre ella se transporta el segmento ***OA = R;*** en dicha recta se determinan también los puntos **B** y **C** de forma que ***AB*** = ***AC*** = ***R',*** siendo ***R'*** el radio de la circunferencia dada de centro **O**.

2 Con centro en **O** y radios **0B = *R* + *R'* y OC = *R*** - ***R'*** se trazan sendas circunferencias.

3 Por un punto ***M*** de ***r*** se traza una perpendicular a esta; sobre ella se transporta un segmento ***MN* = *R*** Y por ***N*** se traza una recta ***s*** paralela a ***r.***

4 La recta ***s*** corta a las circunferencias anteriores en los puntos **O1, O2, 03 Y 04,**

5 Los puntos de tangencia ***H,* I, *J*** Y ***K*** con la circunferencia se hallan uniendo los puntos **O1, O2, 03 Y 04** con **O**, y los puntos de tangencia ***D, E, F*** y **G** con la recta ***r,*** trazando las perpendiculares a esta desde los centros anteriores.



La circunferencia y la recta son tangentes

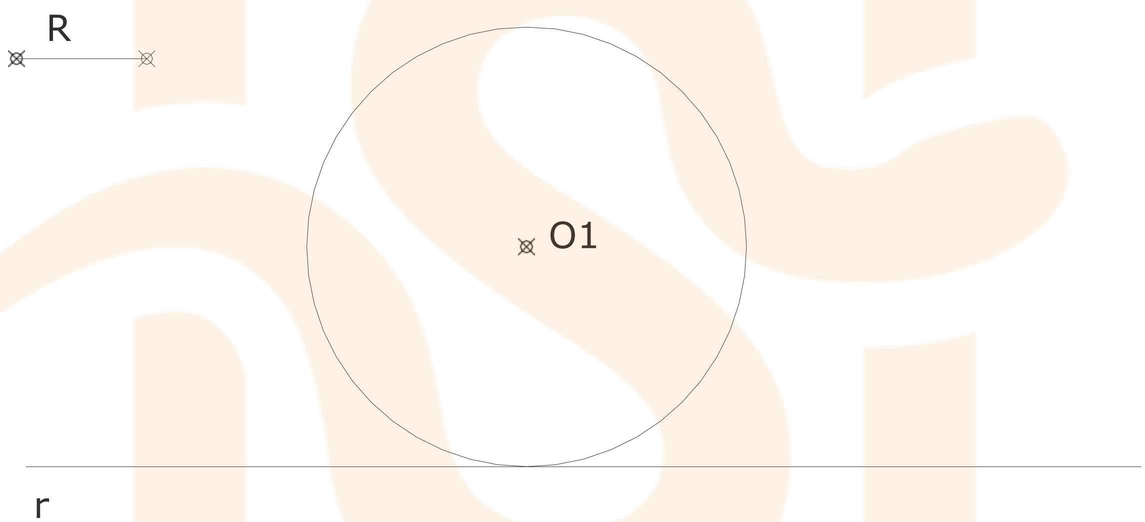
Dadas la recta ***r,*** la circunferencia de centro **O** y el radio ***R***:

1 Con centro en **O** y radios ***OA = R' - R* Y OB = *R' + R*** se trazan dos circunferencias. siendo ***R'*** el radio de la circunferencia dada de centro **O.**

2 Por un punto ***N*** cualquiera de la recta *r* se traza una perpendicular a esta; sobre ella se transportan los segmentos ***NC = ND = R*** y por los puntos **C** y **D** se trazan las rectas paralelas a ***r.***

3 Las rectas paralelas cortan a las circunferencias anteriores (o son tangentes) en los puntos **01, O2. 03 Y 04**. centros de las circunferencias solución.

4 Los puntos de tangencia se determinan como en los casos anteriores.



La circunferencia y la recta son secantes

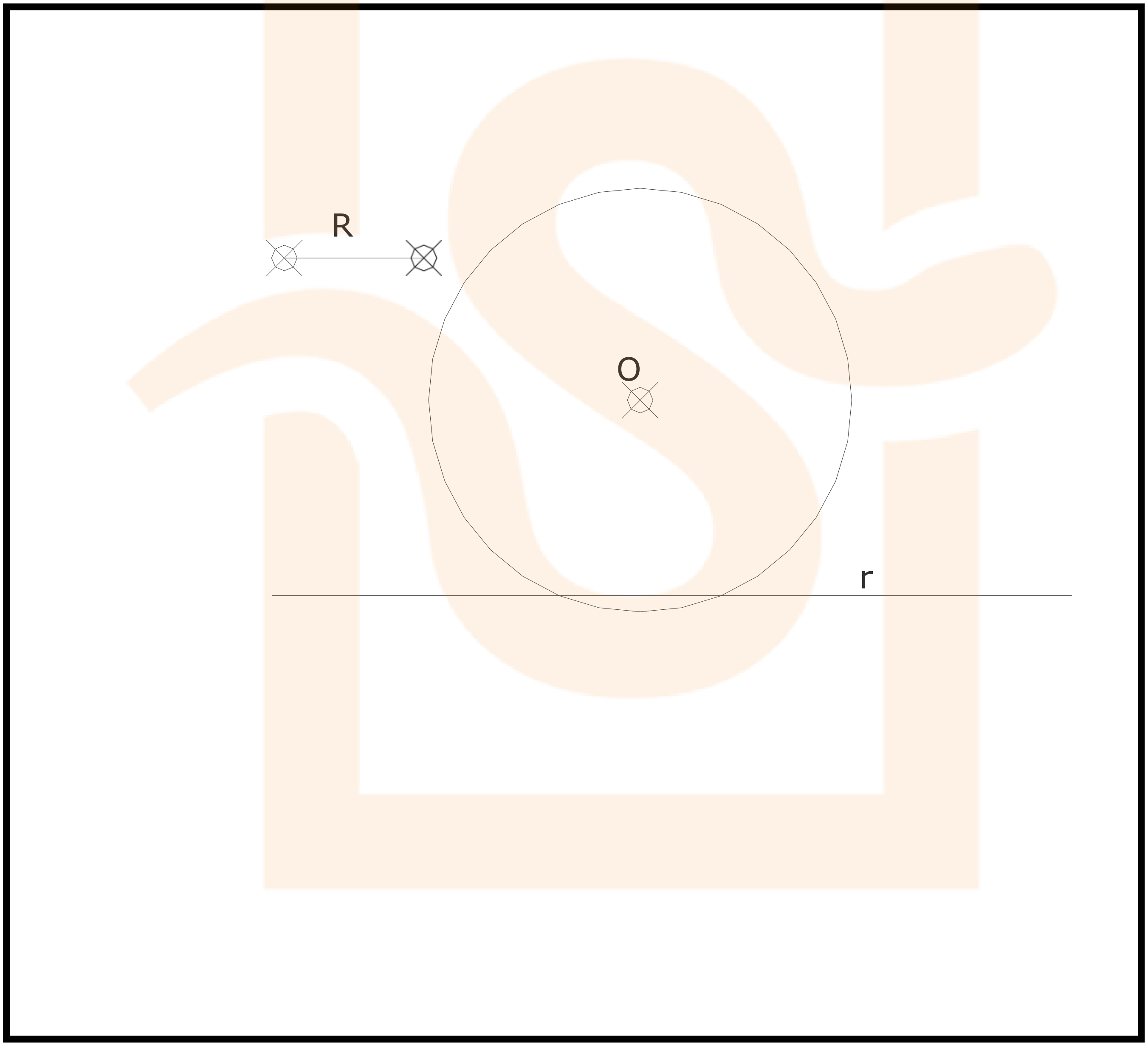
Dadas la recta *r,* la circunferencia de centro **O** y el radio ***R***:

1 Desde el centro **O** se traza un radio ***OA*** arbitrario, llevando a partir del punto ***A,*** y en ambos sentidos, los segmentos ***AB = AG = R .***Y trazando a continuación dos arcos de centro **O** y radios **0B** y **OC**.

2 Por un punto ***O*** cualquiera de la recta ***r*** se traza una perpendicular a esta y sobre ella se transportan los segmentos ***DE = DF = R,*** trazando a continuación por ***E*** y ***F*** las rectas **s** y ***t*** paralelas a ***r.***

3 Los puntos de intersección **01**, **O2**. **03**, **04**. **05** Y **06** de las rectas **s** y ***t*** con los arcos de circunferencia trazados anteriormente son los centros de las circunferencias solución.

4 Los puntos de tangencia se determinan como en casos anteriores.



Las circunferencias son exteriores

Dadas las circunferencias de centros **O' y O"** y el radio ***R***:

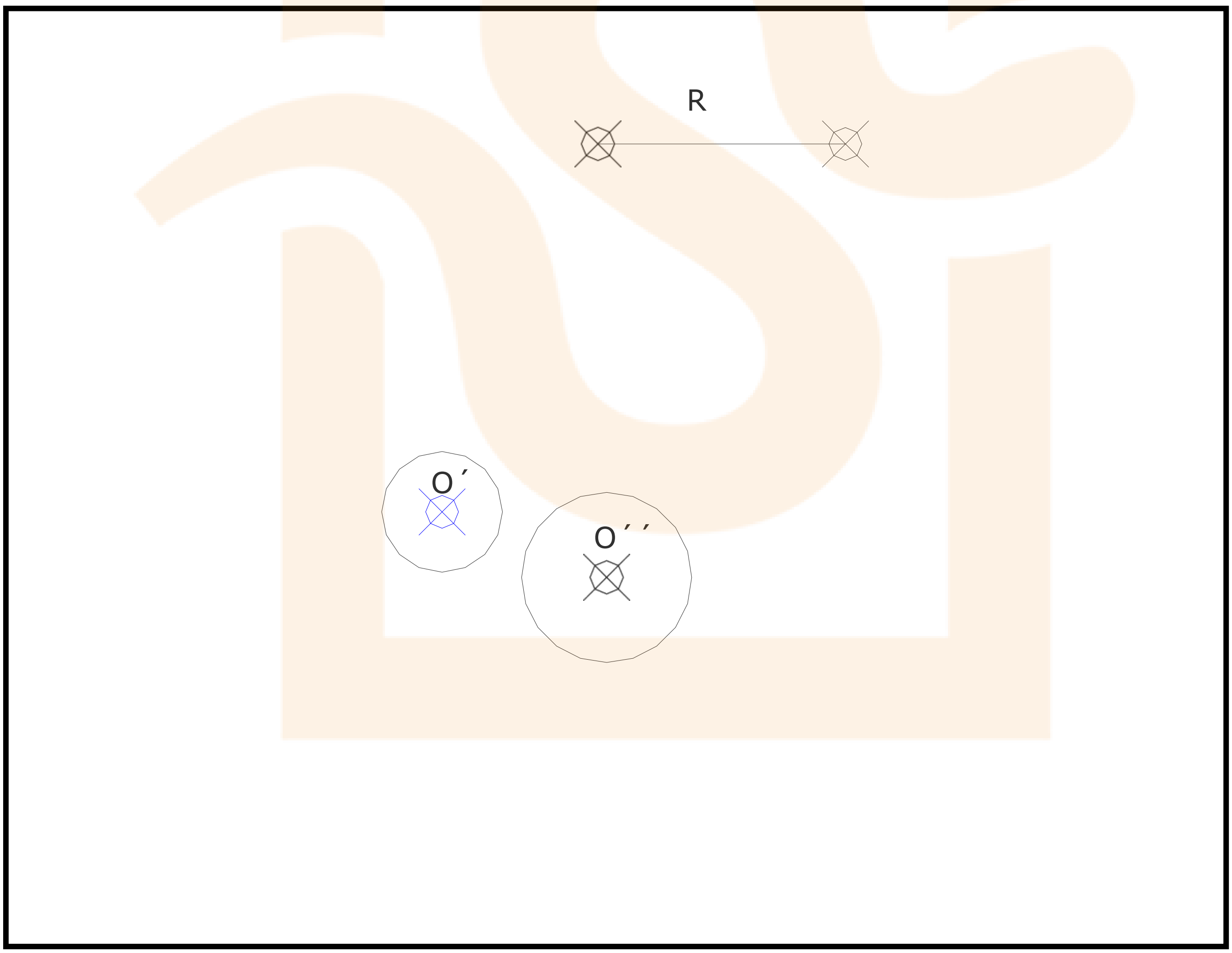
1 A partir del centro **O'** se traza una recta cualquiera y sobre ella se transporta el segmento ***0'D = R****;* en dicha recta se determinan también los puntos **E y *F*** de forma que ***DE* = D*F* = *R'*,** siendo ***R'*** el radio de la circunferencia dada de centro **O'.**

2 Desde **O"** se traza otra recta, llevando sobre ella el segmento ***O"A = R*** y determinando los puntos **B** y **C** de forma que ***AB*** = ***AC*** = ***R",*** siendo ***R"*** el radio de la circunferencia dada de centro **O".**

3 Con centro en **O'** y radios ***O'E = R + R'*** *y* ***O'F = R - R'*** Y con centro en **O"** y radios **0"B = *R + R"*** y ***O"C = R - R"*** se trazan cuatro circunferencias que se cortan en los puntos **O_1, O_2, 0_3, ..., 0_8**, centros de las circunferencias solución.

4 Los puntos de tangencia se determinan al unir los centros de las circunferencias de que se trate.

En la figura se han dibujado solo las circunferencias de centros 01, 03, 05 Y 07 para mayor claridad.



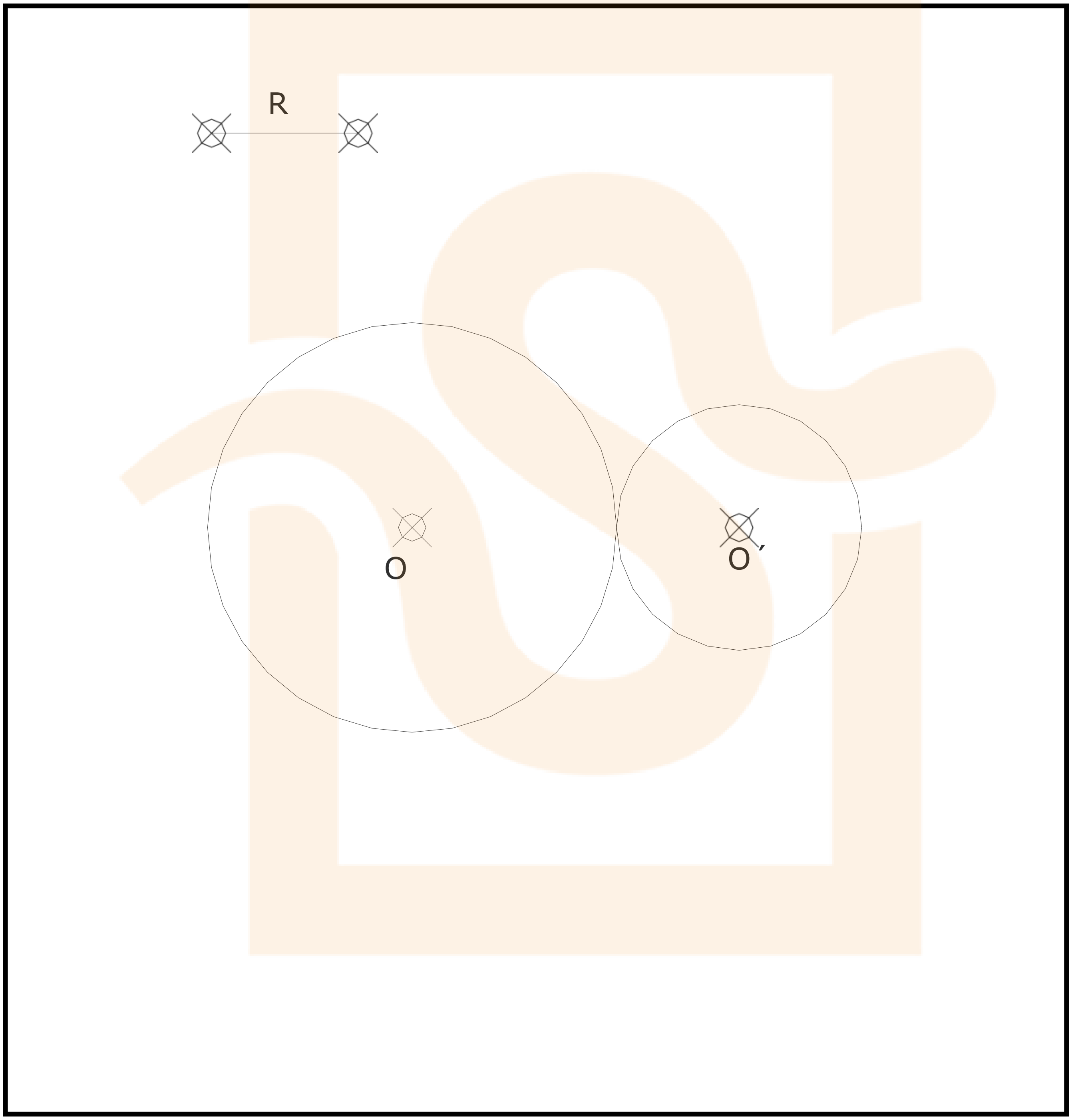
Las circunferencias son tangentes

Dadas las circunferencias de centro **O** y **O'** y el radio ***R***:

1 Con centro en **O** y radio **0B =** ***DA*** **+** ***R*** y con centro en **O'** y radio ***0'D = O'C +*** ***R*** se trazan dos circunferencias.

2 Las dos circunferencias anteriores se cortan entre sí en los puntos **01** y **O2** que, junto con los puntos **03** y **04** de intersección con la recta **OO'**, determinan los centros de las soluciones.

3 Los puntos de tangencia se determinan como en casos anteriores.



Las circunferencias son secantes

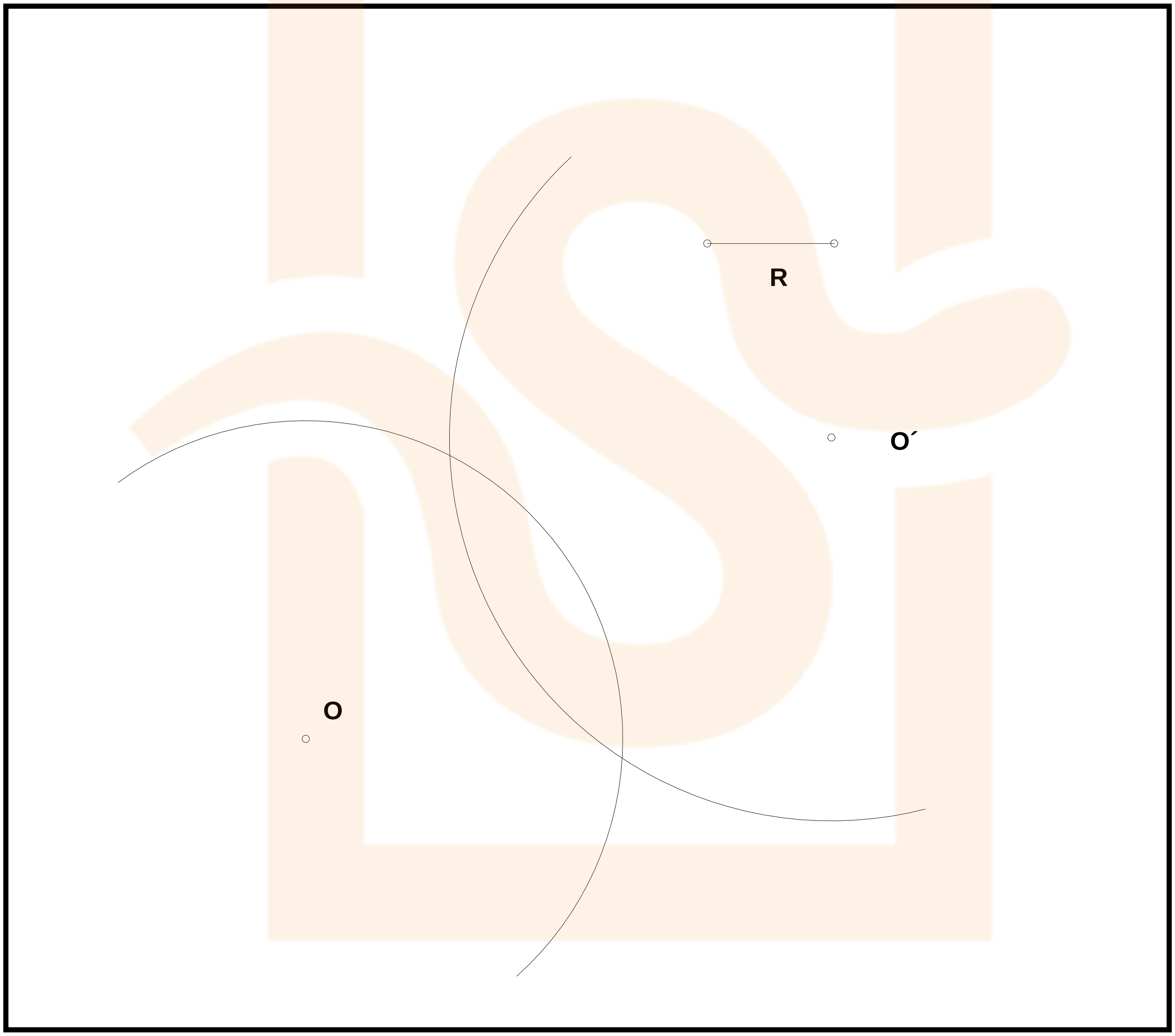
Dadas las circunferencias de centro **O** y **O'** Y el radio ***R***:

1 Con centro en **O** y radios **0B = *DA* + *R*** y **OC = *DA*** – ***R*** se trazan dos circunferencias.

2 Con centro en **O'** y radios **O*E* = 0D + *R*** y ***OF*** = **0D** – ***R*** se dibujan otras dos circunferencias.

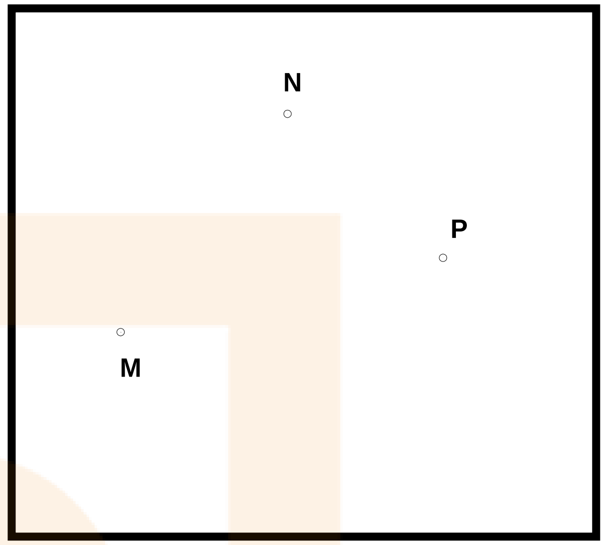
3 Las circunferencias anteriores se cortan en los puntos **01, O2,** ..., **06**, centros de las soluciones.

4 Los puntos de tangencia se determinan, como en casos anteriores, uniendo centros.



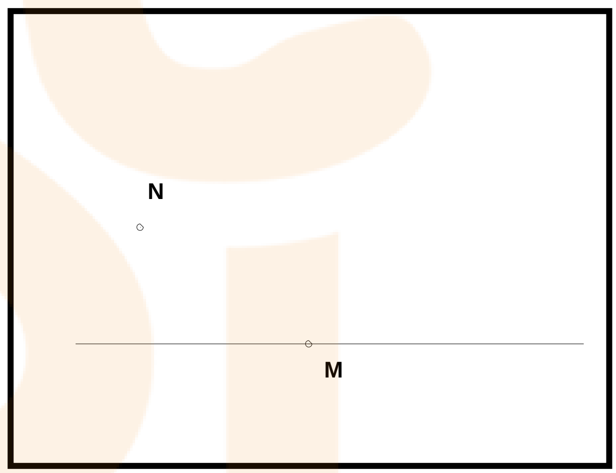
CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A DOS CIRCUNFERENCIAS

1. Se halla la mediatriz del segmento MN
2. Se halla la mediatriz del segmento NP
3. El punto O es el centro de la circunferencia



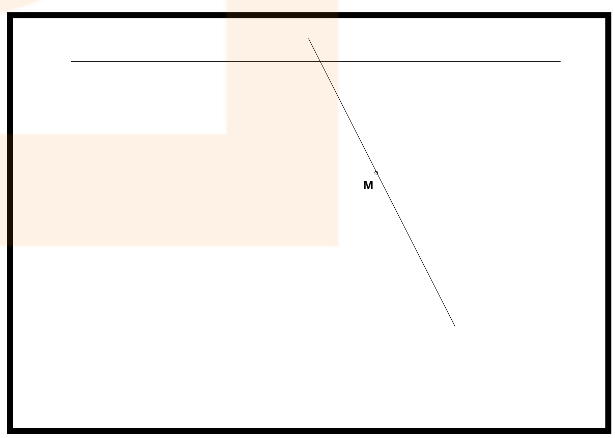
CIRCUNFERENCIA QUE PASA POR UN PUNTO Y ES TANGENTE A UNA RECTA POR UN PUNTO (ppr)

1. Por M se traza la perpendicular a la recta
2. Se traza la mediatriz del segmento MN
3. El punto O es el centro de la circunferencia



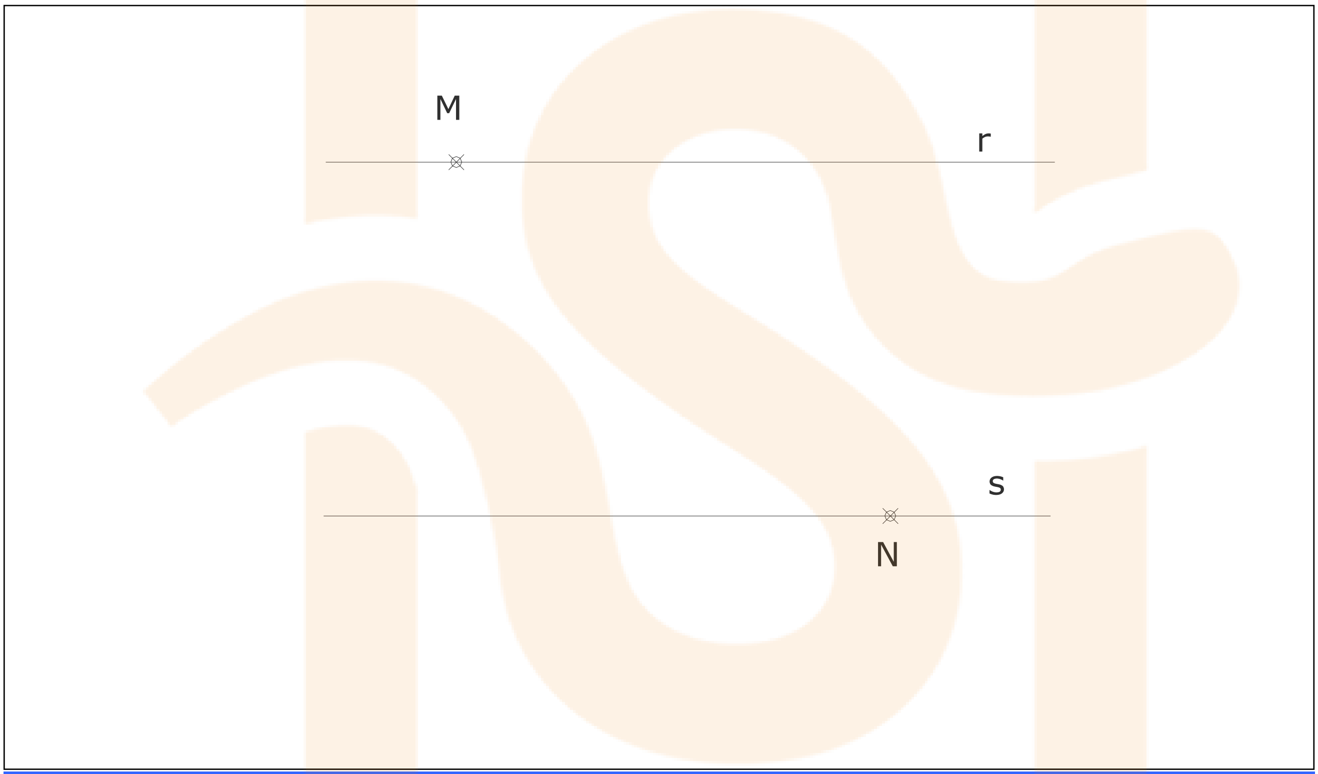
CIRCUNFERENCIA TANGENTE A DOS RECTAS CONOCIENDO UN PUNTO DE TANGENCIA (prr)

1. Por M se traza la perpendicular m a la recta s
2. Se trazan las bisectrices a y b del ángulo que forman las rectas r y s
3. Los puntos O_1 y O_2 son los centros de las circunferencias



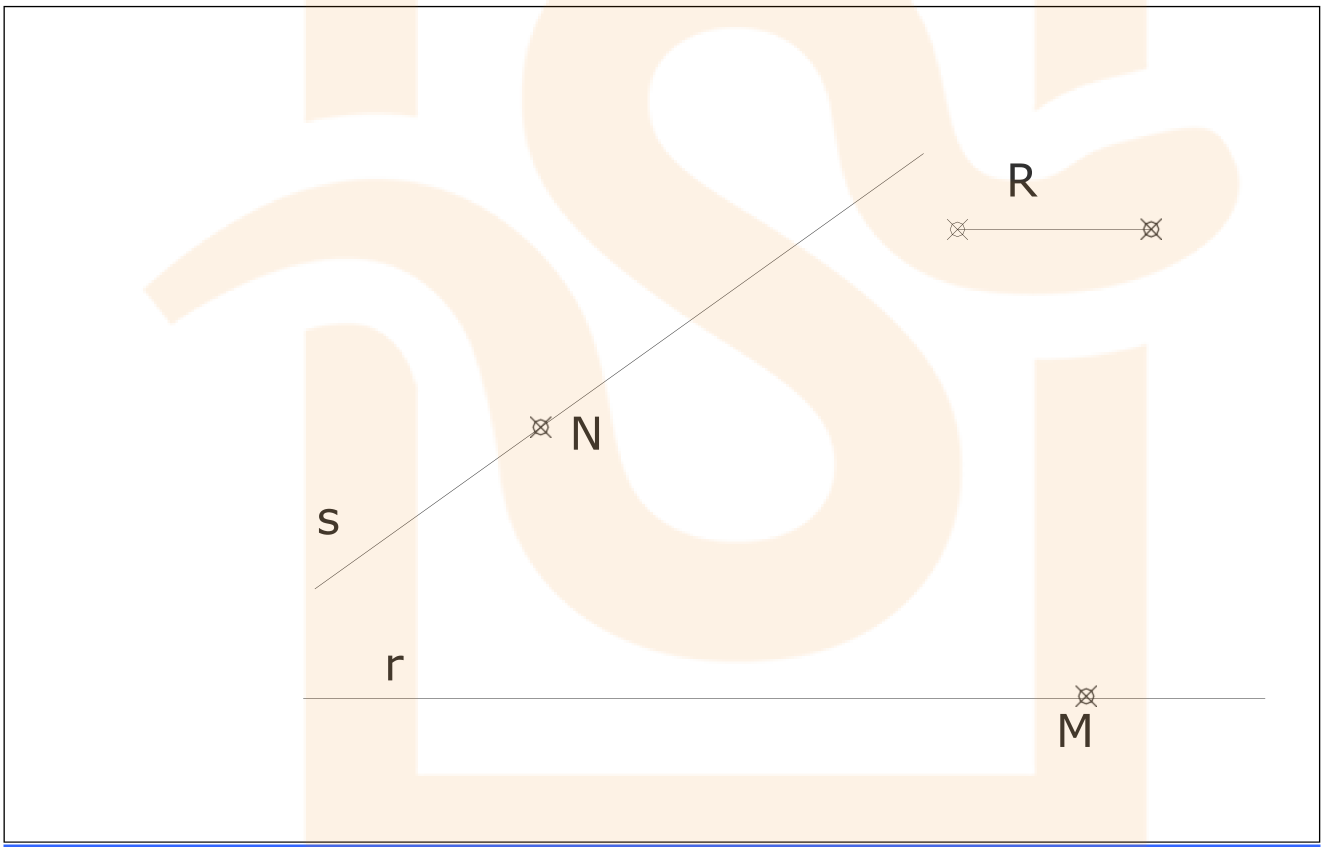
ENLAZAR DOS RECTAS PARALELAS MEDIANTE DOS ARCOS DE IGUAL RADIO, CONOCIENDO LOS PUNTOS DE TANGENCIA

Dadas las rectas ***r*** y **s**, y los puntos ***M*** y ***N***:
1 Los centros de los arcos estarán en las perpendiculares trazadas por los puntos ***M*** y ***N*** a las
rectas ***r*** y **s**.
2 Se halla el punto medio ***A*** del segmento ***MN.***
3 Se trazan las mediatrices de los segmentos ***AM*** y ***AN.***
4 Donde las mediatrices se cortan con las perpendiculares trazadas por ***M*** y ***N*** están los puntos **O1** y **O2**, centros de los arcos solución, que son tangentes entre sí en el punto ***A.***



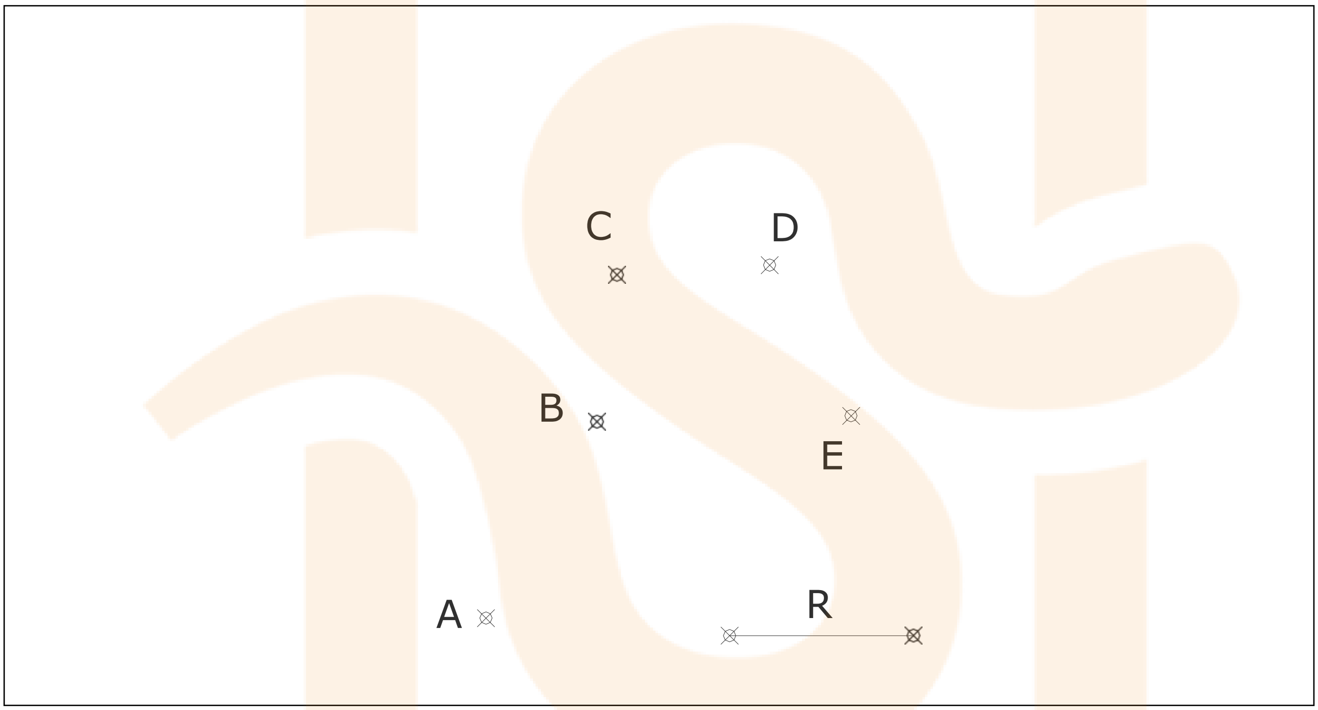
ENLAZAR DOS RECTAS CUALESQUIERA POR MEDIO DE DOS ARCOS, CONOCIENDO EL RADIO DE UNO DE ELLOS Y LOS PUNTOS DE TANGENCIA

Dadas las rectas ***r*** y **s**, los puntos de tangencia ***M*** y ***N,*** y el radio ***R***:
1 Por los puntos ***M*** y ***N*** se trazan perpendiculares a las rectas ***r*** y **s,** respectivamente.
2 Sobre la perpendicular a ***r*** se traslada, hacia el interior del ángulo, el segmento ***MO₁*** = ***R,*** y sobre la perpendicular a **s**, hacia el exterior, el segmento ***NA = R.*** **O_1** es el centro de uno de los arcos.
3 La mediatriz del segmento ***O_1A*** corta a la perpendicular a s en el punto **O_2**, centro del segundo arco. El punto **B** de tangencia entre las dos circunferencias está en la recta **O_1O_2,**



ENLAZAR VARIOS PUNTOS NO ALINEADOS, MEDIANTE ARCOS DE CIRCUNFERENCIA, CONOCIENDO EL RADIO DE UNO DE LOS ARCOS

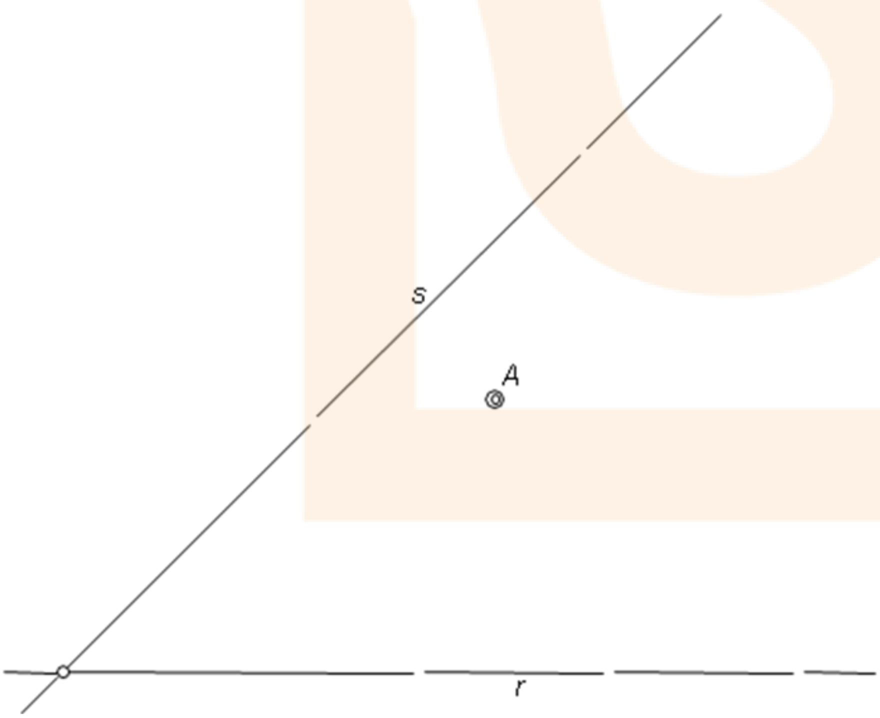
Dados los puntos ***A*, B, C, *D*, *E*,** etc., y el radio ***R*** del arco ***AB***:
1 Se unen los puntos ***A*** y **B**, trazando a continuación la mediatriz del segmento; con centro en el punto ***A*** y radio ***R*** se traza un arco que corta a la mediatriz en el punto **O_1**. Con centro en el punto **O_1** se traza el arco ***AB.***
2 Se unen los puntos **B** y **C**, trazando la mediatriz del segmento, que corta a la recta **0_1B** en el punto **O_2**, Con centro en el punto **O_2** se traza el arco ***BC,*** que es tangente al anterior en **B**.
3 Se unen los puntos **C** y ***D,*** trazando la mediatriz del segmento, que corta a la recta ***0_1C*** en el punto **0_3**, Con centro en **0_3** se traza el arco ***CD,*** que es tangente al anterior en **C**, y así sucesivamente.



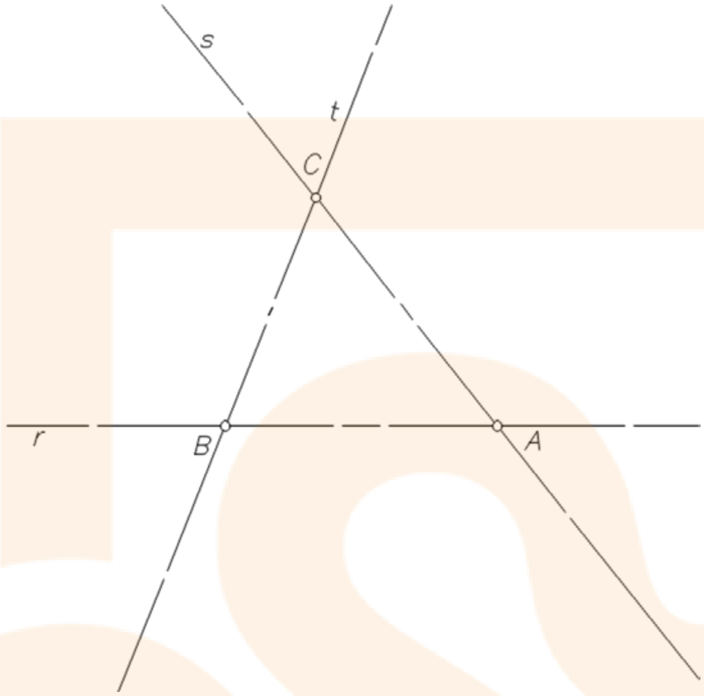
anexo:

Circunferencias que pasan por dos puntos y son tangente a una recta (ppr)

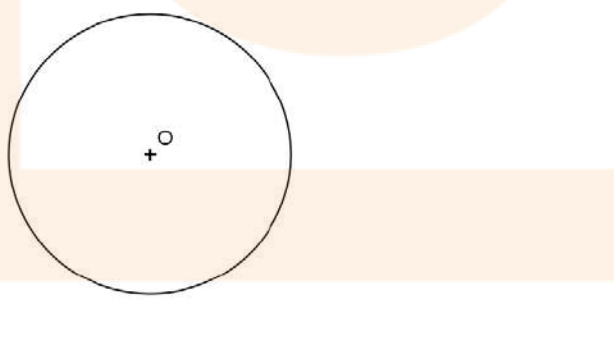
Circunferencias que pasan por un punto tangentes a dos rectas (prr)



Circunferencias tangentes a tres rectas (rrr)



Circunferencia tangentes a una recta y a una circunferencia conociendo un punto de tangencia (prc)

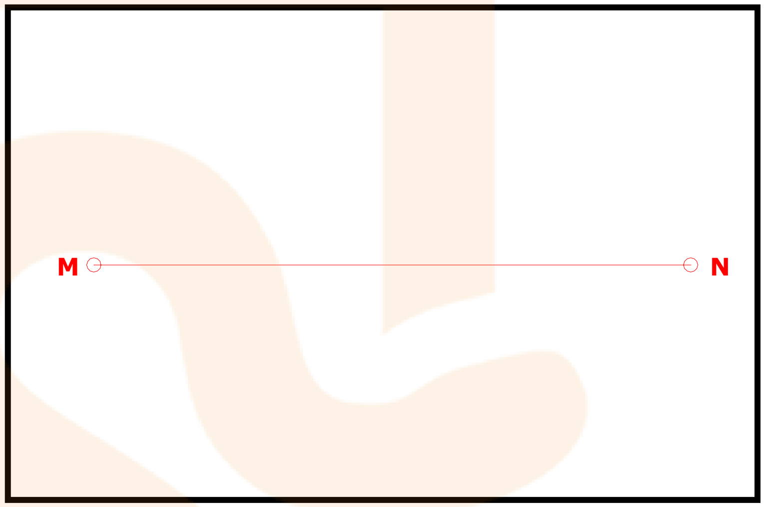


CURVAS TÉCNICAS

El óvalo es una curva cerrada, plana y convexa formada generalmente por cuatro arcos de circunferencia iguales dos a dos; tiene dos *ejes* de simetría perpendiculares entre sí. La aplicación práctica más importante en dibujo técnico está en el trazado de perspectivas, pues suelen sustituirse, de forma aproximada, las elipses por óvalos.

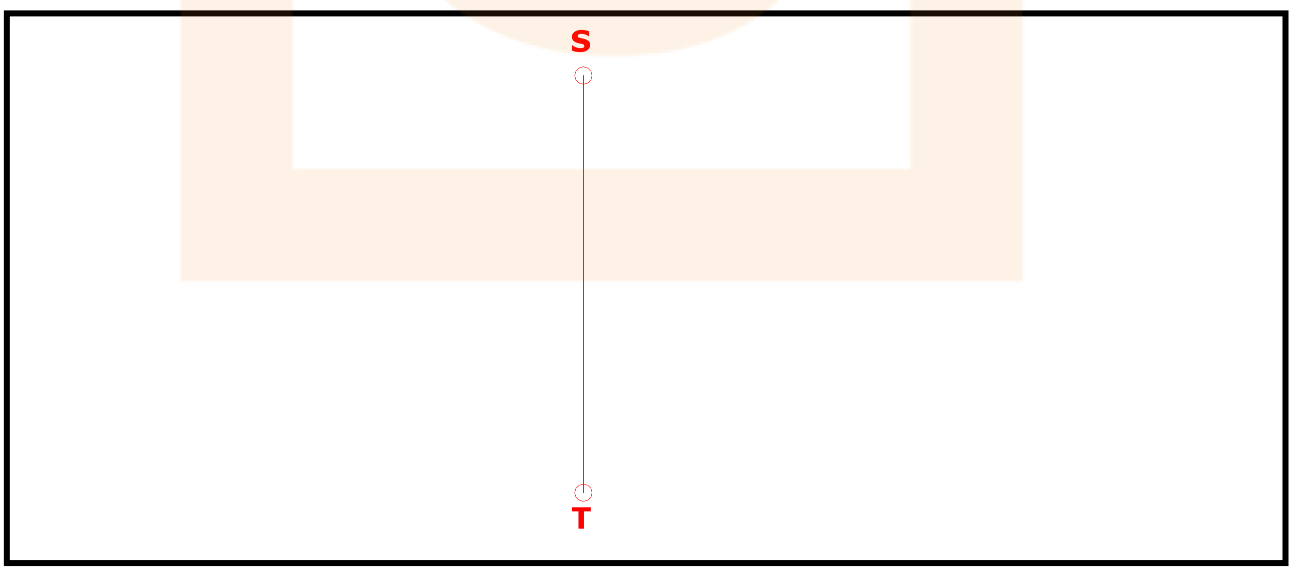
CONSTRUCCIÓN DE UN ÓVALO CONOCIENDO EL EJE MAYOR

Sea ***MN*** el eje mayor del óvalo (Fig. 1):
1 Se divide el segmento *MN* en tres partes iguales
obteniendo los puntos O1 y O2.
2 Con centros en O1 y O2se trazan las circunferencias
de radios *O1M* y *02N,* respectivamente.
3 Los puntos de intersección de estas dos
circunferencias, 03 y 04, son los centros de los otros
dos arcos del óvalo.



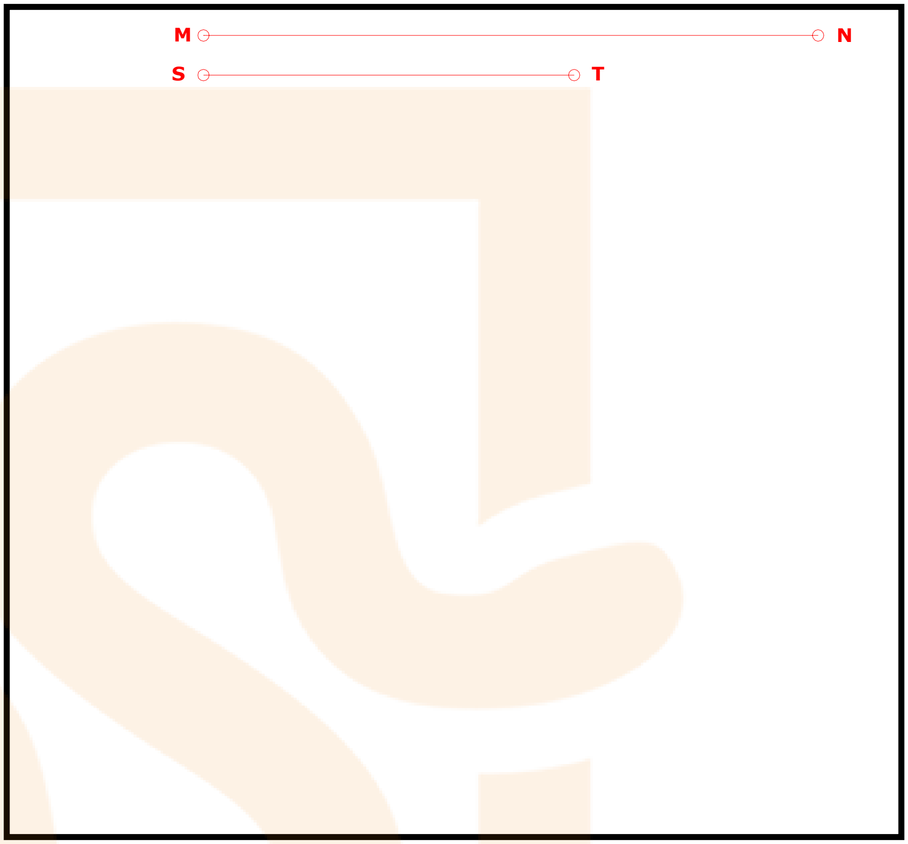
CONSTRUCCIÓN DE UN ÓVALO CONOCIENDO EL EJE MENOR

Sea ***ST*** el eje menor del óvalo (Fig. 2).
1 Se dibuja una circunferencia de diámetro *ST y* se trazan los diámetros perpendiculares m y *n.*
2 Con centro en los puntos O1, O2, 03 Y 04 se trazan los cuatro arcos que forman el óvalo.



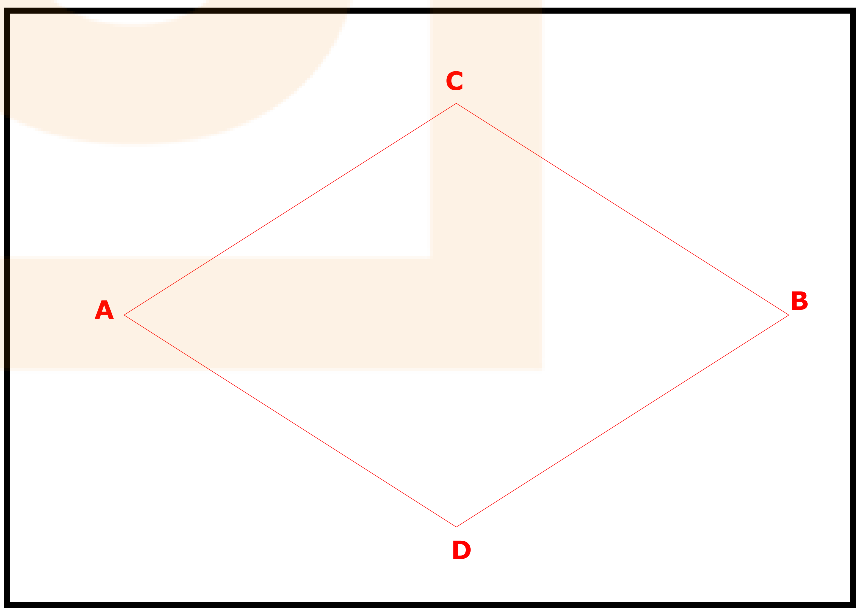
CONSTRUCCIÓN DE UN ÓVALO DE CUATRO CENTROS CONOCIENDO LOS DOS EJES PERPENDICULARES

Sean ***MN*** y ***ST*** los ejes:
1 Se dibujan *MN* y *ST* cortándose en su punto medio O.
2 Con centro en O y radio el semieje mayor OM se traza
un arco hasta cortar al otro eje en O.
3 Concentro en *S* y radio *SO* se traza otro arco que corta a la recta *MS* en *R.*
4 Se traza la mediatriz del segmento *MR,* que corta a los ejes en los puntos O]y O2,
5 Los puntos O]y O2,junto con los puntos 03 y 04, simétricos de los anteriores respecto del centro O,
son los centros de los arcos del óvalo.



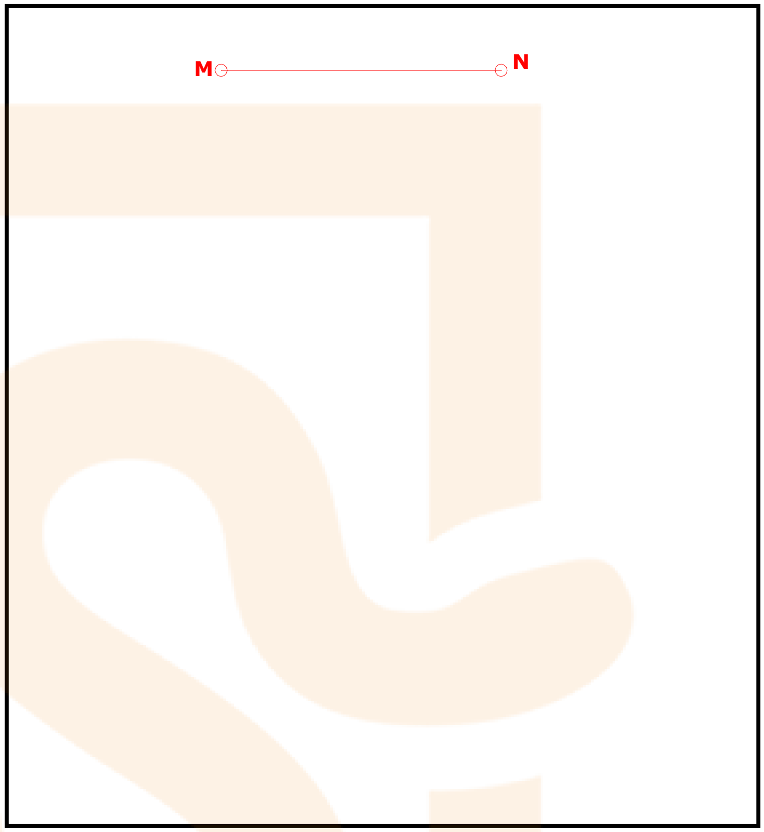
CONSTRUCCIÓN DE UN ÓVALO INSCRITO EN UN ROMBO DADO

Sea el rombo ***ADBC***
1 Por el punto C se trazan las rectas perpendiculares a los lados *AD* y *De.*
2 Por el punto Ose trazan las rectas perpendiculares a los lados *AC* y *CS.* I
3 Los puntos O1 y O2,de intersección de las rectas trazadas, son los centros de los arcos pequeños *NO* y *MP,* Y los puntos C y O son los centros 03 y 04 de los arcos grandes *MN* y *PO* que completan el óvalo.



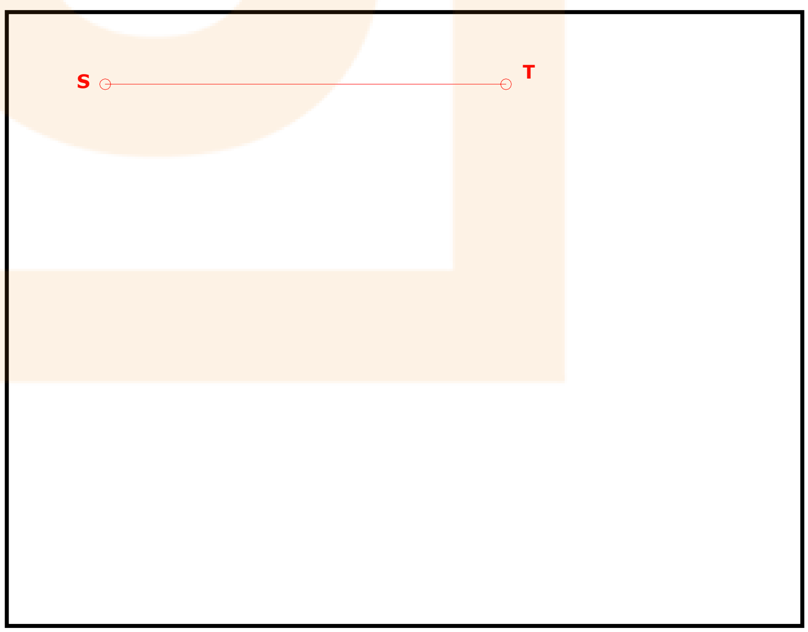
CONSTRUCCIÓN DE UN OVOIDE CONOCIENDO SU EJE MAYOR

Sea *MN* el eje del ovoide(Fig. 6):
1 Se divide el eje *MN* en seis partes iguales, numerándolas llamando 03 al punto número 2 y 04 al punto número 5.
2 Por 03se traza la perpendicular la recta *MN.*
3 Concentro en 03 y radio 03M se describe una semicircunferencia hasta cortar a la perpendicular.
4 Concentro en 03 y radio *03N* se describe otra semicircunferencia que corta a la perpendicular trazada por 03 en los puntos 01y O2,
5 Los puntos 01, 02, 03 Y 04 son los centros para construir el ovoide.



CONSTRUCCIÓN DE UN ,OVOIDE CONOCIENDO SU DIÁMETRO O EJE MENOR

Sea *ST* el diámetro del ovoide:
1 Con diámetro *ST* se traza una circunferencia cuyo centro es el punto 01,
2 Se dibuja la recta perpendicular a *ST,* que corta a la circunferencia en el punto O2,
3 Llamando 03 y o4 a los puntos *S* y *T,* los puntos O1, O2, 03 y 04 son los centros de los cuatro arcos del ovoide.
Espirales



CONSTRUCCIÓN DE LA ESPIRAL DE ARQUÍMEDES CONOCIENDO EL PASO

La *espiral* es una línea curva que da vueltas alrededor de un punto alejándose de él gradualmente. Se denomina ***paso*** a la distancia radial que existe entre dos vueltas o espiras consecutivas.

Sea *OM* el paso de la espiral (Fig. 9):

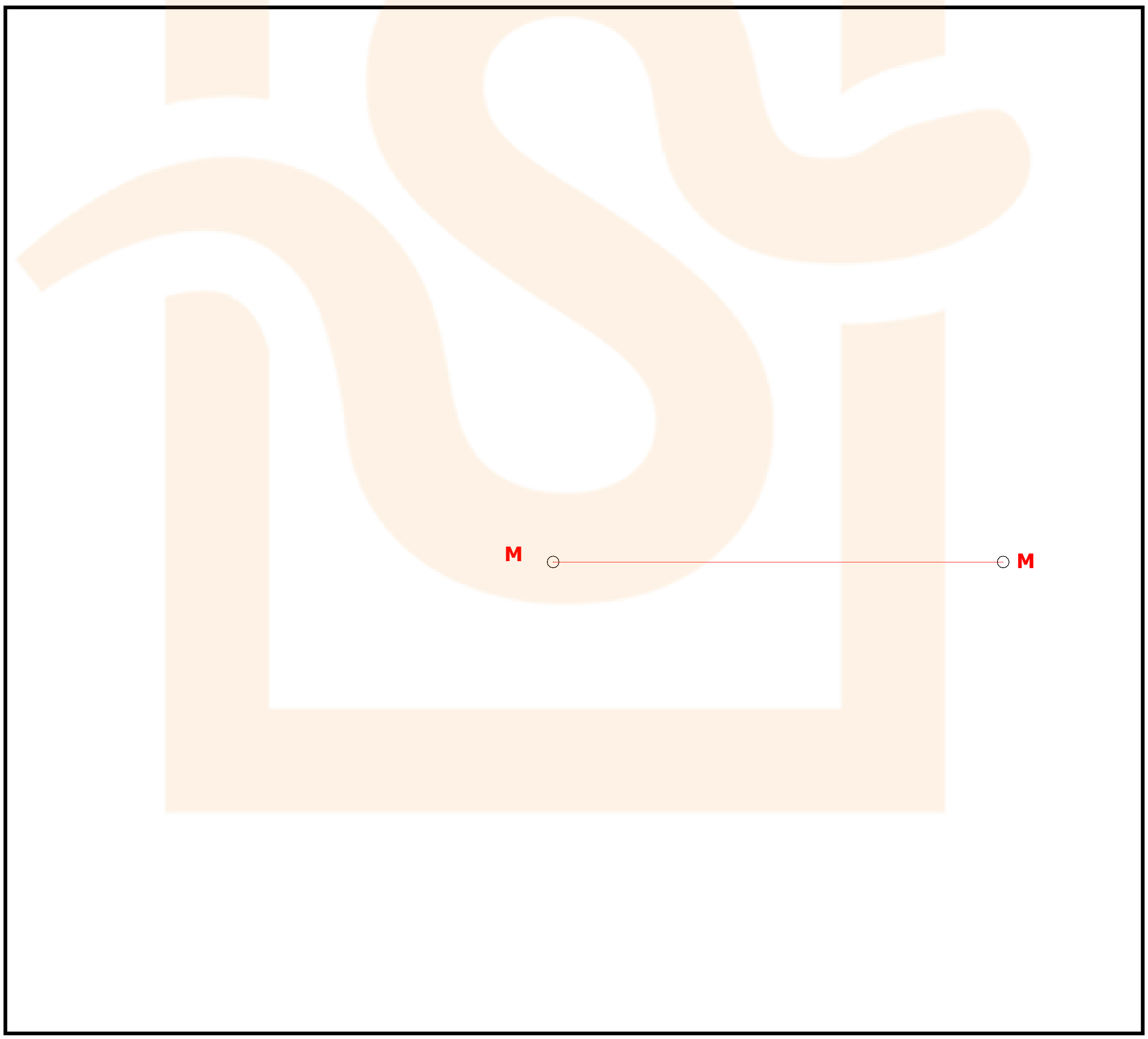
1 Se dibuja la circunferencia con centro en el punto O y radio *OM.*

2 Se divide esta circunferencia en un número de partes iguales, por ejemplo en 16, numerando cada uno de estos puntos 1', 2', 3', ...

3 Se divide el segmento *OM* en el mismo número de partes iguales en que se haya dividido la circunferencia, es decir 16, numerando a partir del centro todos los puntos 1, 2, 3, ...

4 Se trazan las circunferencias concéntricas con centro en el punto O y radios *01,* 02, 03, ...

5 Los puntos de intersección de estas circunferencias con los radios*01',* 02', 03', ...nos dan los puntos *A,* B, C, ... que, unidos a mano alzada o con plantilla, definen la espiral.



CONSTRUCCIÓN DE UNA VOLUTA DE VARIOS CENTROS CONOCIENDO EL PASO

La *voluta* es una curva formada por arcos de circunferencia tangentes entre sí, cuyos centros son los vértices de un polígono. .

Como ejemplo vamos a construir la voluta de cuatro centros. Sea *p* el paso de la voluta (Fig. 10):

1 El segmento *A8* = *p* se divide en tantas partes como centros tenga la voluta; en nuestro caso lo dividimos en cuatro partes.

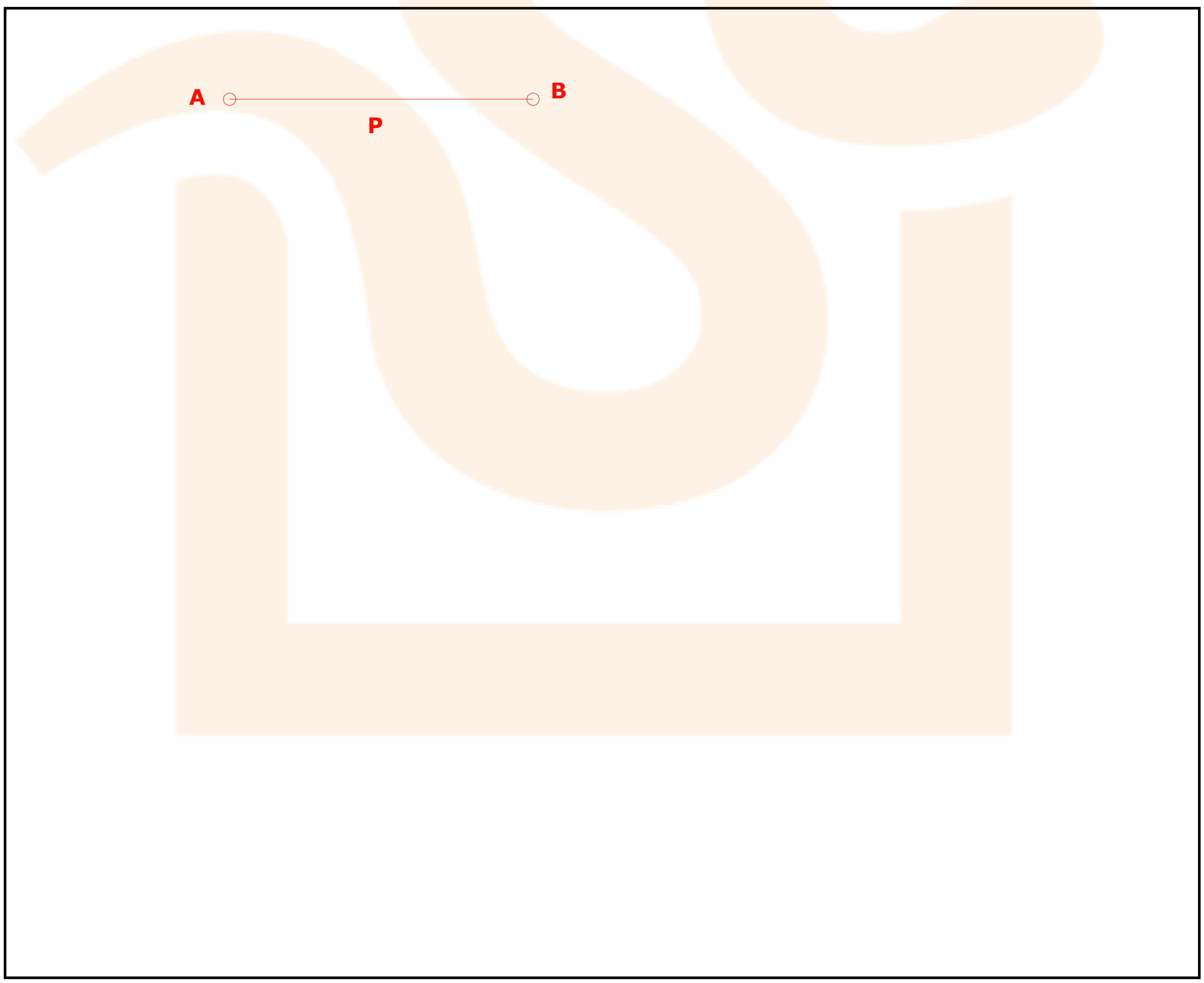
2 Se construye un polígono regular cuyo lado mida lo mismo que una de las divisiones anteriores; en nuestro caso construiremos un cuadrado *MNPQ* de lado / = *p/4.* A continuación prolongamos los lados del polígono.

3 Con centro en un vértice cualquiera, por ejemplo en *M,* y radio *MQ* = *p/4* se traza un arco hasta cortar a la prolongación de uno de los lados en *R.*

4 Con centro en el vértice *N* y extremo en el punto *R* del arco anterior, se traza el arco *RS* hasta cortar a la prolongación del siguiente lado del cuadrado.

5 Con centro en el siguiente vértice *P* y extremo en el punto *S* del arco anterior, se traza el arco *Sr.*

6 Con centro en el siguiente vértice Q y extremo en el punto *T* del arco anterior, se traza el arco *TU,* completando así una vuelta. El proceso se sigue hasta completar el número de vueltas deseado.



CONSTRUCCIÓN DE LA EVOLVENTE DEL CÍRCULO CONOCIENDO EL RADIO

La *evolvente* del círculo es la curva que genera un punto fijo de una recta tangente a la circunferencia que se desplaza alrededor de la misma sin resbalar.

1 Se dibuja una circunferencia de radio dado (Fig. 11) Y se divide en un número de partes iguales, por ejemplo en 8, numerando cada uno de estos puntos.

2 Por los puntos *1,* 2, 3, ... anteriores se trazan tangentes a la circunferencia.

3 Sobre la tangente trazada por el punto *1* se lleva una distancia *lA* igual a la longitud del arco *Ml.* Dicha longitud se obtiene al rectificar el arco de circunferencia o bien se toma como longitud del arco la de la cuerda *Ml,* pues el error que se comete es mínimo.

4 Sobre la tangente trazada por el punto 2 se lleva una distancia 28 igual a dos veces la longitud del arco *Ml.*

5 Sobre la tangente trazada por el punto 3 se lleva una distancia 3C igual a tres veces la longitud del arco *Ml,* y así sucesivamente.

6 Uniendo a mano o con plantilla los puntos *M, A, B,* C, etc., se halla la evolvente que se pide.

La *hélice* es la curva que genera un punto que se Mueve sobre una superficie de revolución de tal forma que, con movimiento uniforme, el punto recorre la generatriz en el mismo tiempo que da una vuelta de 360°, Tiene aplicación tanto en mecánica como en construcción.
Se denomina *paso* a la distancia comprendida entre dos puntos de la curva que ocupan una misma generatriz.
Se denomina *espira* a cada una de las vueltas Completas que da el punto en la superficie sobre la que se desplaza.

CONSTRUCCIÓN DE UNA HÉLICE CILÍNDRICA CONOCIENDO EL DIÁMETRO Y EL PASO

Sea *d* el diámetro y *p* el paso de la hélice (Fig. 12):

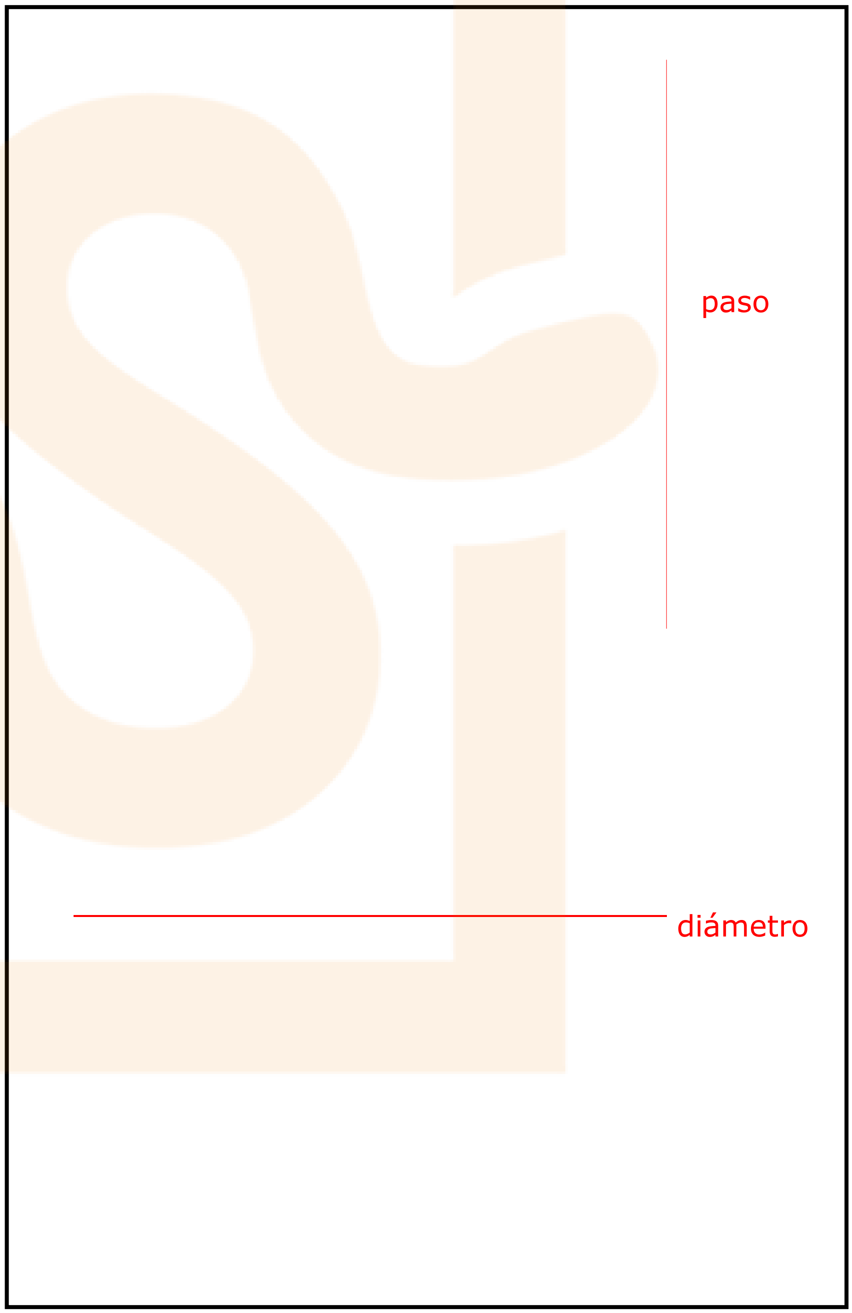
1 Se dibuja la circunferencia de centro O y diámetro MN = d.

2 Se dibuja el rectángulo de base el diámetro *d* y de altura el paso *p.* La circunferencia y el rectángulo dibujados son la planta y el alzado de un cilindro recto de revolución.

3 La circunferencia se divide en partes iguales, por ejemplo en 16, numerando cada una de estas divisiones.

4 Se divide la altura del rectángulo en el mismo número de partes iguales en que se haya dividido la circunferencia, en nuestro caso 16, numerando igual mente cada uno de dichos puntos y trazando por ellos rectas paralelas a la base del rectángulo.

5 Por las divisiones de la circunferencia se trazan rectas verticales hasta cortar a las horizontales del rectángulo en los puntos O, 1', 2', etc., que, unidos a mano alzada o con plantilla, nos definen la hélice.



CONSTRUCCIÓN DE UNA HÉLICE CÓNICA CONOCIENDO EL DIÁMETRO Y EL PASO

Sea *d* el diámetro y *p* el paso de la hélice (Fig. 13):

1 Se dibuja una circunferencia de centro O y diámetro MN = d.

2 Se dibuja un triángulo cuya base es el diámetro *d* y su altura el paso *p.* La circunferencia y el triángulo dibujados no son más que las vistas en planta yen alzado de un cono recto de revolución.

3 La circunferencia se divide en partes iguales, por ejemplo en 16, numerando cada una de estas divisiones.

4 Se divide la altura del triángulo en el mismo número de partes iguales en que se haya dividido la circunferencia, 16 en nuestro caso, numerando cada uno de dichos puntos y trazando por ellos rectas paralelas a la base del triángulo.

5 Por las divisiones de la circunferencia se trazan rectas verticales hasta cortar a la base del triángulo en los puntos *A,* B, C, D, *E, F,* G, *He/,* que uniremos con el vértice opuesto.

6 Donde se cortan las rectas anteriores con las horizontales correspondientes nos dan los puntos *A,* 1" 2', 3', etc., que, unidos a mano o con plantilla, definen la hélice cónica.

Curvas técnicas 2-Curvas cíclicas

Definición: Son curvas planas que se obtienen por el

Movimiento de un punto de una circunferencia o de una recta que rueda sin resbalar sobre otra circunferencia o sobre otra recta.
La recta o circunferencia móvil se denomina *ruleta* o ***Generatriz*** y la línea o circunferencias obre la que se Mueve se llama *base* o ***directriz.***
La aplicación más importante de estas curvas la
Tenemos en el dibujo de **engranaje**s.

TRAZADO DE UNA CICLOIDE

Se llama *cicloide* a la curva que describe un punto *P* de una circunferencia llamada ruleta que rueda sin resbalar sobre una recta llamada base.

Cicloide normal

Sea un punto generador *P* que se encuentra en la circunferencia ruleta de centro O (Fig. 1):
1 Sobre la recta base, a partir del punto *P,* se lleva una longitud *P-P12*igual a la longitud de la circunferencia ruleta, es decir, se rectifica la ruleta de centro O y radio *OP* sobre la recta base.
2 Se divide el segmento *P-P12*y la ruleta en el mismo número de partes iguales, por ejemplo 12,
3 Por cada uno de los puntos de división de la ruleta se dibujan rectas paralelas a la base.
4 Por los puntos de división 1', 2', 3', , 12' se trazan las perpendiculares a la recta base, hasta cortar en 01, O2,03, ..., 012a la recta paralela trazada por el centro O de la ruleta.
5 Se dibujan las circunferencias de centro O], O2/..., 012 Y donde se cortan con las correspondientes rectas horizontales paralelas a la base se van obteniendo los puntos *P], P2,* ..., *P12*de la cicloide normal.

Cicloide acortada y alargada

Sean los puntos *P'* y *P",* ligados a la ruleta, uno exterior y otro interior a la misma:

1 Se construye, sin trazarla, la cicloide normal tal como se ha explicado antes.

2 Sobre cada uno de los segmentos *01P1, 02P2* ..., y a partir de los centros O1, O2, ..., O12 se llevan las distancias fijas *OP'* y *OP",* obteniendo así los puntos *P'1, P'2,* ..., *P'12*de la **cicloide acortada** y los puntos P"1, *P"2.....,P"12* de la **cicloide alargada.**

TRAZADO DE UNA EPICICLOIDE

Se llama *epicicloide* a la curva plana que describe un Punto *P* de una circunferencia ruleta que rueda sin resbalar sobre el exterior de otra circunferencia que es la base.

Epicicloide normal

Sea la circunferencia de centro O y radio *OP* la ruleta Y la circunferencia de centro O' y radio *O'P* la base. El punto generador es el punto *P* de la circunferencia,

1Se divide la ruleta de centro O en un número de partes iguales, por ejemplo 12, numerando los puntos de división 1, 2, 3, ,12.

2 Se rectifica el arco *P1* de la circunferencia de centro O correspondiente a una de estas divisiones y a continuación se halla el arco *P1*' de la circunferencia de centro O' que corresponde a dicha longitud(véase rectificación de un arco).

3 Estas divisiones se. Trasladan sobre la base tantas veces como se haya dividido la ruleta, numerando a continuación los puntos: 1', 2', 3', ,12',

Es interesante comenzar por una posición central

6'y trasladarla magnitud anterior en los dos sentidos, de forma simétrica.

4 Con centro en O',se trazan los arcos que pasan por cada uno de los puntos 1, 2, 3, ,12 en que se ha dividido la ruleta inicialmente.

5 Se traza el arco de centro O' y radio 0'0, que al cortarse con la prolongación de los radios 0'1', 0'2', 0'3', ...,0'12' se obtienen los puntos 01, O2, 03, , 012,centros de las sucesivas posiciones que va adoptando la ruleta al rodar.

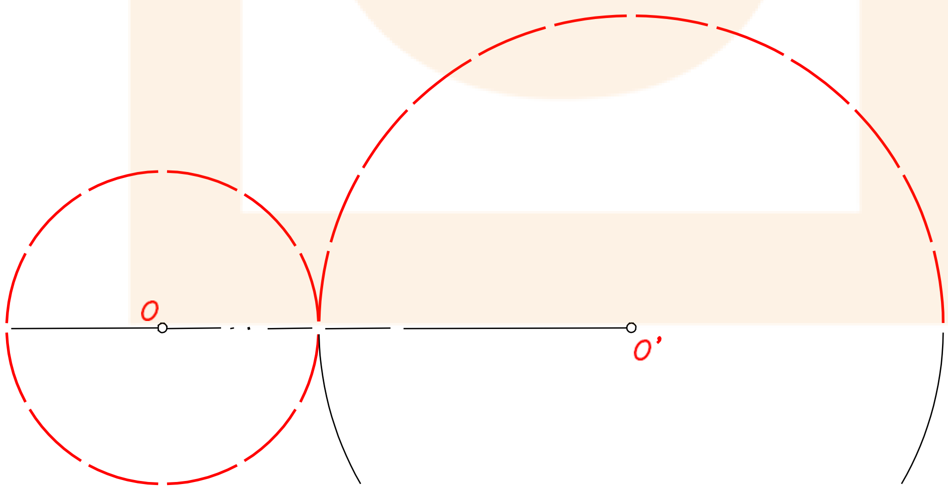
6 El punto *P1*de la curva se obtiene al cortarse la circunferencia de centro 01y radio 011'con el arco concéntrico con la base que pasa por el punto 1. El punto *P2* se obtiene al cortar se la circunferencia de centro O2y radio 022'con el arco concéntrico con la base que pasa por el punto 2. Deforma análoga se obtienen los puntos- P3,P4,. , P12'

Epicicloides acortada y alargada

Sean los puntos *P' y P",* ligados solidariamente a la ruleta, uno interior y otro exterior a la misma (Fig. 2):

1 Se construye, sin trazarla, la epicicloide normal tal como se ha explicado anteriormente.

2 Sobre los segmentos *01P1,02P2,03P3,*...,***O**12**P**12,* y a partir de los centros 01, O2,03, ...,012,se llevan las distancias fijas *OP'* y *OP",* obteniendo así los puntos *P'1, P´2, P'3,* ..., *P'12*de la epicicloide acortada y *P"1, P"2, P"3,...,P"12* de la epicicloide alargada.



TRAZADO DE UNA HIPOCICLOIDE

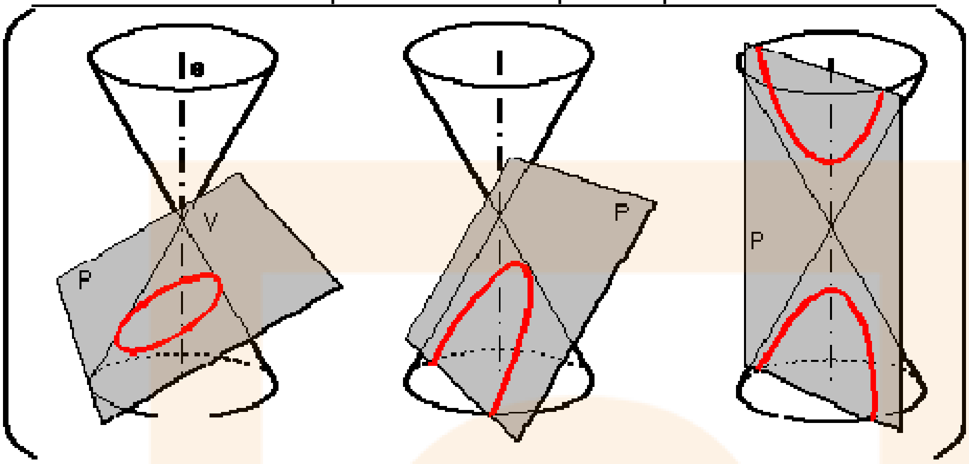
Se llama *hipocicloide* a la curva plana que describe un punto *P* de una circunferencia ruleta que rueda sin resbalar sobre el interior de otra circunferencia que es la base.

Hipocicloide normal

Hipocicloides acortada y alargada (sólo ver presentación en clase)

CURVAS CÓNICAS

Se llaman curvas cónicas a las curvas que se obtienen de la intersección de una superficie cónica por un plano.



Secciones de un cono

Supongamos un cono de revolución de dos ramas; según sea la posición de un plano secante respecto del eje del cono, en relación con el ángulo del vértice, se obtienen las siguientes curvas:

Circunferencia

Cuando el plano secante es perpendicular al eje de la superficie cónica, y no pasa por el vértice, la sección es una circunferencia. ($\beta = 90°$)

Elipse

Si el plano secante forma con el eje de la superficie cónica un ángulo mayor que semiángulo en el vértice del cono, el plano corta a todas las generatrices y no pasa por el vértice, entonces la sección es una curva cerrada que se denomina elipse. ($\alpha < \beta$)

Parábola

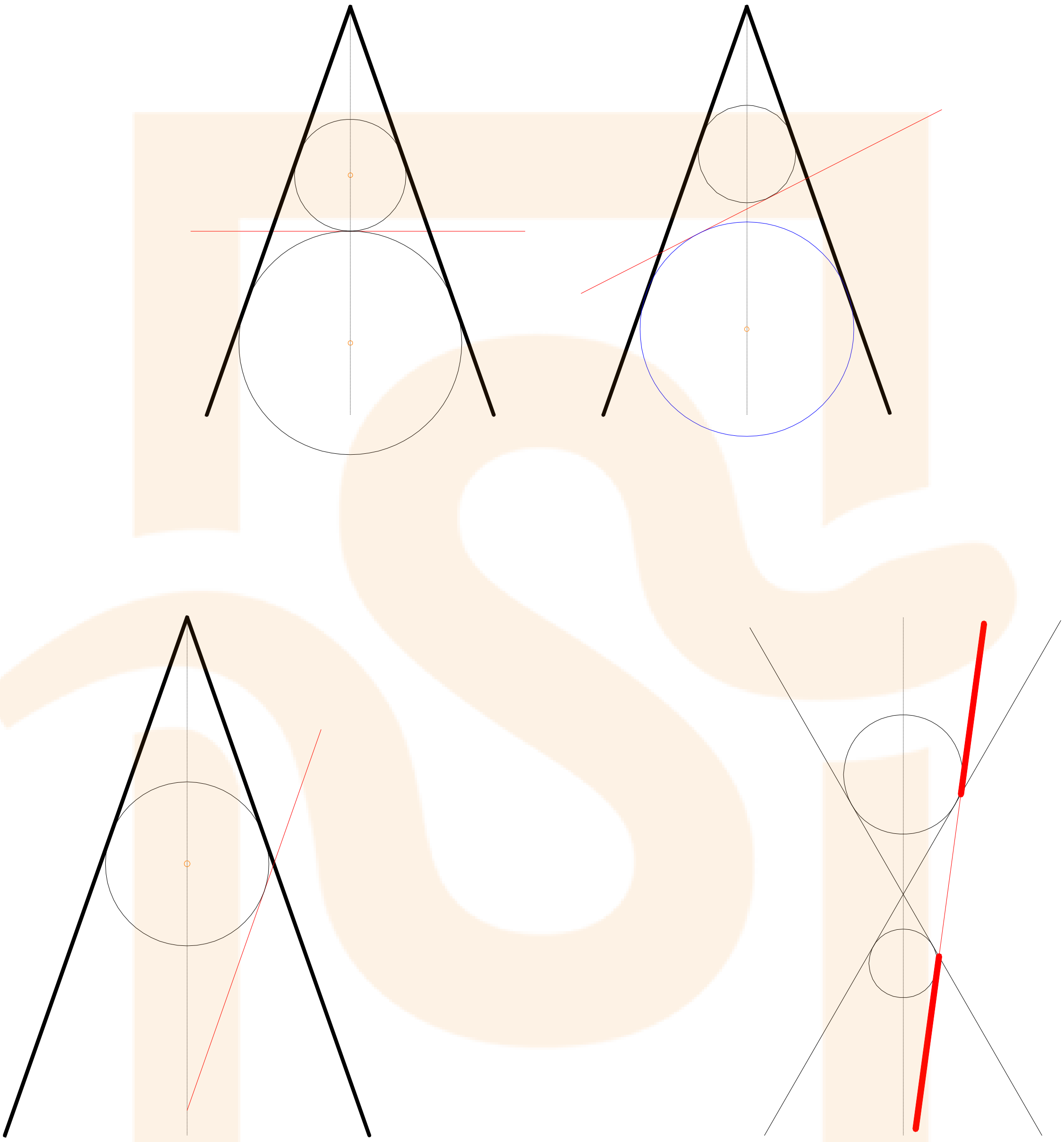
Si el plano secante forma con el eje del cono el mismo ángulo que el semiángulo en el vértice o , lo que es lo mismo, es paralelo a una generatriz, la curva que resulta es abierta con un punto en el infinito llamada parábola ($\alpha = \beta$).

Hipérbola

Cuando el plano secante forma con el eje del cono un ángulo menor que semiángulo en el vértice, entonces el plano corta a las dos ramas del cono y la sección es una curva abierta de dos ramas que se llama hipérbola. ($\alpha > \beta$)

Focos, directrices y circunferencias focales, excentricidad

Focos



(**dibujo para completar)**

El foco o los focos de una curva cónica son los puntos de tangencia del plano secante que produce la cónica con las esferas inscriptas al cono que sean, a la vez, tangentes al plano (teorema de Dandelín). Los focos son llamados puntos notables de las cónicas. La elipse y la hipérbola tienen dos focos y la parábola sólo uno.

Directrices

Se denomina directriz de una curva cónica a la recta de intersección del plano secante con el plano que contiene a la circunferencia de tangencia entre el cono y la esfera que, siendo tangente al plano secante, está inscrita en la circunferencia cónica.

La elipse y la hipérbola tienen dos directrices y la parábola sólo una.

Circunferencia principal

Es aquella que tiene por centro el c entro de la curva y por diámetro la longitud del eje real. En la Elipse y la Hipérbola $d=V_1V_2$, en la parábola es de radio infinito

Circunferencias focales:

Son aquellas que tienen por centro los focos y de radio la longitud del eje real , en la parábola es de radio infinito-

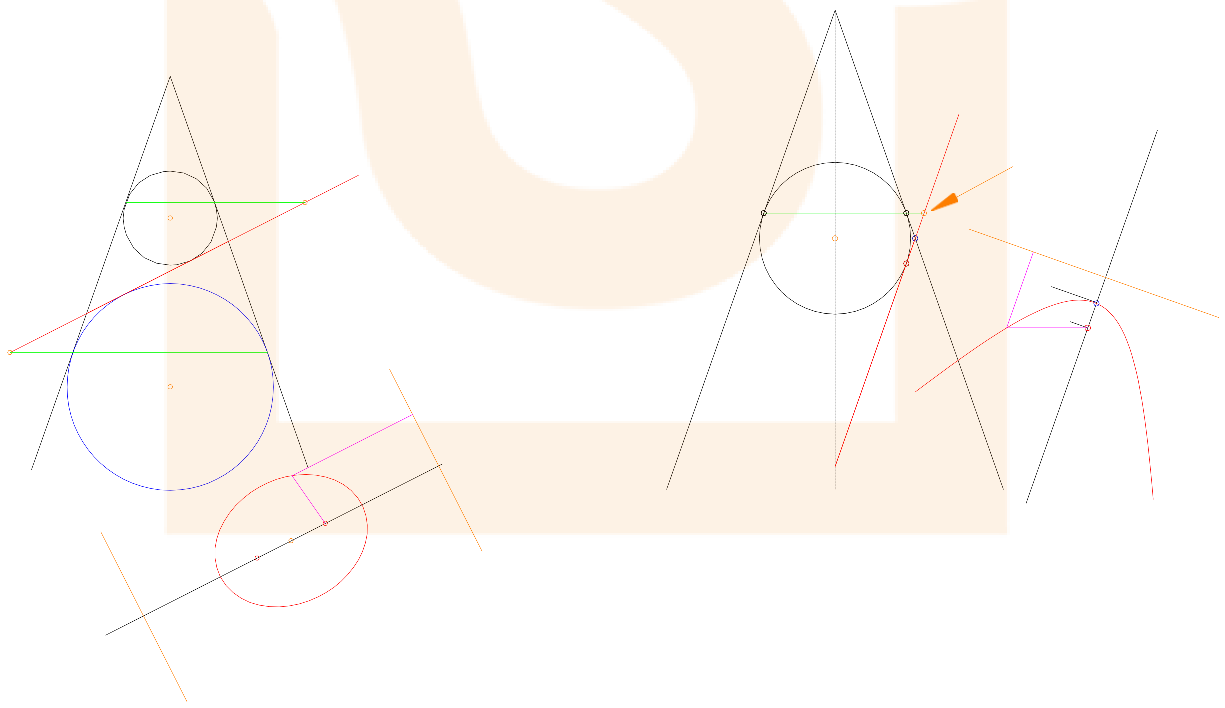
Excentricidad:

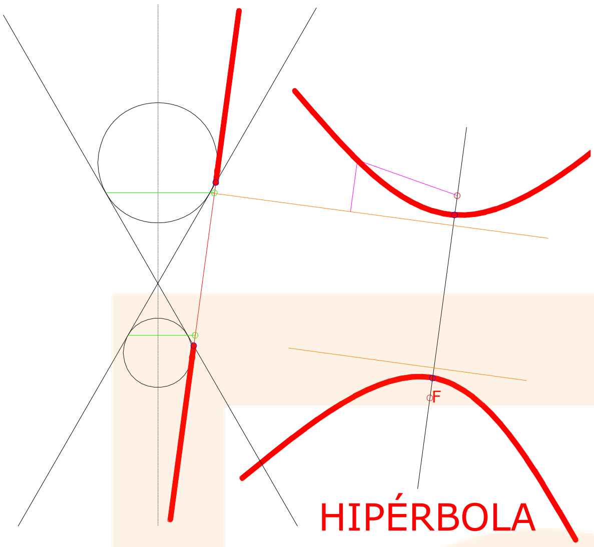
Dado un punto cualquiera de una cónica se llama excentricidad a la razón constante de las distancias de dicho punto al foco y a la directriz correspondiente.

En la elipse: $e= AF_2/AD$ **< 1**

En la parábola : $e= AF/AD$**=1**

En la hipérbola: $e= AF_2/AD$ **> 1**





(dibujo para completar)

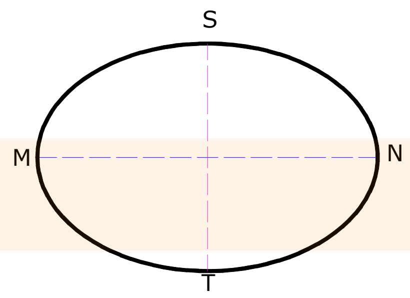
ELIPSE

Definición y propiedades

La elipse es una curva cerra da y plana, lugar geométrico de los puntos que cumplen con la condición de que la suma de distancias a tros dos fijos F_1 y F_2, llamados focos, es constante e igual a $2a$, siendo $2a$ la longitud del eje mayor MN de la elipse.

Propiedades

- ✓ La elipse tiene dos ejes perpendiculares que se cortan en el punto O, centro de la curva.
- ✓ Simetría: la elipse también es simétrica respecto a los dos ejes y, por tanto, respecto del centro O.
- ✓ Ejes: el eje mayor **MN** se le llama eje real y vale **2a** y el eje menor **ST** es el eje virtual y vale **2b.**
- ✓ Distancia focal: la distancia focal F_1F_2 vale $2c$. Los focos están siempre en el eje real.
- ✓ Radios vectores: son las rectas PF_1 y PF_2 que unen cada punto de la elipse con los focos.
- ✓ Circunferencia principal: es la qu e tiene por centro el de la elipse y el diámetro 2a.
- ✓ Circunferencias focales: es la que tiene por centro los focos y de radio 2 a.
- ✓ Siempre se verifica que $a^2 = b^2 + c^2$.
- ✓ Diámetros conjugados: se llaman así a todo par de diámetros que cumplen con la condición de que cualquier recta secante paralela a uno de ellos queda dividida en dos partes iguales por el otro.

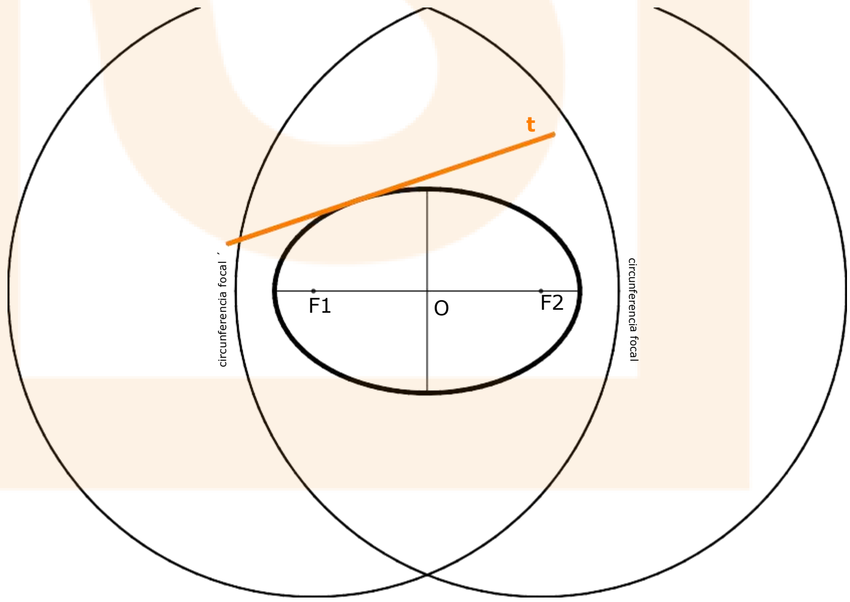


(dibujo para completar)

Rectas tangentes

- ✓ Las proyecciones de los focos sobre cualquier recta tangente a la elipse pertenecen a la circunferencia principal.
- ✓ El punto simétrico de un foco respecto de cualquier recta tangente a la elipse pertenece a la circunferencia focal cuyo centro es el otro foco.

(dibujo para completar)

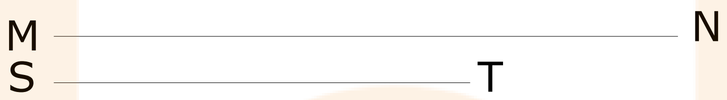


Determinación de los focos conociendo los ejes

Sean MN y ST los ejes de una elipse:

1. Se trazan ambos ejes perpendiculares entre sí cortándose en su punto medio.
2. Se traza un arco de circunferencia con centro en uno de los extremos s del eje menor y radio el semieje mayor ON hasta cortar al eje MN en los puntos y F_1 y F_2 que son los focos.

(dibujo para completar)



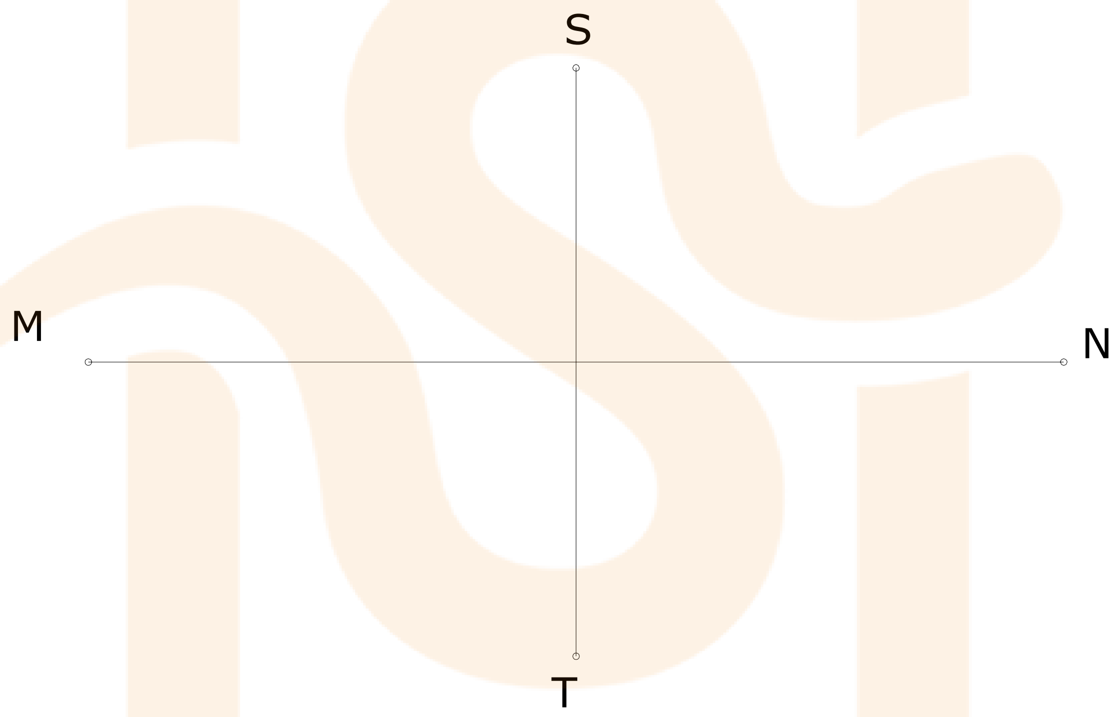
Construcción de la elipse conociendo los ejes

Método: por puntos

Sean los ejes **MN** y **ST**:

1. Se hallan los focos F_1 y F_2, como ya se ha explicado.
2. Se toma un punto **A** cualquiera del eje mayor, situado entre uno de los focos y el centro, y con radio **MA** y centro en **F_1** se traza el arco 1 y con radio **NA** y centro **F_2** se traza el arco 2; estos dos arcos se cortan en el punto **V** de la elipse.
3. Repitiendo la misma operación con otros puntos **B, C**, etc., se van determinando puntos de la elipse que posteriormente se unen a mano o con plantilla.

(dibujo para completar)

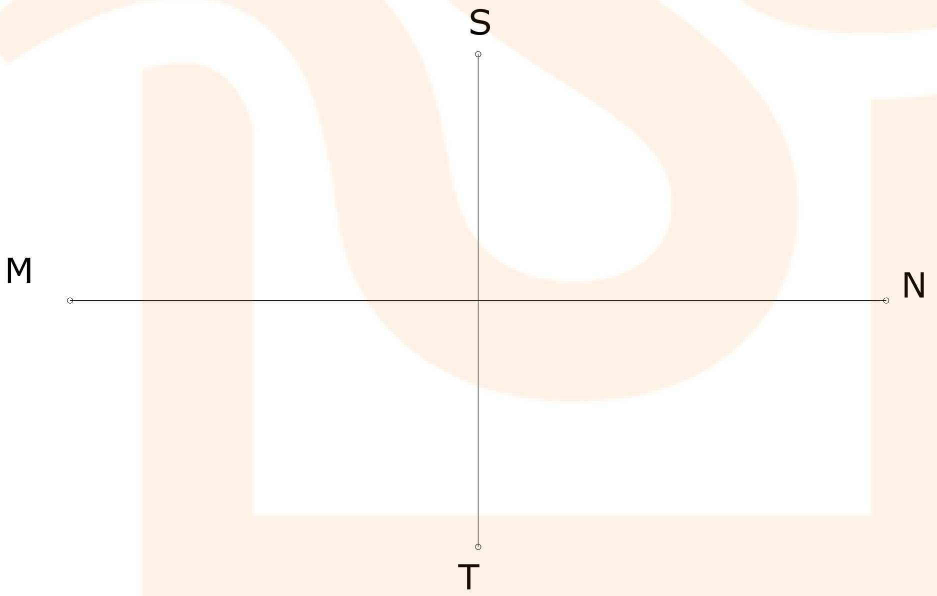


Método: por afinidad

Sean los ejes MN y ST:

1. Se trazan dos circunferencias cuyos diámetros sean iguales al eje mayor y al eje menor, respectivamente.
2. Se traza un radio cualquiera que corte a las dos circunferencias en dos puntos A y B.
3. Por el punto A de interse cción con la circunferencia menor se traza la recta paralela al eje mayor MN.
4. Por el punto B de interse cción con la circunferencia mayor se traza la paralela al eje menor ST.
5. El punto C de intersección de las dos paralelas es un punto de la elipse.
6. Se repite la operación con tantos radios como se desee, determinado así diversos puntos de la elipse, que posteriormente se unen a mano o con plantilla.

(dibujo para completar)



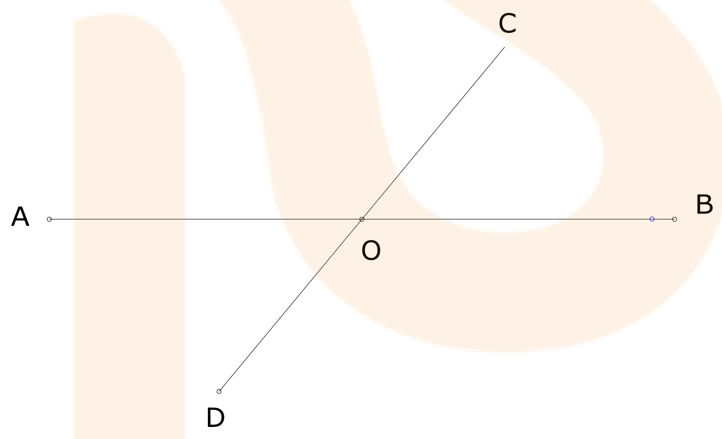
Construcción de la elipse conociendo dos diámetros conjugados

Sean **AB** y **CD** dos diámetros conjugados de la elipse:

1. Se traza la circunferencia con diámetro AB y centro en el punto O.
2. Por el punto O se dibuja la perpendicular al diámetro AB que corta a la circunferencia en T.
3. Se toma un punto S cualquiera del diámetro AB, trazando por él la paralela a OT hasta cortar a la circunferencia en el punto V.
4. Se trazan dos rectas paralelas: una a OC por el punto S y otra a TC por el punto V; ambas se cortan en el punto R de la elipse.
5. Repitiendo la misma operación con otros puntos del diámetro ABse van determinando puntos de la elipse, que posteriormente seunen con plantilla o a mano.

Para mejor entendimiento diremos que cada punto de la elipse se obtiene por construcción de triángulos semejantes al **OTC,** como el **SVR**, etc.

(dibujo para completar)



HIPÉRBOLA

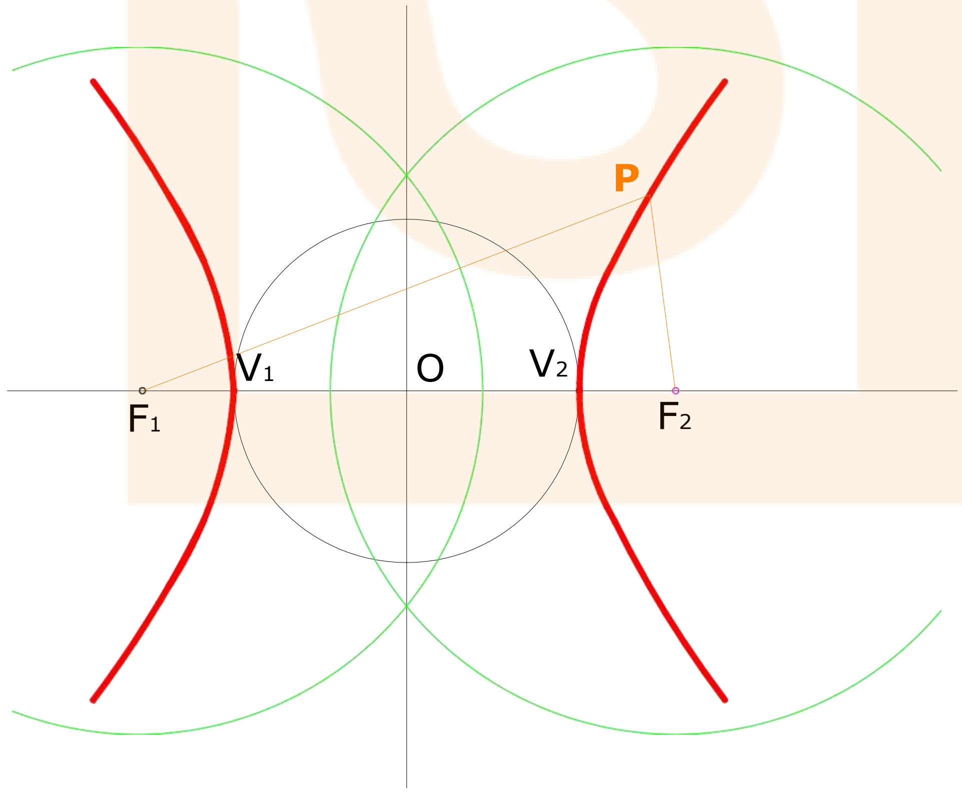
Definición y propiedades

La hipérbola es una curva plana, abierta, con dos ramas y se define como el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a otros dos fijos **F_1** y **F_2**, llamados focos, es constante e igual a **2a**, siendo **2a** el valor del eje real **V_1 V_2.**

Propiedades

- ✓ **La hipérbola** tiene dos ejes perpendiculares que se cortan en su punto medio O, centro de la curva.
- ✓ **Simetría**: la hipérbola es simétrica respecto de los dos ejes y, por tanto, respecto del centro **O.**
- ✓ **Ejes**: el eje mayor **V_1 V_2** se llama eje real y vale **2a** y el eje menor, perpendicular al anterior en su punto medio O, se llama eje virtual.
- ✓ **Distancia focal**: la distancia focal **F_1** y **F_2** vale **2c.** Los focos están siempre en el eje real.
- ✓ **Radios vectores**: son las rectas **PF1** y **PF2** que unen un punto de la curva con los dos focos, cumpliéndose que **PF1 - PF2 = 2a**.
- ✓ **Circunferencia principal**: es la que tiene por centro el de la hipérbola y diámetro **2a**.
- ✓ **Circunferencias focales**: tienen como centros los focos y radio **2a.**
- ✓ Siempre se verifica que: **$c2= a\ 2 + b\ 2$**.

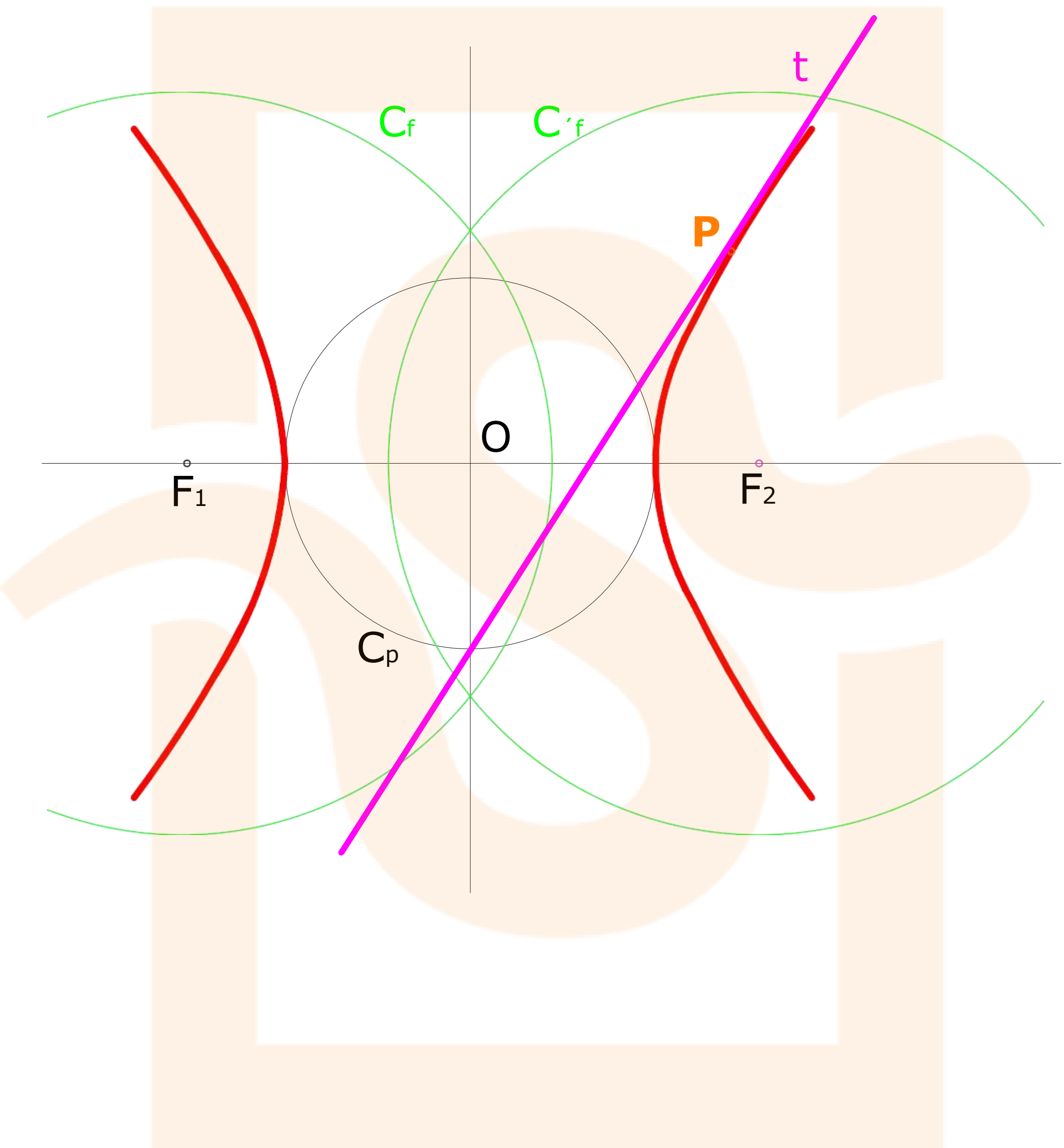
(dibujo para completar)



Rectas tangentes

- ✓ Las proyecciones de los focos sobre cualquier recta tangente a la hipérbola pertenecen a la circunferencia principal.
- ✓ El punto simétrico de un foco respecto de cualquier tangente a la hipérbola pertenecen a la circunferencia focal cuyo centro es el otro foco.

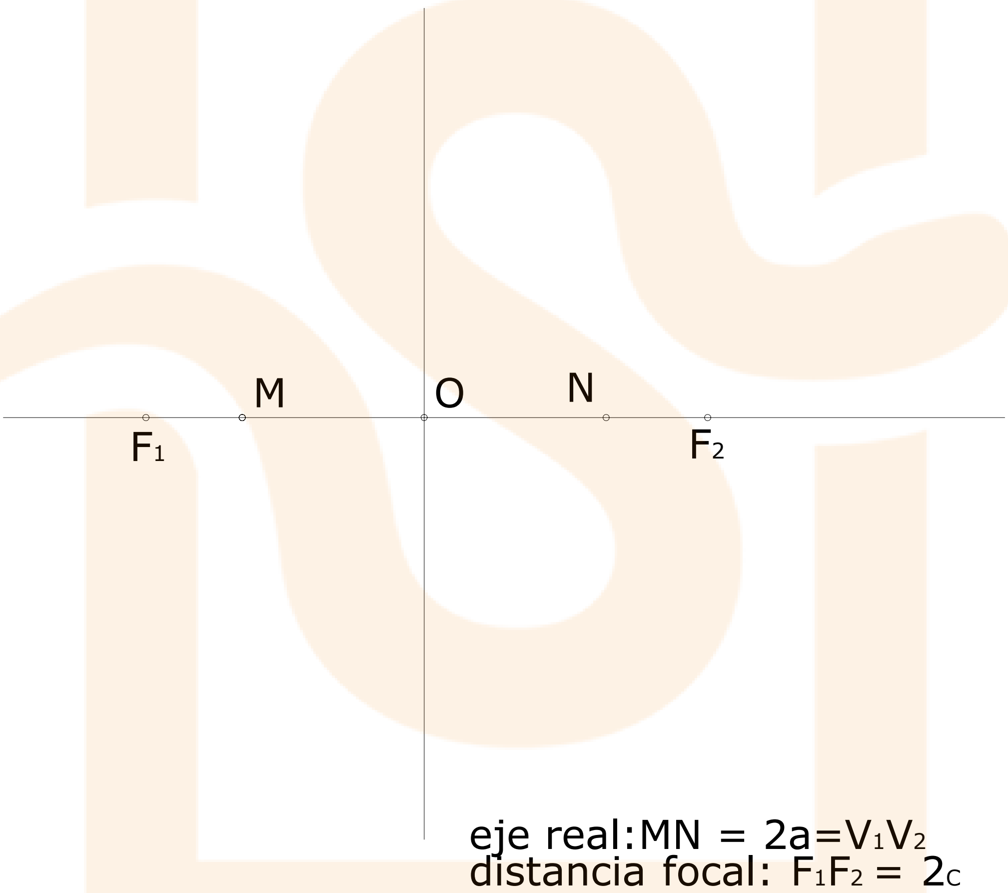
(dibujo para completar)



Construcción de la hipérbola conociendo los vértices y los focos

Los datos son: **MN = 2 a** y **F_1 F_2 = 2c**:

1. Se elige un punto **A** cualquiera en el eje real **MN**, situado a la derecha del foco de la derecha o a la izquierda del foco de la izquierda.
2. Con centros en **F_1** y **F_2** y radios **MA** y **NA** respectivamente se trazan los arcos 1 y 2 que se cortan en el punto V de la curva. Se verifica que: **$VF_1 - VF_2 = 2a = MN$.**
3. Repitiendo la misma operación con otros puntos B, C, etc., se obtienen puntos que, unidos po steriormente con plantilla o a mano, nos definen la hipérbola.



(dibujo para completar)

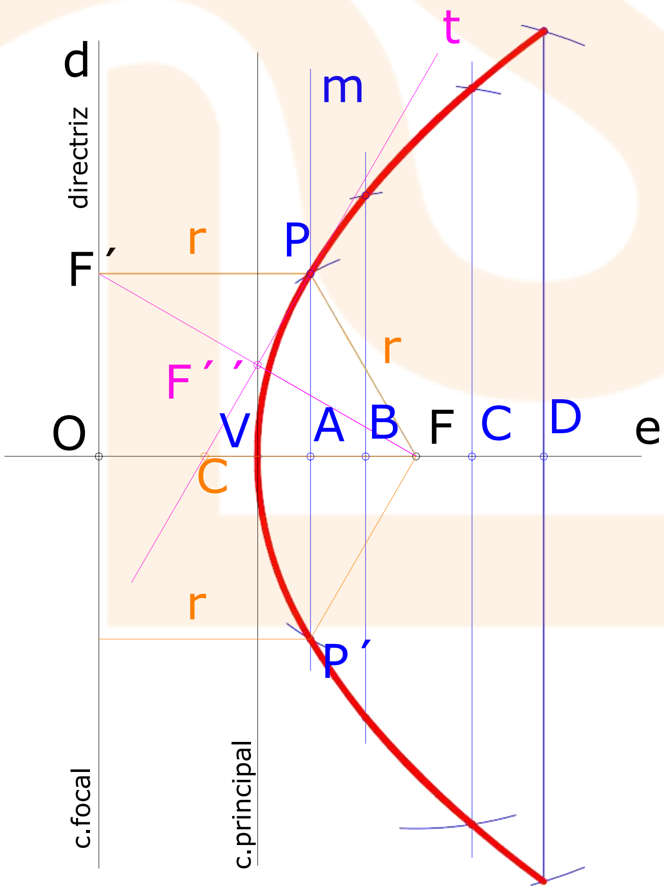
PARÁBOLA

Definición y propiedades

La **parábola** es una curva plana, abierta y de una rama. Se define como el lugar geométrico de los puntos del plano que **equidistan** de un punto fijo **F** llamo **foco**, y de una recta fija **d** llamada **directriz.**

Propiedades

- ✓ La parábola tiene un eje perpendicular a la directriz.
- ✓ La parábola tiene un vértice V y un foco F situados en el eje.
- ✓ El vértice, como cualquier otro punto de la parábola, equidista de la directriz y del foco.
- ✓ Simetría: la parábola es simétrica respecto del eje.
- ✓ Radios vectores: son las rectas PF y PF´ que unen un punto con el foco y con la directriz.
- ✓ Circunferencia principal: es la recta tangente en el vértice; por tanto tiene radio infinito.
- ✓ Circunferencia focal: es la propia directriz; por tanto tiene radio infinito.
- ✓ Parámetro 2p: es la longitud AB de la cuerda perpendicular al eje en el foco F.



(dibujo completo)

Rectas tangentes

- ✓ La proyección del foco sobre una tangente pertenece a la circunferencia principal, es decir, a la tangente en el vértice.
- ✓ La directriz es el lugar geométrico de los puntos simétricos del foco F respecto de cada tangente.
- ✓ El foco F equidista del punto de tangencia de una tangente y del punto donde esta corta al eje de la parábola FP = FC.

Construcción de la parábola conociendo el foco y la directriz

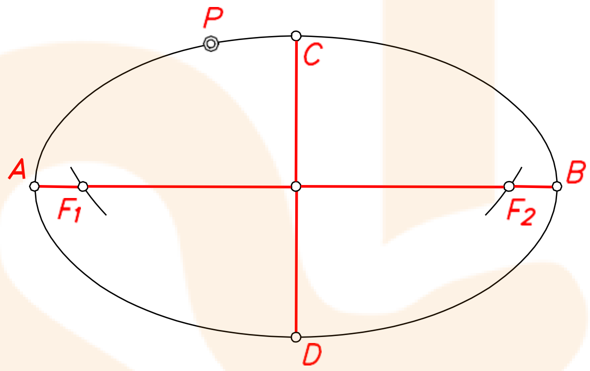
Los datos son: la directriz d, el eje e y el foco F:

1. El vértice es el punto medio del segmento MF.
2. Se toma un punto cualquiera A del eje y se traza la recta m perpendicular al eje.
3. Con centro en el foco F y radio AM se traza un arco que corta a la perpendicular m en los puntos P y P´, puntos de la parábola. Se cumple que PF = PE.
4. Repitiendo la misma operación con otros puntos B; C; etc., se obtienen puntos que unidos posteriormente a mano o con plantilla, nos determinan la parábola.

CURVAS CÓNICAS-TANGENCIAS:

ELIPSE

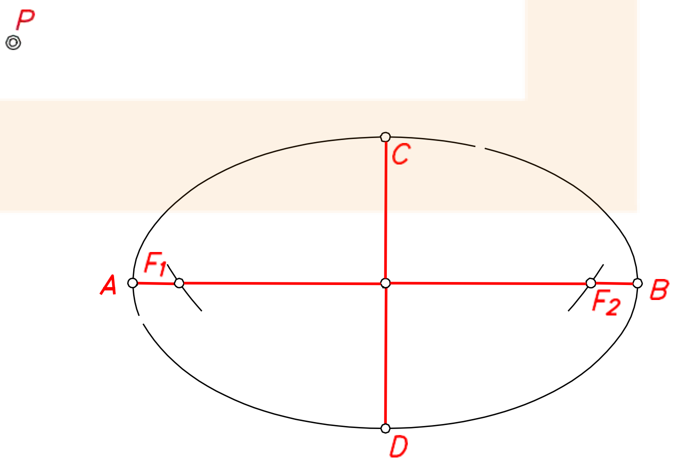
Recta tangente por un punto de la elipse



1. Se hallan los focos.
2. Se traza la Circunferencia focal correspondiente a uno de los focos.(**F2)**
3. Averiguar el simétrico de F_1 respecto de la tangente.
4. Trazar la bisectriz del ángulo formado por **F_1PF´$_1$**

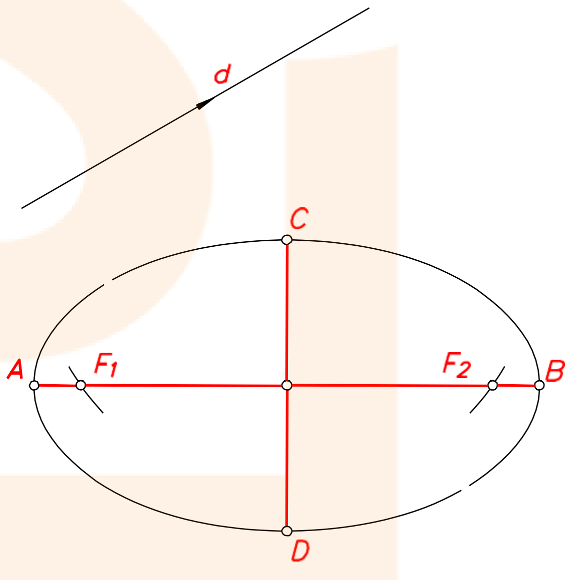
Rectas tangentes desde un punto exterior

1. Se hallan los focos (ya dados)
2. Se traza la Circunferencia focal de uno de los focos(F2).
3. Con centro en P y radio PF1 trazar el arco que nos dará en la **C.focal G** y **H.**
4. Las mediatrices de los segmentos **GF1** y **HF1** respectivamente son las tangentes buscadas.
5. Los puntos de tangencias se hallan al unir los puntos **G** y **H** con el foco **F2** y cortar a las tangentes en los puntos **I** y **J**



Rectas tangentes paralelas a una dirección

1. Se hallan los focos (ya dados)
2. Se traza la **Cf** de uno de los focos, en el ejemplo **F1**
3. Desde el otro foco **F2** se traza la recta m perpendicular a la dirección **d**, que corta a la circunferencia focal en los puntos **G** y **H**4.Las mediatrices de los segmentos **GF2** y **HF2** son las tangentes buscadas.
5.Los puntos de tangencias se hallan al unir los puntos **I** y **J**



RECTAS TANGENTES A UNA HIPÉRBOLA

Rectas tangentes por un punto de la hipérbola:

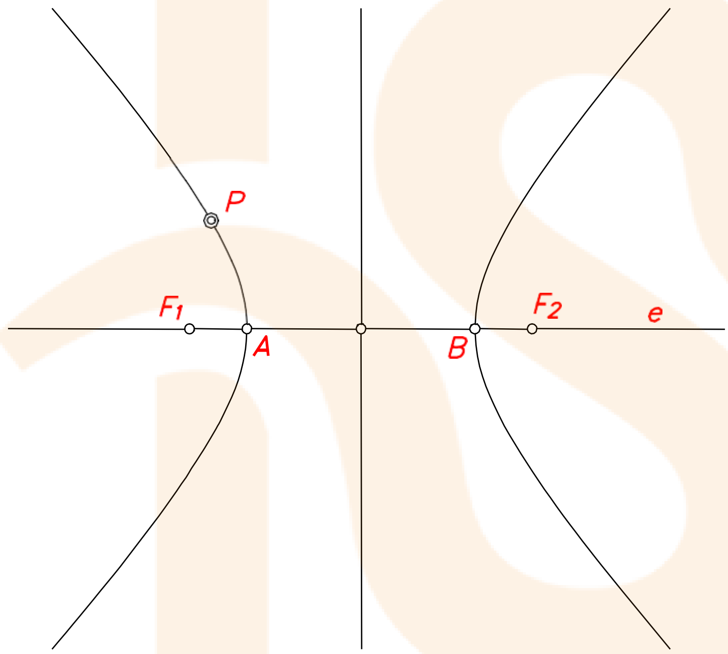
Dada la hipérbola de eje *AB* y distancia focal F_1F_2 y un punto *P* cualquiera de la misma (fig. 9):

1 Se traza la circunferencia focal C_r correspondiente a uno de los dos focos F_2.

2 Se une el foco F_2 con el punto *P* hasta cortar a C_r en el punto F'_1, simétrico del otro foco F_1 respecto de la tangente.

3 La mediatriz *r* del segmento $F_1F'1$ es la recta tangente buscada.

La recta rtambién puede hallarse trazando la bisectriz del ángulo *F1PF'1.*



Rectas tangentes por un punto exterior

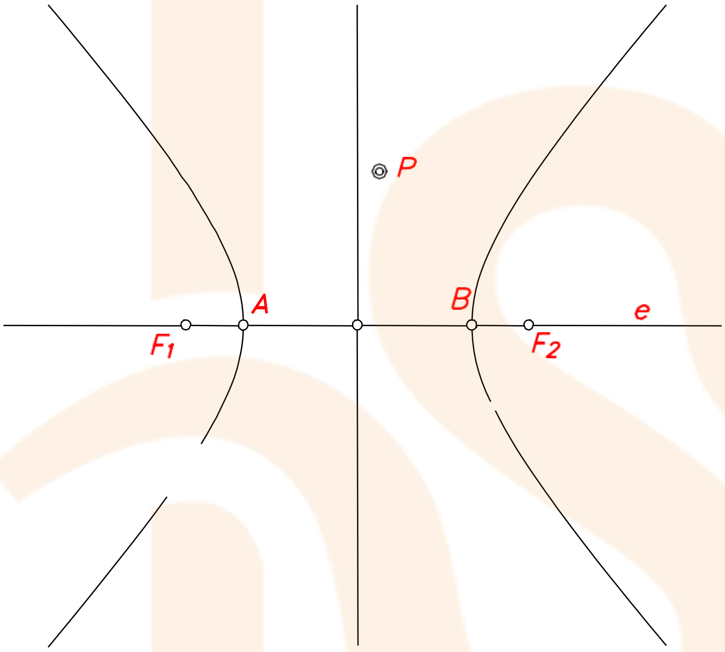
Dada la hipérbola de eje *AB* y distancia focal $F1F_2$ y un punto *P* exterior (fig. 10):

1 Se traza la circunferencia focal C_r correspondiente a uno de los dos focos *F1.*

2 Con centro en *P* se traza el arco de circunferencia que pasa por el otro foco F_2, la cual corta a C_r en los puntos G y *H.*

3 Las mediatrices *r* y s de los segmentos GF_2 y HF_2 respectivamente son las tangentes buscadas.

4 Los puntos de tangencia se hallan al unir los puntos G y *H* con el foco *F1* y cortar a las tangentes en los puntos *I* y *J.*



Rectas tangentes paralelas a una dirección

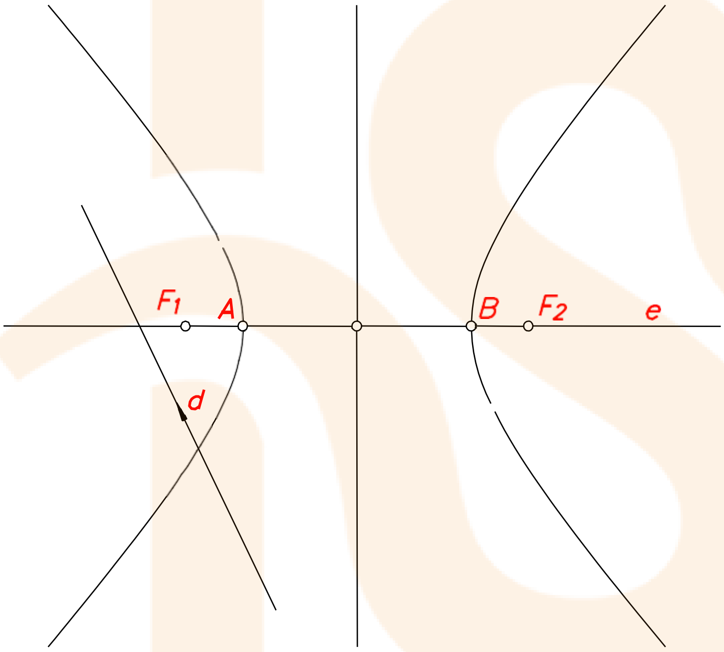
Dada la hipérbola de eje *AB* y distancia focal $F1F_2$ y una dirección *d*

1 Se traza la circunferencia focal C_f correspondiente a uno de los dos focos *F1.*

2 Desde el otro foco F_2 se traza la recta m perpendicular a la dirección *d,* que corta a la circunferencia focal C_f en los puntos G y *H.*

3 Las mediatrices *r* y s de los segmentos GF_2 y HF_2 respectivamente son las tangentes buscadas.

4 Los puntos de tangencia se hallan al unir los puntos G y *H* con el foco *F1* y cortar a las tangentes en los puntos *I* y *J.*



TANGENTES A UNA PARÁBOLA

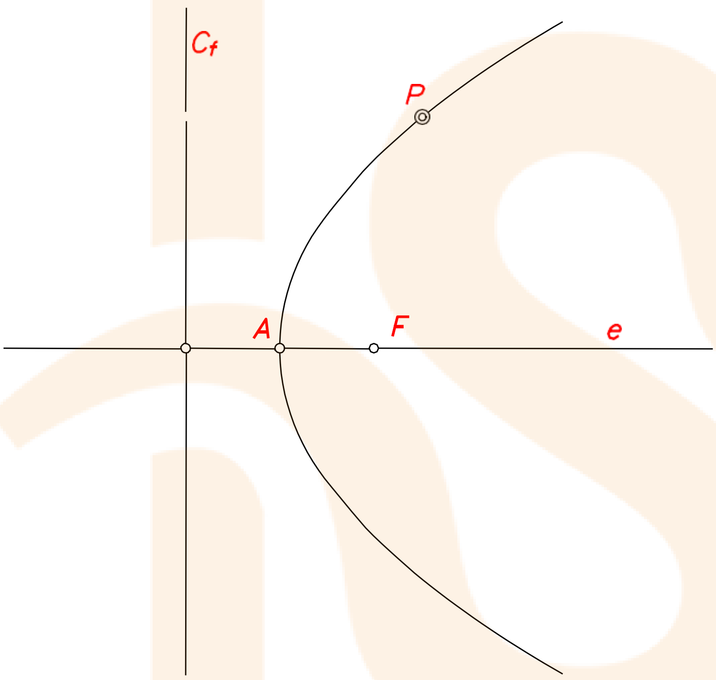
Recta tangente por un punto de la parábola

Dada la parábola de vértice *A* y foco Fy un punto *P* ualquiera de la misma (fig. 13):

1 Se une el foco F_2 con el punto *P*, es decir, por *P* se traza la paralela al eje e, hasta cortar a C_f en el punto *F'*, simétrico de *F* respecto de la tangente (téngase en cuenta que en la parábola la directriz hace las veces de la circunferencia focal cuyo centro está en el infinito).

2 La mediatriz *r* del segmento *FF'* es la recta tangente buscada.

La recta *r* también puede hallarse trazando la bisectriz el ángulo *FPF'*



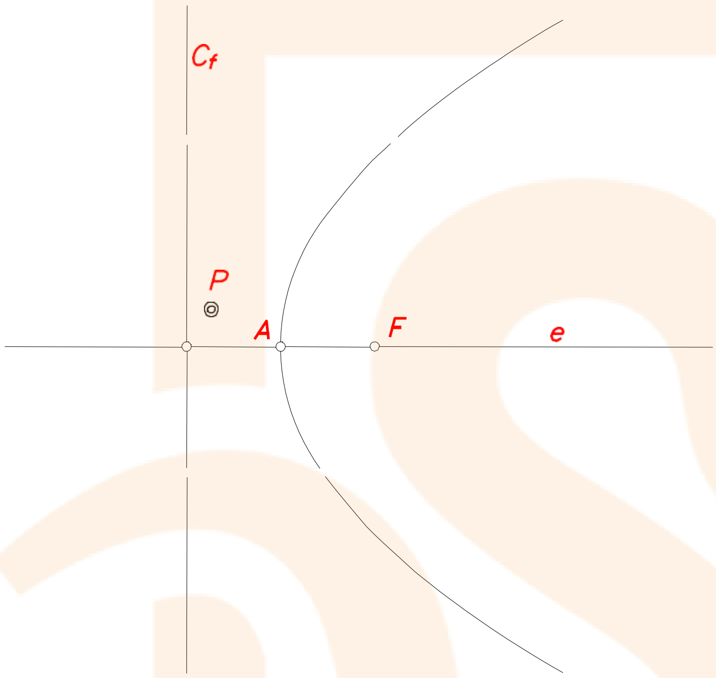
Rectas tangentes desde un punto exterior

Dada la parábola de vértice *A* y foco Fy un punto *P* exterior :

1 Con centro en *P* se traza el arco de circunferencia que pasa por el foco F y corta a Cl(directriz) en los puntos G y *H.*

2 Las mediatrices ry s de los segmentos *GFy HF* respectivamente son las tangentes buscadas.

3 Los puntos de tangencia se hallan al unir los puntos G y *H* con el foco F_2 es decir, por G y *H* se trazan las paralelas al eje e, que cortan a las tangentes en los puntos / y *J.*



Rectas tangentes paralelas a una dirección

Dada la parábola de vértice *A* y foco Fy una dirección (fig. 15):

1 Se traza la circunferencia focal C_l correspondiente a uno de los dos focos F_2.

2 Desde el foco *F* se traza la recta m perpendicular a la dirección *d,* que corta a la circunferencia focal C_f (directriz) en el punto G.

3 La mediatriz *r* del segmento *GF* es la tangente buscad~.

4 El punto de tangencia se halla al unir G con el foco *F2'* es decir, al trazar la paralela al eje e desde el punto G, y cortar a la tangente en el punto /.