FÍSICA 2º BACHILLERATO

BLOQUE TEMÁTICO: VIBRACIONES Y ONDAS

MOVIMIENTOS VIBRATORIOS. MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE.

Contenidos:

---

1) Movimiento periódico. Movimiento oscilatorio. Movimiento vibratorio.

① Definiciones iniciales.

1) *Movimiento periódico*, es aquel que se repite a intervalos iguales de tiempo. Ejemplos:

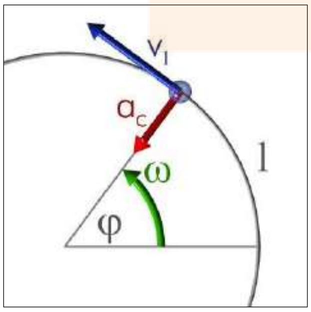
- Movimientos circulares uniformes, como el de la punta de la aguja de un reloj.
- Movimiento de un péndulo.
- Movimiento de vibración de la membrana de un tambor.

2) Movimiento oscilatorio o vibratorio, es aquel que tiene lugar a un lado y a otro de una posición de equilibrio estable. Es un tipo de movimiento periódico. Ejemplos:

- Movimiento de un péndulo.
- Movimiento de vibración de la membrana de un tambor.

Estas definiciones son simples, no se ha distinguido entre movimiento vibratorio y oscilatorio. Hay que profundizar en ellas.

② Recordatorio de las magnitudes características del movimiento circular.



- Espacio angular, φ, es el ángulo abarcado en el movimiento. Se mide en radianes.

- Espacio lineal, l ó s, es el espacio recorrido sobre la trayectoria. Se mide en metros y se puede calcular con la expresión

$$s = \varphi \cdot R$$

donde R es el radio del movimiento.

- Velocidad angular, ω, es el ángulo recorrido (espacio angular) en la unidad de tiempo. Se mide en radianes/segundo (rad/s)

$$\omega = \frac{\varphi}{t}$$

- Velocidad lineal, v, es la distancia recorrida por la partícula en la unidad de tiempo. Se mide en m/s y puede determinar con la expresión

$$v = \omega \cdot R$$

- Aceleración, *a*. También llamada aceleración normal o centrípeta, a_c. En el movimiento circular uniforme la velocidad siempre tiene el mismo módulo, pero, como se ve en la figura, su dirección y sentido cambian. Por tanto, el cuerpo tiene una aceleración que se denomina centrípeta pues la dirección del vector va en la línea que une la partícula con el centro y su sentido es desde la partícula hasta en centro de giro. Su módulo, que se mide en m/s^2, se puede calcular con la expresión

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

- Periodo, *T*, es el tiempo que se tarda en repetir el movimiento. Se mide en segundos.

- Frecuencia, *f*, es el número de vueltas que realiza el móvil en la unidad de tiempo. Se mide en s^{-1}, unidad que se suele llamar Hertzio, Hz.

③ Definición de *movimiento periódico*.

Si se analiza el movimiento circular se observa que cada vez que el punto móvil ha dado un giro completo se repite e valor de tres variables:

- posición del móvil ($\vec{r}$)
- velocidad del móvil ($\vec{v}$)
- aceleración normal o aceleración centrípeta del móvil ($\overrightarrow{a_c}$)

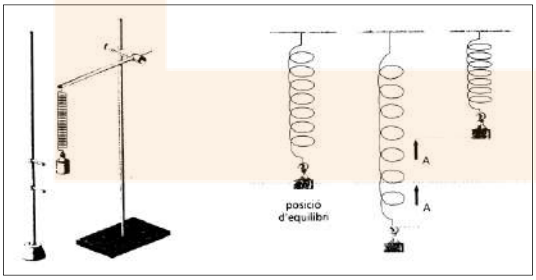
Estas tres variables son vectores. Si nos fijamos detalladamente veremos que lo que va variando de $\vec{r}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{a_c}$ es su dirección y sentido, pero sus módulos no cambian. Por tanto, en otro punto cualquiera de la trayectoria circular el módulo de estas variables no ha cambiado pero sí su dirección y su sentido.

Por tanto, un cuerpo o una partícula describen un *movimiento periódico* cuando las variables posición, velocidad y aceleración de su movimiento toman los mismos valores después de un tiempo constante denominado periodo.

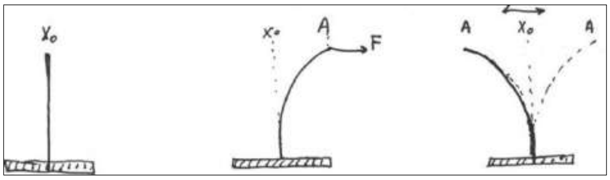
④ Definición de *movimiento oscilatorio y vibratorio*.

No todos los movimientos periódicos son circulares, veamos tres ejemplos de movimientos periódicos no circulares:

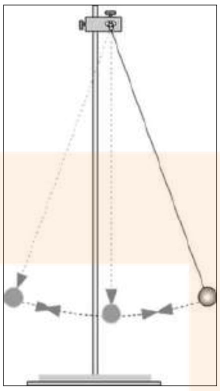
- Una masa cuelga de un muelle en equilibrio, es desplazada respecto de esta posición de equilibrio y soltada. Se produce un movimiento periódico, de amplitud A, en torno a una posición.



- Un alambre vertical fijado por uno de sus extremos al suelo. El otro extremo es desplazado respecto de su posición de equilibrio y soltado. Ocurre lo mismo que en el caso anterior,



- Un péndulo simple puesto en movimiento.



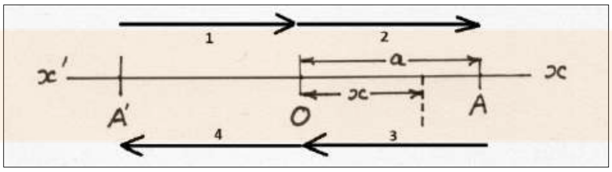
Estos movimientos periódicos se suelen denominar *vibratorios u oscilatorios*. Como vemos, en ellos se desplaza un cuerpo o una partícula sucesivamente de un lado a otro de la posición de equilibrio, repitiendo a intervalos de tiempo regulares sus variables cinemáticas (posición, velocidad y aceleración).

Diferencias entre movimientos oscilatorios y movimientos vibratorios: los movimientos oscilatorios son relativamente lentos (péndulo, muelle colgando, etc.). Cuando las oscilaciones son muy rápidas se denominan vibraciones y el movimiento correspondiente es un movimiento vibratorio (el ejemplo anterior del alambre correspondería a este caso).

⑤ Más definiciones y observaciones.

En los ejemplos anteriores se ha mencionado la *amplitud*, *A*: es el máximo desplazamiento que tiene lugar durante una oscilación o vibración. Dicho desplazamiento se realiza en un tiempo t = T/4.

Durante una vibración completa de una partícula la distancia recorrida es de cuatro veces la amplitud. En efecto, si una vibración parte desde la posición A', alejada de la posición de equilibrio una distancia igual a la amplitud del movimiento,



la oscilación completa se produce en las etapas 1-2-3-4, con un recorrido igual a cuatro veces la amplitud (que en la figura se representa como *a*).

Se observa que el periodo de oscilación no depende de la amplitud de las oscilaciones, es decir, las oscilaciones son isócronas.

2) Movimiento armónico simple. Cinemática.

Este punto tiene 9 apartados (2.1 a 2.9)

2.1.- Las siglas m.a.s. hacen referencia a:

m = movimiento, por tanto, habrá ha que hacer un estudio cinemático.

a = armónico, quiere decir que se la ecuación del movimiento se expresa mediante funciones armónicas, como la función seno o la función coseno.

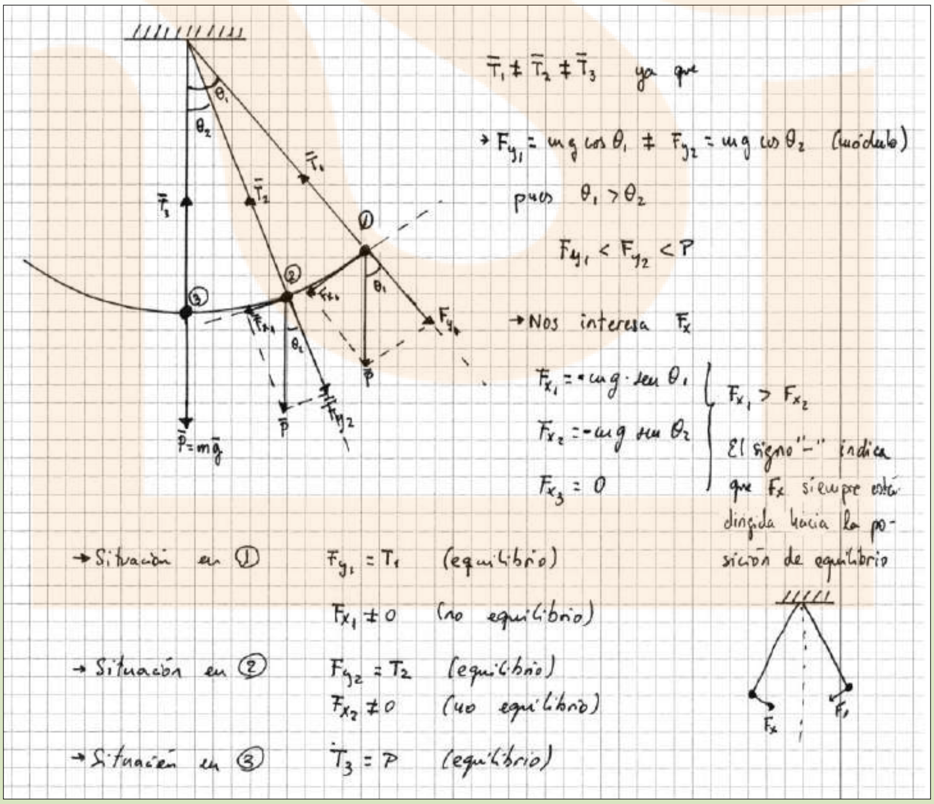
s = simple, es un movimiento de una sola variable (unidimensional).

2.2.- Causa que produce un m.a.s.

Los movimientos vibratorios son producidos por fuerzas que en todo momento son directamente proporcionales al desplazamiento respecto de la posición de equilibrio de la partícula que vibra. Estas fuerzas siembre van dirigidas hacia la posición de equilibrio estable.

AMPLIACIÓN. Análisis de las características de la fuerza que da lugar a un movimiento oscilatorio o vibratorio.

Vamos a caracterizar la fuerza que actúa en un péndulo simple para comprobar que estas características también se cumplen en el caso de la masa que vibra solidariamente con un muelle. En la figura se representa un péndulo simple en tres posiciones concretas, así como las fuerzas involucradas en cada caso. También se analiza el valor de estas fuerzas.



La fuerza que no se equilibra, F_x, es la responsable del movimiento de la masa del péndulo, "tirando" de ésta hacia la posición de equilibrio y acelerándola cuando se mueve desde la posición 1 a la 3 y…

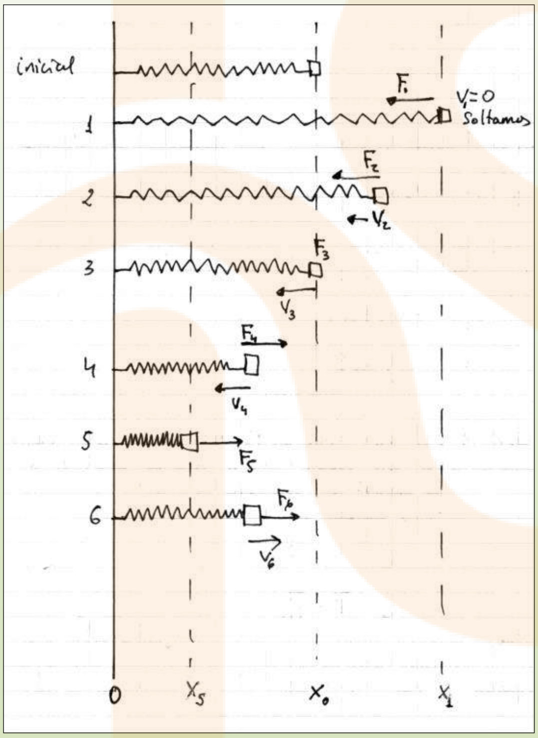
…decelerándola cuando la masa se mueve de la posición 3 a la 1. Esta es la fuerza que hay que analizar:

1) Es una fuerza periódica, es decir, su valor en módulo dirección y sentido se repite una vez transcurrido un cierto tiempo.
2) Es una fuerza que es directamente proporcional a la amplitud del movimiento. En este caso esta proporcionalidad está establecida a través del sen θ.
3) Su dirección es siempre la del desplazamiento y su sentido siempre va dirigido hacia la posición de equilibrio, motivo por el cual se le suele llamar fuerza recuperadora.

¿Ocurrirá lo mismo en el caso del muelle?
Para simplificar pondremos el muelle horizontal y despreciaremos rozamiento de la masa con el suelo. La ley que rige el muelle es la ley de Hooke que podemos expresar de la siguiente manera:

$$F = -K \cdot \Delta x$$

donde:
- *K* es la constante recuperadora del muelle. Es característica de cada muelle, es decir, depende de la naturaleza de éste y sus unidades son $N \cdot m^{-1}$ en el S.I.
- *Δx* es el alargamiento del muelle desde su posición de equilibrio.
- El signo "-" tiene el mismo sentido que el expresado en el caso del péndulo, es decir, hace que la fuerza elástica siempre vaya dirigida hacia la posición de equilibrio, tanto si el alargamiento es positivo (estiramiento) como si es negativo (compresión).



En la figura adjunta se han representado hasta seis situaciones diferentes. En cada caso:

$F_1 = -k(x_1-x_0)$	$v_1 = 0$
$F_2 = -k(x_2-x_0)$	$v_2 \neq 0$ (acelera)
$F_3 = 0$	$v_3 = max.$
$F_4 = -k(x_4-x_0)$	$v_4 \neq 0$ (decelera)
$F_5 = -k(x_5-x_0)$	$v_5 = 0$
$F_6 = -k(x_6-x_0)$	$v_6 \neq 0$ (acelera)

- Hasta la posición 5 se analiza medio periodo.
- En la posición 4, aunque la fuerza va dirigida hacia el centro, la inercia lleva la masa hasta 5.

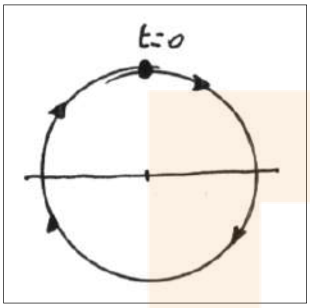
Veamos las características de la fuerza recuperadora y si coinciden con las establecidas para el péndulo:

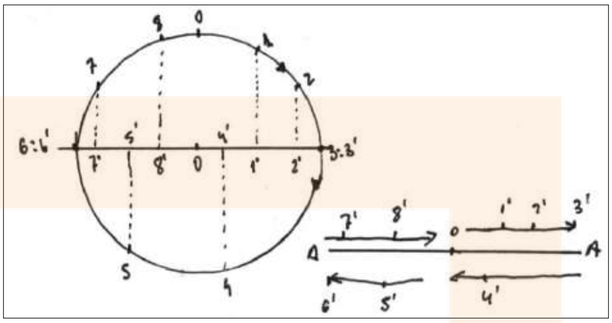
1) Es claro que F5 = F1 (en módulo) y que, por tanto, es una fuerza periódica. Cuando el cuerpo llegue de nuevo a la posición 1 el valor de F volverá a ser el mismo, en este caso en módulo, dirección y sentido.
2) Es claro que F5 = F1 ≠ F2 = F4 ≠ F3 (en módulo), luego es una fuerza variable que, además, depende del desplazamiento según la ley de Hooke.
3) En el esquema se ve que F siempre va dirigida hacia la posición de equilibrio.

<u>Conclusión:</u> Una fuerza variable, cuya variación sea proporcional al desplazamiento, y cuyo sentido sea siempre hacia su punto de equilibrio, produce un movimiento armónico simple (m.a.s.).

2.3.- Ecuación del m.a.s. (exposición en 7 pasos, a, b, c, d, e, f y g)

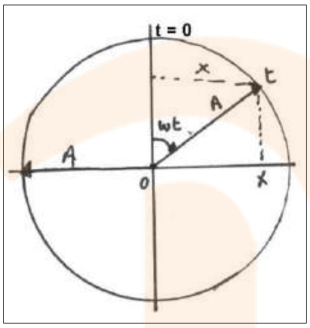
a) Se partirá del movimiento circular uniforme. Supongamos un móvil que se encuentra en la posición marcada en la figura para t = 0. Las proyecciones de las posiciones del móvil en movimiento circular uniforme sobre el diámetro horizontal vienen representadas en la figura.





Como se puede ver, el m.a.s. de trayectoria recta se puede considerar como resultado de la proyección sobre un diámetro de un movimiento circular uniforme (en este ejemplo se ha elegido la proyección sobre el diámetro horizontal, pero se puede elegir cualquier diámetro).

b) Se analizará ahora con detalle una posición cualquiera:



- En el movimiento circular el arco (en radianes) recorrido en el tiempo t será

$$\varphi = \omega t$$

- En la proyección del movimiento, es decir, en el m.a.s., durante ese tiempo el móvil ha pasado desde el origen o posición de equilibrio, *0*, hasta *x.*

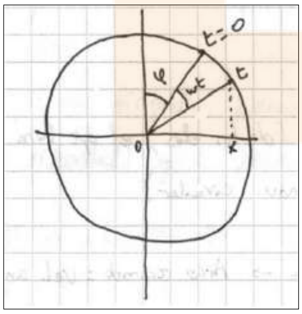
- Se puede ver en la figura que

$$\text{sen } \omega t = \frac{x}{A}$$

Por tanto

$$x = A \text{ sen } \omega t$$

La ecuación obtenida es la ecuación de un m.a.s.



c) Una forma más general de la ecuación debería tener en cuenta que en el instante inicial, cuando empezamos a contar, la partícula no tiene porqué estar en la posición x = 0. Para tener en cuenta que pueda estar en cualquier posición arbitraria, la ecuación del m.a.s. debería ser:

$$x = A \text{ sen } (\omega t + \varphi)$$

ya que $\omega t + \varphi$ es el ángulo total desde x = 0.

d) Si el movimiento circular se hubiese proyectado sobre la diagonal vertical en lugar de la diagonal horizontal, la ecuación obtenida habría sido:

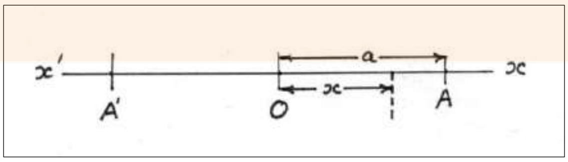
$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Como $\cos\alpha = \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$, entonces

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) = \ x = A\operatorname{sen}\left(\omega t + \varphi\ + \frac{\pi}{2}\right)$$

es decir, ambas expresiones son equivalentes pero desfasadas un cuarto de periodo.

e) Significado físico de las magnitudes que aparecen en la ecuación del m.a.s.



$$x = A\operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

- x es la elongación (en metros), es la posición de la partícula vibrante en cualquier instante referida a la posición de equilibrio.

- A es la amplitud (en metros), es el valor máximo que puede tener la elongación.

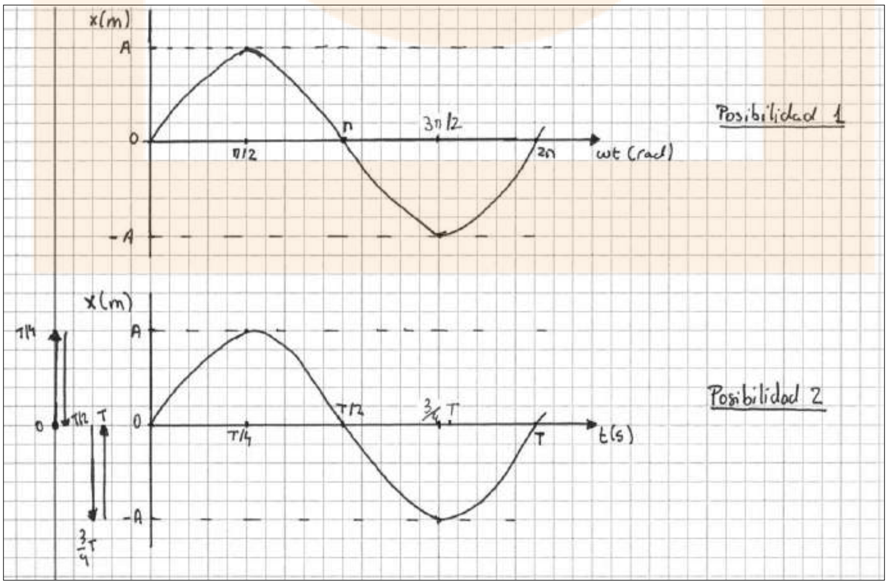
- $(\omega t + \varphi)$ es la fase en cualquier instante (en radianes). Su valor determina el estado de vibración o fase del movimiento.

- φ es la fase inicial o, también, corrección de fase o constante de fase (en radianes). Determina el estado de vibración para $t = 0$.

- ω es la pulsación o frecuencia angular (en rad/s). Representa la velocidad angular constante del hipotético movimiento circular asociado.

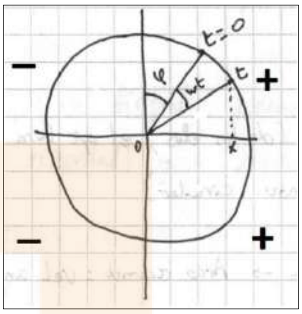
f) Representación gráfica de la ecuación del m.a.s.

En las figuras siguientes, se ofrecen dos posibilidades de representación de la ecuación del m.a.s. cuando la fase inicial es cero.



Se pueden comparar estas gráficas con la primera figura de la página 6 que muestra las posiciones de la partícula vibrante en cada instante.

g) Valores positivos y negativos de la elongación. Es importante tener en cuenta que la función seno puede tomar valores positivos y negativos que harán que la elongación sea positiva o negativa. El sentido que hay que darle a este signo está relacionado con el lugar en el que se encuentra la partícula vibrante. Así, para la situación de partida tomada en estos apuntes,



- Si la elongación es positiva la partícula se encuentra a la izquierda de la posición de equilibrio. Podremos saber si se acerca o se aleja a dicha posición dependiendo del valor de la fase. Así, si la fase está entre 0 y $^{\pi}/_{2}$ radianes la partícula se aleja, y si está entre $^{\pi}/_{2}$ y π la partícula se acerca.

- Si la elongación es negativa la partícula se encuentra a la derecha de la posición de equilibrio. Podremos saber si se acerca o se aleja a dicha posición dependiendo del valor de la fase. Así, si la fase está entre π y $^{3\pi}/_{2}$ radianes la partícula se aleja, y si está entre $^{3\pi}/_{2}$ y 2π la partícula se acerca.

Hay que tener en cuenta que en la proyección horizontal del movimiento circular el ángulo empieza a contar desde el eje OY hacia el eje OX.

2.4.- Otras magnitudes del m.a.s.

Periodo, T, es el tiempo necesario para dar una oscilación completa, su expresión se puede deducir de la expresión de la frecuencia angular

$$\omega = \frac{2\pi}{T}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Frecuencia, f, es la inversa del periodo,

$$f = \frac{1}{T}$$

Su unidad será s^{-1}, también llamada Hertzio (Hz), ciclos por segundo o vibraciones por segundo.

2.5.- Dos problemas resueltos.

---

① Una partícula animada de m.a.s. inicia el movimiento en el extremo positivo de su trayectoria y tarda 0,25 s en llegar al centro de la misma. La distancia entre ambas posiciones es de 10 cm. Calcula:

a) El periodo y la frecuencia del movimiento.

b) El número de vibraciones que realiza en un minuto

c) La ecuación del movimiento

d) La posición de la partícula 0,5 s después de iniciado el movimiento

---

Datos:

- Cuando t = 0, x = A
- Tiempo en hacer ¼ del movimiento = 0,25 s
- A = 10 cm = 0,1 m

a) Si el tiempo que nos dan es el empleado en recorrer la distancia que va desde un extremo hasta la posición de equilibrio, entonces, este tiempo se corresponde con ¼ del periodo total. Así,

$$T = 4 \cdot 0{,}25 = 1\ s$$

Por otra parte, la frecuencia, *f*, será,

$$f = \frac{1}{T} = 1\ Hz$$

b) El significado físico de la frecuencia es el número de vibraciones (ciclos) que realiza el cuerpo en un segundo. Si nos piden el número de vibraciones que se realiza en un minuto, entonces:

$$n^{\text{o}}\ vibraciones\ en\ 60\ segundos = 60 \cdot f = 60$$

c) La ecuación general del m.a.s. es

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

Para establecerla en este movimiento debemos conocer las llamadas constantes del movimiento, A, ω y φ. El valor de la amplitud es dato del problema. En cuanto a la frecuencia angular o pulsación,

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 1 = 2\pi\ rad/s$$

Nos falta conocer la fase inicial. Para ello debemos saber con exactitud una posición de la partícula en un tiempo determinado. En este caso sabemos que cuando t=0 la partícula se encuentra en x=A. Sustituyendo estos datos en la ecuación del m.a.s.,

$$A = A \cdot \text{sen}(2\pi \cdot 0 + \varphi)$$

$$1 = \text{sen}\ \varphi$$

$$\varphi = \text{arcsen}\ 1 = {}^{\pi}/_{2}\ rad$$

En definitiva,

$$x = 0{,}1 \cdot \text{sen}\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

d) Cuando t = 0,5 s, la posición de la partícula será:

$$x = 0{,}1 \cdot \text{sen}\left(2\pi \cdot 0{,}5 + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}1\ \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -0{,}1\ m$$

La partícula se encuentra en el extremo opuesto al que estaba al iniciar el movimiento.

② Una partícula se mueve con un m.a.s. entre dos puntos distantes entre sí 20,0 cm y realiza 4 vibraciones en un segundo. Si la partícula en el instante inicial se encuentra en la posición x = A/2 y se dirige hacia el extremo positivo, calcula:
a) La ecuación del movimiento.
b) ¿En qué instante pasa por primera vez por la posición de equilibrio?
c) ¿En qué instante alcanzará por primera vez el valor máximo de x?

Datos:
- La distancia entre los extremos de vibración es 20 cm, por tanto, A = 10 cm = 0,1 m
- 4 vibraciones por segundo, es decir, f = 4 Hz
- Si t = 0, entonces x = A/2 (hacia el extremo positivo)

a) La ecuación del m.a.s. en general es,

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

Sabemos el valor de A. En cuanto al valor de la pulsación,

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 4 = 8\pi \, rad/s$$

Para conocer la fase inicial, aplicamos en la ecuación las condiciones del instante inicial

$$A/_2 = A \cdot \text{sen}(2\pi \cdot 0 + \varphi)$$

$$1/_2 = \text{sen}\, \varphi$$

$$\varphi = \text{arcsen}\, 0{,}5 = \frac{\pi}{6}\, rad$$

Por tanto,

$$x = 0{,}1 \cdot \text{sen}\left(8\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

Aclaración: si el problema hubiera mencionado que en el instante inicial la partícula se encuentra en la posición x = A/2 y se mueve hacia el punto de equilibrio, entonces el procedimiento sería el mismo, pero fase inicial ya no sería π/6 (30°) sino que sería el ángulo cuyo seno sea también 0,5, es decir, 5π/6 (150°).

b) En la posición de equilibrio, x = 0. Debemos resolver la siguiente ecuación:

$$0 = 0{,}1 \cdot \text{sen}\left(8\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

Es decir, la fase del movimiento debe ser tal que la función seno sea cero. Es decir

$$8\pi t + \frac{\pi}{6} = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots.$$

De todas estas soluciones posibles sólo una es la que corresponde al primer paso por la posición de equilibrio. La primera de ellas no es válida pues la partícula inicia el movimiento con una fase inicial, por tanto, es la segunda posibilidad,

$$8\pi t + \frac{\pi}{6} = \pi; \quad 8t + \frac{1}{6} = 1; \quad t = 0{,}1\, s$$

Aclaración: si hubiéramos utilizado el valor 2π, habríamos calculado el tiempo que tarda en pasar la segunda vez por la posición de equilibrio, 3π para la tercera vez,….

c) El valor máximo de x se dará cuando x = A = 0,1 m. Siguiendo el mismo procedimiento que en el apartado anterior, debemos resolver la siguiente ecuación:

$$0{,}1 = 0{,}1 \cdot \text{sen}\left(8\pi t + \frac{\pi}{6}\right); \quad 1 = \text{sen}\left(8\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$8\pi t + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}; \quad 8t + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}; \quad t = 0{,}042\, s$$

2.6.- Velocidad del m.a.s.

Recordatorio.

- Si $y = \text{sen}(ax)$, entonces $y' = \frac{dy}{dx} = a \cdot \cos(ax)$
- Si $y = cos(ax)$, entonces $y' = \frac{dy}{dx} = -a \cdot \text{sen}(ax)$

Si partimos de la ecuación de posición del m.a.s.

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

la velocidad de la partícula en cualquier instante vendrá dada por,

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Por tanto,

$$v = A\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Expresión que permite calcular la velocidad de la partícula que realiza el m.a.s. en cualquier instante.

2.7.- Aceleración del m.a.s.

Si partimos de la ecuación de velocidad del m.a.s.

$$v = A\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

La aceleración de la partícula en cualquier instante vendrá dada por,

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Por tanto,

$$a = -A\omega^2 \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

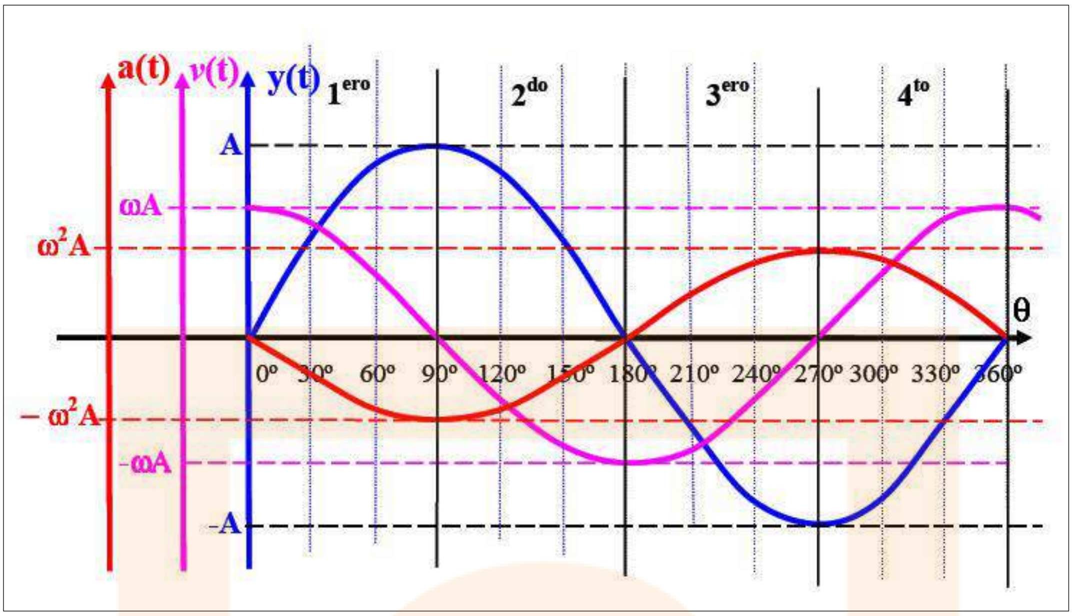
Expresión que permite calcular la velocidad de la partícula que realiza el m.a.s. en cualquier instante. Teniendo en cuenta la expresión de la ecuación de posición, la aceleración también se puede escribir

$$a = -A\omega^2 \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

2.8.- Situaciones extremas y de equilibrio

En la figura de la página siguiente se comparan las gráficas de posición, velocidad y aceleración. Para ello se han representado las tres ecuaciones correspondientes suponiendo que $\varphi = 0$, es decir,

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega t) \qquad v = A\omega \cdot \cos(\omega t) \qquad a = -A\omega^2 \cdot \text{sen}(\omega t)$$



El eje de ordenadas es diferente para cada ecuación, mientras que el eje de abscisas es el mismo en los tres casos y representa la fase del movimiento que, en esta ocasión, se ha representado en grados.

De la observación de estas gráficas podemos concluir que:

- Cuando la partícula se encuentra en la posición de equilibrio, es decir la elongación es cero, entonces la velocidad de dicha partícula es máxima y su aceleración cero.

Si $\omega t = 0, \pi, 2\pi, \ldots$, entonces $x = 0$, $v = \pm A\omega =$ máx. y $a = 0$

El signo $\pm$ en la expresión indica el sentido del movimiento cuando pasa por la posición de equilibrio. En un m.a.s. horizontal si el signo es positivo se dirige hacia la derecha; si es negativo se dirige hacia la izquierda.

- Cuando la partícula se encuentra en los puntos de máxima elongación, entonces la velocidad de la misma es cero y su aceleración también es máxima.

Si $\omega t = \pi/2, 3\pi/2, \ldots$, entonces $x = \pm A$, $v = 0$ y $a = \pm\omega^2 A =$ máx.

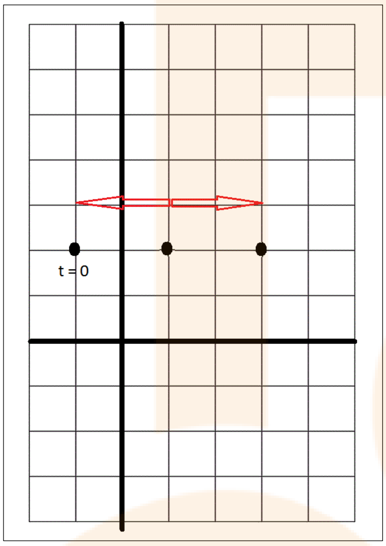
Por tanto,

Fase, ωt ($\varphi = 0$)	Elongación, x	Velocidad, v	Aceleración, a
0	Punto de equilibrio, $x = 0$	Máxima, $v = A\omega$	$a = 0$
$\pi/2$	$x = A$	$v = 0$	Máxima, $a = -A\omega^2$
π	Punto de equilibrio, $x = 0$	Máxima, $v = -A\omega$	$a = 0$
$3\pi/2$	$x = -A$	$v = 0$	Máxima, $a = A\omega^2$

2.9.- Tres problemas resueltos

① Un móvil describe un m.a.s., siendo los puntos extremos de su trayectoria el P_1 (-1,2) y P_2 (3,2), coordenadas expresadas en metros. Sabiendo que inicialmente se encuentra en P_1 y que su aceleración viene dada en todo momento por la expresión: $a = -\pi^2 \cdot x$ (SI), determinar:

a) Ecuación de la elongación en función del tiempo.
b) Posición del móvil al cabo de 1 segundo.
c) Ecuación de la velocidad en función del tiempo.
d) Velocidad del móvil al cabo de 1,5 segundos.



Datos

$a = -\pi^2 \cdot x$

Extremos de la trayectoria: P_1 (-1,2) y P_2 (3,2)

Si t=0, la partícula está en P_1

a) De acuerdo con la ecuación de aceleración del m.a.s.,

$$a = -A\omega^2 \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

Podemos afirmar, identificando, que

$$\omega = \pi \ rad/s$$

Por otra parte, en la representación se puede ver que dadas las coordenadas de los puntos extremos de vibración, la amplitud tiene un valor

$$A = 2\,m$$

En cuanto a la fase inicial, sabemos la posición de la partícula en el instante inicial (x = −A). Sustituyendo en la ecuación de la elongación,

$$-A = A \cdot \text{sen}(\pi \cdot 0 + \varphi)$$

$$-1 = \text{sen}\,\varphi$$

$$\varphi = arcsen(-1) = \frac{3\pi}{2}\ rad,\ \ o\ también,\ \ \varphi = -\frac{\pi}{2}\ rad$$

Por tanto,

$$x = 2 \cdot \text{sen}\left(\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

b) La posición cuando ha pasado un segundo será,

$$x_1 = 2 \cdot \text{sen}\left(\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = 2\text{ m}$$

Es decir, la partícula se encuentra en el punto de máxima elongación positivo (+A)

c) La ecuación de velocidad de este movimiento es

$$v = \frac{dx}{dt} = 2\pi \cdot \cos\left(\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

d) La velocidad cuando t = 1,5 s será,

$$v_{1,5} = 2\pi \cdot \cos\left(\pi \cdot 1{,}5 + \frac{3\pi}{2}\right) = -2\pi \ \ m/s$$

Esta es la velocidad máxima que corresponde al paso de la partícula por la posición de equilibrio cuando se dirige hacia el extremo P_1.

② Un oscilador vibra de forma que para t=0 se encuentra a 4 cm de la posición de equilibrio con una velocidad v_0 = 87 cm/s. Si la frecuencia del movimiento es de 2 Hz, calcula: a) La fase inicial y la amplitud del movimiento; b) La elongación y la velocidad en el instante t = 0,5 s; c) El valor máximo de la velocidad.

Datos

- Si t = 0, x_0 = 4 cm = 0,04 m y v_0 = 87 cm/s = 0,87 m/s
- f = 2 Hz; $\omega = 2\pi f = 4\pi\ rad/s$

a) FORMA 1.

Vamos a sustituir las condiciones iniciales en las ecuaciones correspondientes:

$$x = A \text{ sen } (\omega t + \varphi); \quad 0{,}04 = A \text{ sen } (4\pi \cdot 0 + \varphi); \quad 0{,}04 = A \text{ sen } \varphi$$

$$v = A\, \omega \cos (\omega t + \varphi); \quad 0{,}87 = 4\pi\, A \cos (4\pi \cdot 0 + \varphi); \quad 0{,}87 = 4\pi\, A \cos \varphi$$

Tenemos pues un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas. Para resolverlo podemos dividir ambas ecuaciones:

$$\frac{0{,}04}{0{,}87} = \frac{A \text{ sen } \varphi}{4\pi\, A \cos \varphi}; \quad 0{,}046 = \frac{1}{4\pi} \text{ tg } \varphi; \quad \text{tg } \varphi = 0{,}577$$

$$\varphi = \arctan 0{,}577 = 30° = \frac{\pi}{6}\ rad$$

En cuanto a la amplitud, sustituyendo en una de las ecuaciones, por ejemplo, en la ecuación de la elongación,

$$A = \frac{0{,}04}{\text{sen } \pi/6} = 0{,}08\ m$$

FORMA 2.

Implica en conocimiento de una nueva expresión:

$$v = \pm\, \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

Veremos aquí su deducción:

$$x = A \text{ sen } (\omega t + \varphi)$$

$$v = A\, \omega \cos (\omega t + \varphi)$$

Si

$$\text{sen}^2 \text{ a} + \cos^2 \text{ a} = 1; \quad \cos \text{a} = \pm\sqrt{1 - \text{sen}^2 \text{ a}}$$

en nuestro caso, $a = \omega t + \varphi$, luego

$$v = \pm A\omega \sqrt{1 - \text{sen}^2 (\omega t + \varphi)} = \pm\, \omega\sqrt{\text{A}^2[1 - \text{sen}^2 (\omega t + \varphi)]}$$

$$v \pm \omega\sqrt{\text{A}^2 - \text{A}^2\text{sen}^2 (\omega t + \varphi)]}$$

$$v = \pm\, \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

Conociendo esta expresión, con los datos que el problema ofrece se puede calcular en primer lugar la amplitud. Despejando en primer lugar obtenemos,

$$A = \pm\sqrt{\frac{v^2}{\omega^2} + x^2}$$

De donde

$$A = \pm\sqrt{\frac{0{,}87^2}{16\pi^2} + 0{,}04^2} = \pm 0{,}08\ m$$

Una vez conocida la amplitud, sustituimos las condiciones iniciales en la ecuación de la elongación para determinar así la fase inicial,

$$x = A \text{ sen } (\omega t + \varphi); \quad 0{,}04 = 0{,}08 \text{ sen } (4\pi \cdot 0 + \varphi); \quad 0{,}5 = \text{ sen } \varphi$$

De donde se deduce que φ = π/6 rad.

b) Conocidas las constantes del movimiento, se puede determinar la posición y la velocidad de la partícula en cualquier instante. Así, a los 0,5 s

$$x = A \text{ sen } (\omega t + \varphi) = 0{,}08 \text{ sen } \left(4\pi \cdot 0{,}5 + \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}04\, m$$
$$v = A\,\omega \cos (\omega t + \varphi) = 0{,}08 \cdot 4\pi \cos \left(4\pi \cdot 0{,}5 + \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}87\, m/s$$

Se puede observar que estos valores coinciden con los valores iniciales, es decir, el movimiento se repite cada 0,5 segundos. Este valor es el periodo del movimiento, como se pude comprobar a partir del dato de la frecuencia,

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{2} = 0{,}5\, s$$

c) La velocidad máxima del m.a.s. se da cuando la partícula pasa por la posición de equilibrio, es decir, cuando la fase del movimiento es, en un ciclo completo, 0 o π radianes. Entonces,

$$v_{max} = \pm A\,\omega = 0{,}08 \cdot 4\pi = 1\, m/s$$

---

③ Una partícula de 250 g de masa vibra con m.a.s. de forma que, para t = 0, pasa por la posición de equilibrio en sentido negativo. Si tarda 1 minuto y 40 segundos en dar 125 oscilaciones completas y la distancia recorrida en una oscilación completa es de 6,48 m, calcula: a) Las constantes del movimiento; b) La ecuación del movimiento, expresada en seno y coseno; c) La velocidad y aceleración máximas.

Datos:

- masa que vibra = 250 g (dato innecesario en un problema de cinemática)
- si t = 0, x = 0 (hacia el extremo negativo)
- 125 oscilaciones completas en 1 minuto y 40 segundos, $f = \frac{125}{100} = 1{,}25\, Hz$
- Distancia recorrida en una oscilación, 6,48 m.

a) Las constantes del movimiento son la amplitud, A, la frecuencia angular, ω, y la fase inicial, φ.

En una oscilación completa se recorre una distancia igual a cuatro veces la amplitud, por tanto,

$$A = \frac{6{,}48}{4} = 1{,}62\, m$$

La frecuencia angular es,

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 1{,}25 = 7{,}85\, rad/s$$

Para calcular la fase inicial, sustituimos los datos de t = 0 en la ecuación de la elongación,

$$x = A \text{ sen } (\omega t + \varphi); \qquad 0 = A \text{ sen } \varphi$$

Si la partícula inicia el movimiento dirigiéndose hacia el extremo negativo la solución es

$$\varphi = \pi \ \ rad$$

b) Ecuación del movimiento expresada en seno:

$$x = 1{,}62 \text{ sen } (7{,}85t + 3{,}14)$$

Para cambiar entre seno↔coseno, debemos recordar que,

$$\cos\alpha = \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

Por tanto, la ecuación del movimiento expresada en coseno será:

$$x = 1{,}62\cos\left(7{,}85t + \pi - \frac{\pi}{2}\right) = 1{,}62\ \cos\left(7{,}85t + \frac{\pi}{2}\right)$$

c) La velocidad máxima es

$$v_{max} = \pm A\,\omega = 1{,}62 \cdot 7{,}85 = \pm 12{,}72\ m/s$$

El valor el positivo corresponde al paso de la partícula hacia el extremo positivo y el valor negativo al paso por el mismo lugar en sentido negativo.

$$a_{max} = \pm\, A\,\omega^2 == \pm\, 99{,}82\ m/s^2$$

El valor positivo corresponde al paso de la partícula por el extremo negativo y el valor positivo al paso de la partícula por el extremo positivo.

3) Oscilador armónico.

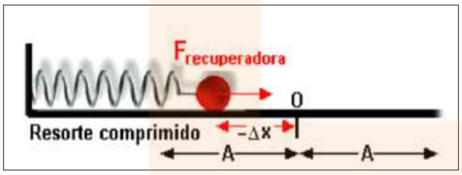
3.1.- Dinámica del m.a.s.

① Consideraciones iniciales:

- Las características de la fuerza recuperadora causante del m.a.s. ya han sido analizadas (pág. 4).

- En el estudio cinemático se ha visto que la partícula acelera cuando se dirige hacia la posición de equilibrio, mientras que su movimiento es retardado cuando se dirige hacia los extremos. Por tanto, la fuerza que se ejerce sobre la partícula que vibra tiene tendencia a llevar a la partícula a la posición de equilibrio (fuerza recuperadora).

② Expresión para la fuerza recuperadora en un resorte horizontal:



Partiendo de la segunda ley de la Dinámica,

$$F = m\,a$$

Teniendo en cuenta la expresión de la aceleración del m.a.s.,

$$F = m\,(-\omega^2\,x)$$

Como la masa, m, y la pulsación, ω, son magnitudes constantes, podemos escribir,

$$F = -\,k\,x$$

Donde,

$$k = m\,\omega^2$$

Vemos pues que la ley de Hooke ($F = -k\,x$), una ley experimental, se puede deducir a partir del principio fundamental de la Dinámica.

③ Observaciones:

A partir de las expresiones anteriores podemos obtener la relación entre la pulsación, el periodo y la masa del cuerpo que vibra:

$$k = m\,\omega^2 \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\textit{además} \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

El periodo de un oscilador sometido a una fuerza elástica depende sólo de la constante del resorte y de la masa que vibra, pero no depende de la amplitud del movimiento. Por tanto, un mismo resorte tarda el mismo tiempo en hacer oscilaciones con amplitudes diferentes.

④ Dos problemas resueltos.

Cierto resorte tiene sujeto un cuerpo de 2 kg en su extremo libre y se requiere una fuerza de 8 N para mantenerlo a 20 cm del punto de equilibrio. Si el cuerpo realiza un m.a.s. al soltarlo, halla: a) la constante recuperadora del resorte; b) el periodo de su oscilación.

<u>Datos:</u>

· m = 2 kg
· $F_{tracción} = 8\ N = F_{recuperadora}$
· A = 20 cm = 0,2 m

a) En el instante en que se suelta el muelle podemos aplicar la ley de Hooke:

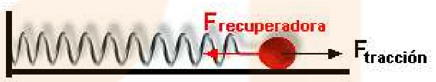
$$F_t = F_e$$

El módulo de la fuerza de tracción es igual al módulo de la fuerza recuperadora, es decir,

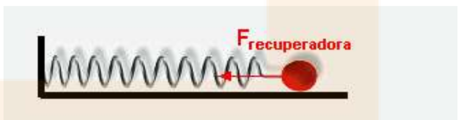
$$F_t = 8 = k \cdot x$$

El alargamiento del muelle (cuando la fuerza de tracción es de 8 N) es de 0,2 m, por tanto,

La situación en el instante inmediato a soltar el cuerpo es:



La situación una vez soltado el muelle, inicio del m.a.s., es:



$$k = \frac{8}{0{,}2} = 40\ N \cdot m^{-1}$$

b) El periodo de vibración de un resorte viene dado por la expresión

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Por tanto,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2}{40}} = 1{,}4\ s$$

Un cuerpo unido a un resorte horizontal oscila con m.a.s. sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Si se duplica la masa del cuerpo, ¿cómo variarán la pulsación, el periodo, la velocidad máxima y la aceleración máxima?

Datos:

Si la masa del cuerpo que vibra es m, las expresiones necesarias son:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad f_1 = \frac{1}{T_1} \qquad v_{max_1} = \pm A\ \omega_1 \qquad a_{max_1} = \pm A\ \omega_1^2$$

Si la masa se duplica, 2m, las expresiones serían:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{2m}} \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}} \qquad f_2 = \frac{1}{T_2} \qquad v_{max_2} = \pm A\ \omega_2 \qquad a_{max_2} = \pm A\ \omega_2^2$$

Para ver cómo varían cada una de estas magnitudes las dividimos entre sí. Empezando por la pulsación,

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sqrt{\frac{m}{k}}}{\sqrt{\frac{k}{2m}}} = \sqrt{2} \ \rightarrow\ \omega_1 = \sqrt{2}\ \omega_2$$

En cuanto al periodo,

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}{2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ \rightarrow\ T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\ T_2$$

La relación entre las frecuencias será inversa a la relación entre los periodos, es decir,

$$f_1 = \sqrt{2}\ f_2$$

En cuanto a la velocidad máxima,

$$\frac{v_{max_1}}{v_{max_2}} = \frac{\pm A\ \omega_1}{\pm A\ \omega_2} = \frac{\sqrt{2}\ \omega_2}{\omega_2} \ \rightarrow\ v_{max_1} = \sqrt{2}\ v_{max_2}$$

Finalmente, la aceleración máxima,

$$\frac{a_{max_1}}{a_{max_2}} = \frac{\pm A\ \omega_1^2}{\pm A\ \omega_2^2} = \frac{2\omega_2^2}{\omega_2^2} \ \rightarrow\ a_{max_1} = 2\ a_{max_2}$$

3.2.- Energía del oscilador armónico

Si el oscilador armónico está en movimiento es claro que debe tener una energía cinética pues es la asociada al movimiento de los cuerpos.

Prescindiendo de la vibración en vertical que también daría lugar a una energía potencial gravitatoria, un oscilador armónico tiene una "Energía potencial elástica" ya que el movimiento armónico es consecuencia de una fuerza conservativa (una fuerza es conservativa si el trabajo que realiza sobre un objeto en movimiento entre dos puntos es independiente de la trayectoria que el objeto tome entre los puntos. En otras palabras, el trabajo realizado sobre un objeto por una fuerza conservativa depende sólo de las posiciones inicial y final del objeto).

Lo mencionado en los dos párrafos anteriores se puede esquematizar de la siguiente manera:

Movimiento	Armónico	Simple	
Una masa m se mueve con una velocidad variable	Provocado por una fuerza conservativa	Horizontal	Vertical
Tiene energía cinética	Tiene energía potencial elástica		Tiene energía potencial gravitatoria
E_c	$E_{p(e)}$		$E_{p(g)}$
Energía del oscilador = $E_c + E_{p(e)}$ $(+ E_{p(g)})$			

3.2.1.- Energía cinética del oscilador armónico.

$$E_c = \frac{1}{2}\, m\, v^2$$

Si

$$v = A\, \omega \cos \omega t$$

donde se ha considerado, para simplificar que $\varphi = 0$, entonces,

$$E_c = \frac{1}{2}\, m\, A^2\, \omega^2 \cos^2 \omega t$$

Si $\omega^2 = k/m$, entonces,

$$E_c = \frac{1}{2}\, A^2\, k \cos^2 \omega t$$

Como $cos^2\, x + sen^2\, x = 1$, entonces $cos^2\, x = 1 - sen^2\, x$, luego

$$E_c = \frac{1}{2}\, A^2\, k\, [1 - \text{sen}^2 \omega t] = \frac{1}{2}\, k\, A^2 - \frac{1}{2}\, k\, A^2 \text{sen}^2 \omega t$$

Si $x = A$ sen ωt, entonces

$$E_c = \frac{1}{2}\, k\, A^2 - \frac{1}{2}\, k\, x^2 = \frac{1}{2}\, k\, (A^2 - x^2)$$

3.2.2.- Energía potencial elástica.

La energía potencial elástica es el trabajo que hay que realizar para desplazar el resorte una distancia *x*, venciendo la fuerza recuperadora. Este trabajo no se puede calcular a partir de la expresión

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = F\, d \cos\alpha$$

ya que la fuerza elástica no es constante sino variable.

El procedimiento que se sigue es calcular el trabajo con la expresión anterior pero para un desplazamiento infinitesimal, *dx*. En ese desplazamiento tan pequeño la fuerza elástica se puede considerar constante. A continuación se calcula el trabajo en el siguiente desplazamiento infinitesimal y así sucesivamente hasta cubrir todo el recorrido. El trabajo total será

$$E_{p(e)} = W_T = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots + W_n = \sum_{i=1}^{n} W_i$$

Cuando el desplazamiento es infinitesimal el símbolo sumatorio se cambia por el de la integral, es decir:

$$E_{p(e)} = W_T = \int_0^x \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

Como la fuerza elástica se opone a la posición medida desde el punto de equilibrio, el ángulo que forman es de 180º.

$$E_{p(e)} = W_T = \int_0^x \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_0^x -k\, x\, dx \cos\pi = k \int_0^x x\, dx = \left[k\,\frac{x^2}{2}\right]_0^x$$

En definitiva:

$$E_{p(e)} = \frac{1}{2}\, k\, x^2$$

3.2.3.- Energía mecánica.

Sin tener en cuenta energía potencial gravitatoria, por ejemplo, en un resorte horizontal,

$$E_m = E_c + E_{p(e)}$$

$$E_m = \frac{1}{2}\, k\, (A^2 - x^2) + \frac{1}{2}\, k\, x^2 = \frac{1}{2}\, k\, A^2$$

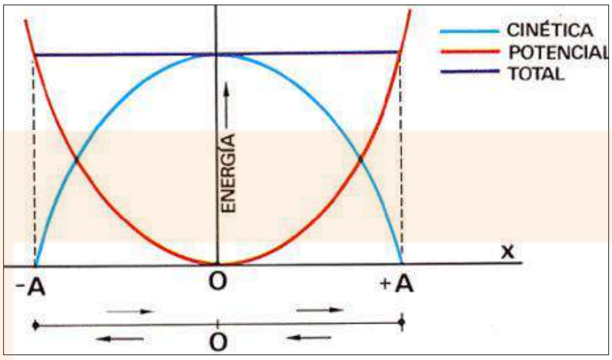
Consideraciones:

1) En un m.a.s. la energía mecánica no depende de la posición de la partícula que vibra. Sólo depende de las características del oscilador (k) y de la amplitud (A).

Obviamente esta consideración es sólo para el oscilador. Si éste está colocado de forma que la gravedad influya, entonces la energía mecánica también tendrá una componente de energía potencial gravitatoria.

2) En ausencia de rozamientos, como ocurre en el m.a.s., la energía mecánica permanece constante.

3) Si representamos gráficamente las variaciones de la energía cinética, potencial y la mecánica, vemos que,



· Podemos ver que la parábola que representa la variación de la energía cinética del oscilador durante una vibración es negativa.

- La energía cinética es máxima cuando la velocidad es máxima, es decir, en el punto de equilibrio.

- La energía cinética es cero cuando el cuerpo vibrante está detenido, es decir, en los extremos de vibración, cuando x = A.

· La parábola que representa la variación de la energía potencial elástica del oscilador durante una vibración es positiva.

- La energía potencial elástica es máxima cuando la elongación es máxima, es decir, en los extremos de vibración.

- La energía potencial elástica es nula cuando la elongación es cero, es decir, en el punto de equilibrio.

· Un oscilador es un sistema conservativo. La energía potencial aumenta a medida que la energía cinética disminuye, y viceversa. Existen dos valores de elongación para los cuales ambas energías son iguales. Se puede demostrar que esto ocurre cuando

$$x = \pm \frac{A}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad E_c = E_{p(e)} = \frac{1}{4}\, k\, A^2$$

3.2.4.- Dos problemas resueltos

Disponemos de un muelle que se alarga 5 cm cuando se cuelga de él una masa de 1,0 kg. Colocamos después este muelle unido a una masa de 500 g sobre una mesa horizontal sin rozamiento. La masa se separa 3 cm de su posición de equilibrio y se deja vibrar sobre el eje horizontal. Calcula: a) la constante de recuperación del resorte; b) la energía potencial en el punto de máxima deformación en horizontal; c) La energía cinética cuando x = 2 cm; d) la velocidad de la partícula en el punto mencionado en el apartado anterior.

Datos:

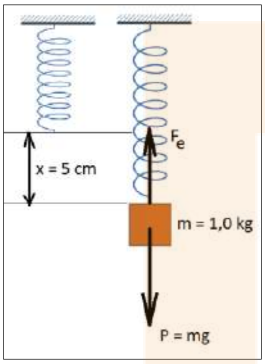
· En vertical:

· x = 5 cm = 0,05 m, cuando se cuelga una masa de 1 kg.

· En Horizontal:

· m = 500 g = 0,5 kg

· A = 3 cm = 0,03 m



a) En la figura adjunta se representa la situación en vertical. En primer lugar el muelle sin estirar, en posición de equilibrio. Luego la situación al colgar una masa de 1 kg, situación también de equilibrio en la que podemos establecer que el peso y la fuerza elástica (recuperadora) son iguales en módulo:

$$P = F_e$$

$$mg = kx$$

$$k = \frac{mg}{x} = \frac{1 \cdot 9{,}8}{0{,}05} = 196 \ N \cdot m^{-1}$$

b) La máxima deformación se produce cuando x = A. En este punto la energía potencial elástica coincide con la energía mecánica de la partícula vibrante. Por tanto,

$$E_m = E_{p(e)} = \frac{1}{2}\,k\,x^2 = \frac{1}{2}\,k\,A^2 = \frac{1}{2} \cdot 196 \cdot 0{,}03^2 = 0{,}088\,J$$

c) Si la elongación vale 2 cm, la energía cinética será (forma 1):

$$E_c = \frac{1}{2}\,K\,(A^2 - x^2) = \frac{1}{2} \cdot 196 \cdot (0{,}03^2 - 0{,}02^2) = 0{,}049\,J$$

Otra forma puede ser calcular la energía potencial cuando la elongación es de 2 cm y después calcular la energía cinética a partir de la energía mecánica:

$$E_{p(e)} = \frac{1}{2}\,k\,x^2 = \frac{1}{2} \cdot 196 \cdot 0{,}02^2 = 0{,}039\,J$$

$$E_m = E_c + E_{p(e)}; \quad E_c = 0{,}088 - 0{,}039 = 0{,}049\,J$$

d) La velocidad cuando la elongación vale 2 cm se pude calcular rápidamente si se conoce la energía cinética de la partícula en ese punto,

$$E_c = \frac{1}{2}\,m\,v^2; \quad v = \pm\sqrt{\frac{2\,E_c}{m}} = \pm\sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}049}{0{,}5}} = \pm 0{,}443 \ m \cdot s^{-1}$$

Dos partículas de masas m y m' (m' > m) están animadas de m.a.s. de igual amplitud, unidas a resortes de la misma constante k; a) ¿qué partícula tiene mayor energía mecánica? b) ¿Cuál de las dos partículas tiene mayor energía cinética al pasar por la posición de equilibrio? c) ¿Cuál de las dos pasa por la posición de equilibrio a mayor velocidad?

---

a) La expresión de la energía mecánica de un cuerpo con m.a.s. es

$$E_m = \frac{1}{2}\,k\,A^2$$

Por tanto, la energía mecánica no depende de la masa del cuerpo, sólo depende de la constante recuperadora k y de la amplitud A, magnitudes que, según el enunciado no cambian.

b) Cuando una partícula con m.a.s. pasa por la posición de equilibrio su energía cinética es máxima pues en este punto la velocidad de la partícula es máxima. En este punto la partícula no tiene energía potencial elástica y, por tanto,

$$E_m = E_c$$

La respuesta es pues que las dos partículas tienen la misma energía cinética al pasar por la posición de equilibrio pues la energía mecánica no depende de la masa de la partícula que vibra tal como se ha explicado en el apartado a).

c) La velocidad de la partícula en la posición de equilibrio es máxima, su expresión es:

$$v_{max} = \pm A\,\omega$$

Donde ω es la pulsación del movimiento, que se puede calcular a partir de la siguiente expresión:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Donde m es la masa de la partícula vibrante y k es la constante recuperadora del muelle. Por tanto,

$$v_{max} = \pm A\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Si se cambia la masa por m' la expresión será,

$$v'_{max} = \pm A\sqrt{\frac{k}{m'}}$$

Como m' > m, $v'_{max} < v_{max}$, pues la masa aparece en el denominador. Es decir, la partícula de menor masa pasará más rápida por la posición de equilibrio.

Este resultado es congruente con el obtenido en el apartado b). Las energías cinéticas de las dos partículas son iguales a pesar de que la de menor masa pase a mayor velocidad. Los valores de energía cinética se igualan al compensarse el aumento de la masa de la partícula con la disminución de la velocidad de la misma.

Ampliación del problema

También varía, al aumentar la masa, la pulsación ω, y, por tanto, la frecuencia.

$$E_m = \frac{1}{2}\,k\,A^2 = \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,A^2$$

en esta expresión podemos ver que si la masa aumenta la pulsación disminuye para mantener así constante la energía mecánica. También, si la pulsación disminuye, la frecuencia disminuye ya que,

$$\omega = 2\pi f$$

4) Amortiguamiento

Hasta ahora se ha estudiado el m.a.s. de sistemas ideales que, bajo la acción de una fuerza recuperadora, se considera que pueden oscilar indefinidamente. Sin embargo, en los sistema reales, como una persona que se columpia, o una cuerda de guitarra, la amplitud de las oscilaciones decrece. Esto se debe a la pérdida de energía mecánica, principalmente por la intervención de fuerzas de rozamiento. En este caso decimos que el movimiento está amortiguado y que el cuerpo realiza oscilaciones amortiguadas.

Un movimiento oscilatorio es amortiguado si la energía mecánica de su movimiento disminuye gradualmente; como consecuencia, aunque se mantienen las oscilaciones, éstas disminuyen su amplitud con el tiempo.

La disminución de la amplitud con el tiempo suele ser de tipo exponencial

$$x = A\, e^{-\gamma\, t}\, \mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

En los sistemas osciladores reales la amplitud de las oscilaciones disminuye debido a la disipación de la energía. Ahora bien, es posible mantener dicha amplitud si un agente externo le suministra la energía que pierde por rozamiento. En este caso decimos que el sistema realiza oscilaciones forzadas.

Llamamos oscilaciones forzadas a las producidas en un sistema oscilante debido a la energía suministrada desde el exterior; dicho sistema es un oscilador forzado.

Si la acción de las fuerzas externas compensa exactamente la de las fuerzas disipativas que reducen la amplitud de las oscilaciones, es posible mantener constante la amplitud de éstas en el sistema oscilador.

Un ejemplo de este tipo de sistemas es el reloj de péndulo, donde la amplitud del movimiento del péndulo se mantiene gracias a un resorte en espiral al que está conectado. Otro ejemplo muy común es una persona que se mantiene en movimiento en un columpio y se impulsa únicamente lo suficiente para compensar las pérdidas de energía por rozamiento.

Si la frecuencia con que actúa una fuerza externa coincide con la frecuencia natural del oscilador, la energía absorbida por éste es máxima. Entonces decimos que ésta es una frecuencia resonante y que el oscilador entra en resonancia.

La resonancia no se produce porque la fuerza externa sea muy grande, sino porque actúa con la misma frecuencia que la natural del sistema oscilante. En el caso de que la energía externa llegue al oscilador con más rapidez que lo que tarda en disiparse, lo que ocurre es que aumenta excesivamente la amplitud de las oscilaciones y puede llegar a producirse la rotura del oscilador o a perjudicar seriamente su estructura interna.

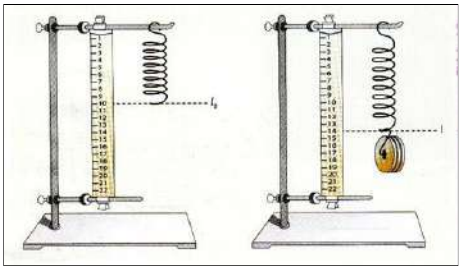
5) Estudio de algunos osciladores mecánicos

5.1.- Masa colgada de un resorte vertical

① Situación inicial: un muelle de constante elástica k y longitud l_o está suspendido de un extremo. Inicialmente el muelle no está deformado.

② Si colgamos una masa del extremo del muelle éste se estirará hasta una longitud l, el alargamiento que experimenta el muelle es

$$\Delta l = l - l_o$$



En esta posición el sistema está en equilibrio. La posición de equilibrio de un muelle en vertical es muy útil para determinar la constante elástica de muelle, siempre que se conozca la masa que se cuelga y el estiramiento del muelle respecto de la posición inicial. En esta situación, como se ha visto en el problema de la página 22, se produce un equilibrio, la fuerza recuperadora (ley de Hooke) que tiende a llevar el muelle a la posición inicial se iguala con la fuerza peso. Por tanto, podemos igualar los módulos de ambas fuerzas,

$$P = F_e \;; \quad P = k\,\Delta l$$

$$m\,g = k\,\Delta l$$

Esta expresión que se suele utilizar para determinar k (método estático),

$$k = \frac{mg}{\Delta l}$$

③ Si, partiendo de la situación ②, aplicamos verticalmente hacia abajo una fuerza externa, F_{ext}, el muelle se deforma una cantidad adicional que llamaremos A. Mientras apliquemos la fuerza externa, el muelle permanece en equilibrio, por lo que el módulo de la fuerza recuperadora se incrementa en una cantidad igual a $k{\cdot}A$.

Al soltar el cuerpo, como la fuerza recuperadora es mayor que el peso, comienza a desplazarse hacia la posición de equilibrio, de forma que inicia un m.a.s. en el que el módulo de la fuerza neta, F, que actúa sobre el cuerpo es,

$$F = F_e - P = k\,\Delta l + k\,A - k\,\Delta l = k\,A$$

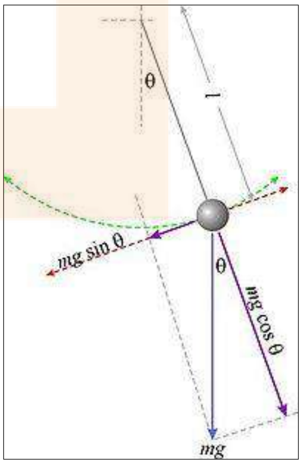
Este es módulo de la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo al iniciar el m.a.s. Como sabemos que el sentido de la fuerza recuperadora es contrario al del desplazamiento del muelle, es más correcto expresarla vectorialmente

$$\vec{F} = -k\,\vec{A} \quad o \quad F = -k\,A$$

Esta última expresión permite conocer la fuerza máxima al iniciarse el movimiento. El resto de ecuaciones que permiten estudiar el movimiento armónico que se produce ya se han visto a lo largo del tema.

5.2.- Péndulo simple

Un péndulo simple es un oscilador fácil de observar que permite comprobar experimentalmente las características del m.a.s.



Un péndulo simple lo puede formar un cuerpo colgado de un hilo inextensible y que se mueve sin rozamiento. El hilo debe ser relativamente largo para que el ángulo desviado, θ, sea pequeño.

El análisis de las fuerzas ejercidas sobre la masa oscilante ya se ha realizado en la página 4. La fuerza que no se equilibra, $F_{tangencial}$, y que provoca el m.a.s. es,

$$F_t = m\,g\,\text{sen}\,\theta$$

Para ángulos muy pequeños se puede aplicar la siguiente aproximación,

$$\theta \cong \operatorname{sen} \theta$$

Donde θ debe venir medido en radianes. El límite está en torno al ángulo de 15°,

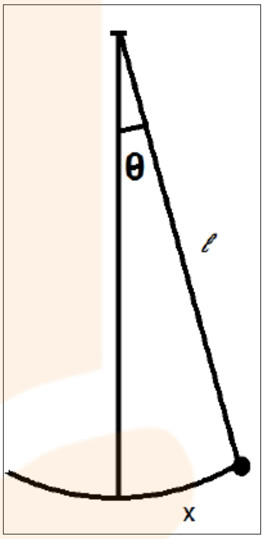
$$15° \rightarrow 0,26\, rad.$$

$$sen\, 0{,}26 = 0{,}2571$$

Así, para ángulos de desviación pequeños,

$$F_t = m\, g\, \theta$$

Como arco = ángulo · radio,



$$x = \theta \cdot l$$

$$F_t = m\, g\, \frac{x}{l}$$

Este es el módulo de la fuerza recuperadora en un péndulo simple de oscilaciones de ángulo pequeño. Al igual que en el muelle, sabemos que el sentido de la fuerza recuperadora es contrario al del desplazamiento del péndulo. Así es más correcto expresarla vectorialmente como

$$F_t = -\frac{m\, g}{l} x$$

Como *m, g* y *l* son constantes, la expresión es similar a la ley de Hooke

$$F = -k\, x \quad donde \quad k = \frac{m\, g}{l}$$

En el péndulo la fuerza recuperadora, F_t, responsable del m.a.s. es de naturaleza gravitatoria. Esta fuerza provoca un movimiento acelerado que, de acuerdo con la ley de Newton,

$$a = \frac{F_t}{m} = \frac{-k}{m}\, x$$

$$a = -\omega^2 x$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Otras consideraciones sobre el péndulo:

- En el movimiento pendular x es el arco correspondiente al ángulo θ y representa la elongación o desplazamiento en un momento dado. Si la longitud del péndulo es grande, el arco es prácticamente una recta.

- La constante $k = \frac{m\, g}{l}$ tiene unidades de N·m^{-1}, como si fuera una constante recuperadora de un resorte, pero sus significados son distintos. Así hemos visto que en un resorte el periodo de oscilación viene dado por,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Si desarrollamos esta expresión en un péndulo,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{m\,g}{l}}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

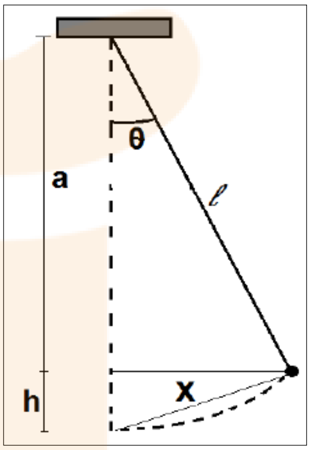
Como vemos, el periodo del m.a.s. de un resorte depende de la masa que oscila y de la naturaleza del propio resorte, mientras que el periodo de un péndulo no depende de la masa que cuelga sino de la longitud del péndulo y del lugar en el que se encuentre.

5.3.- Un problema resuelto

Un péndulo simple está constituido por una masa puntual de 0,5 kg que cuelga de un hilo de 1 m de longitud. Oscila con una amplitud de 8 grados en un lugar con gravedad igual a 9,8 m/s^2.
Determina: a) Su energía potencial máxima; b) su velocidad máxima.

Datos:

m = 0,5 kg
ℓ = 1 m
θ = 8º
g = 9,8 m/s^2



a) *"resolución gravitatoria"*

La energía potencial gravitatoria de la masa m viene dada por

$$E_p = m\,g\,h$$

donde h = ℓ – a = 1 – a. Por otra parte,

$$a = l\cos 8 = 1\cos 8 = 0{,}990\ m$$

Por tanto, h = 0,01 m y, en consecuencia,

$$E_p = m\,g\,h = 0{,}5 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}01 = 0{,}049\ J$$

"resolución m.a.s."

Como el ángulo que da la amplitud es inferior a 15º, el movimiento del péndulo se asemeja a un m.a.s. Por tanto, podemos asimilar su energía potencial a la expresión de la energía potencial de un resorte, es decir,

$$E_p = \frac{1}{2}\,K\,x^2$$

Donde

$$k = \frac{m\,g}{l} = \frac{0{,}5 \cdot 9{,}8}{1} = 4{,}9\ \ N/m$$

Por otra parte, el esquema se ha exagerado mucho porque el arco descrito por la masa y x prácticamente deben coincidir si el ángulo es muy pequeño, es decir,

$$x = \ \theta \cdot l = 0{,}14 \cdot 1 = 0{,}14\ m$$

Donde el ángulo de 8º se ha puesto en radianes.

En definitiva,

$$E_p = \frac{1}{2}\,K\,x^2 = \frac{1}{2} \cdot 4{,}9 \cdot 0{,}14^2 = 0{,}048\ J$$

b) La energía potencial calculada en el apartado anterior corresponde también con la energía mecánica del oscilador ya que la posición de la masa oscilante es uno de los extremos de vibración.

La velocidad máxima del oscilador tiene lugar cuando éste pasa por la posición de equilibrio, en ese punto el oscilador no tiene energía potencial pues ésta se ha transformado en energía cinética, cuyo valor corresponderá, por tanto, a la energía mecánica del oscilador. Por tanto, en la posición de equilibrio,

$$E_m = E_c = 0{,}049\ J$$

A partir de la expresión de la energía cinética, despejamos la velocidad,

$$v = \sqrt{\frac{2\ E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}049}{0{,}5}} = \pm\ 0{,}45\ m/s$$

Estos apuntes se finalizaron el 14 de octubre de 2010
en Villanueva del Arzobispo, Jaén (España).
Realizados por: Felipe Moreno Romero
fresenius1@gmail.com
http://www.escritoscientificos.es

FÍSICA 2º BACHILLERATO

BLOQUE TEMÁTICO: VIBRACIONES Y ONDAS

MOVIMIENTO ONDULATORIO.

Contenidos:

---

1) INTRODUCCIÓN. DEFINICIONES.

① Veamos ejemplos de perturbaciones producidas en un medio material que se propagan a través de dicho medio:

- Al lanzar una piedra a una charca, se produce una perturbación en el punto de impacto y esta perturbación se propaga por todo el líquido que hace de "soporte" para que la perturbación se propague. Este es un ejemplo de *onda viajera*, cuando la perturbación, al cabo de cierto tiempo, alcanza todos los puntos del medio que no tiene límites.

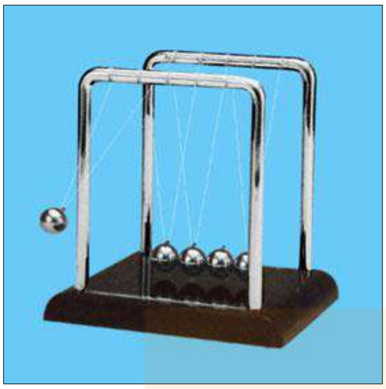
- Al tirar de una cuerda de guitarra, se produce una perturbación que se propaga por toda la cuerda que hace de "soporte" para que dicha perturbación se propague. Este es un ejemplo de *onda estacionaria*, cuando la perturbación está limitada mediante fronteras a una región específica del medio.

② Una onda consiste en la propagación de energía.

Una onda es la transmisión de una perturbación (energía) a través de un medio, pero el medio "no se propaga", es decir, no hay transmisión de materia. Un par de ejemplos:

- Al lanzar una piedra a una charca se producen ondas. Cuando una onda llega a un corcho flotando éste sube y baja pero, una vez que la onda ha pasado el corcho se encuentra en la misma posición, es decir, no se desplaza con la onda.

- "Como las ondas que se forman por el viento en un campo de mies, donde vemos correr las ondas del campo mientras que las espigas permanecen en su lugar" *Leonardo da Vinci*.



Para entender el fenómeno de propagación de energía a través de un medio sin que exista propagación de materia podemos analizar la siguiente situación representada en la figura.

- Al principio la primera bola es elevada manualmente, gana energía potencial.

- Al soltar la bola pierde energía potencial pues cae, pero a cambio va ganando cada vez más energía cinética.

- Al impactar la primera bola con la segunda aquella pierde toda su energía cinética, que se transmite a lo largo de las siguientes bolas.

- Al llegar a la bola nº 5, que está libre, adquiere la misma energía cinética que tenia la bola nº 1 en el momento del impacto.

- Finalmente la bola nº 5 se elevará hasta alcanzar la misma altura que tenía la bola nº 1 al iniciar todo el proceso.

Es decir, podemos decir que toda la energía potencial inicial de la bola nº 1 se ha transmitido a través del medio material acero hasta la bola nº 5, pero, el medio material (bolas 2 a 4) ha permanecido siempre en el mismo sitio (es evidente que con el tiempo hay pérdidas de energía por transformación de ésta en calor que hacen que la bola nº 5 no adquiera en realidad toda la energía potencial de la bola nº 1).

Si en lugar de hacer este experimento con bolas de acero se hubiera hecho con bolas de plastilina el resultado, como podemos imaginar, no sería el mismo.

③ Consecuencias de la transmisión de una onda por un medio:

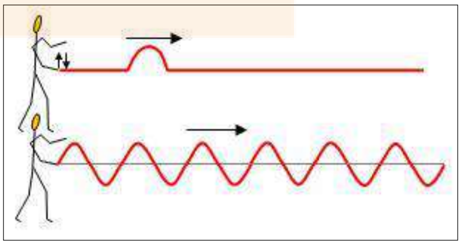
-*Una onda es la propagación de energía entre dos puntos de un medio sin que exista transmisión de materia entre dichos puntos*.

-La transmisión de energía (onda) se inicia en una partícula del medio llamada *foco emisor* o *centro emisor*.

-El medio de propagación ha de ser elástico (el acero es un medio elástico, la plastilina no).

-Las partículas intermedias no se desplazan mientras se transmite la energía, pero dichas partículas vibran en torno a su posición de equilibrio.

④ Pulso y tren de ondas.



-Un *pulso* es una onda de poca duración, como el primer caso de la figura adjunta. Cada partícula de la cuerda está realizando un solo movimiento ↑↓, empezando por la primera (foco emisor), solo que cada una lo hace en un tiempo determinado.

- Un *tren de ondas* tiene lugar si el foco emisor realiza el mismo movimiento continuadamente en el tiempo, se produce entonces una sucesión de pulsos, es decir, un tren de ondas.

⑤ Nuevas ideas importantes

- El movimiento de cada partícula del medio es un movimiento armónico simple en torno a su posición de reposo o equilibrio.

- Cada partícula induce este m.a.s. a su vecina, empezando por la primera (foco emisor).

- Las partículas no se desplazan de su posición, vibran en torno a ella.

- Las leyes de Newton no se pueden aplicar al movimiento de la onda ya que no hay una masa que se esté desplazando.

- El movimiento de una onda es uniforme, su velocidad es constante.

2) TIPOS DE ONDAS

Se pueden utilizar diferentes criterios de clasificación:

1) Según el tipo de energía que se propaga.
2) Según la relación entre la dirección de propagación y la dirección de vibración.
3) Según el número de dimensiones en que se propaga la energía.

Según el tipo de onda que se propaga.

Podemos distinguir entre ondas mecánicas y ondas electromagnéticas.

Ondas mecánicas o materiales

- La energía que se propaga es energía mecánica, originada por un oscilador armónico.
- Necesitan de un medio material para su propagación.
- Ejemplos: ondas en la superficie del agua, en cuerdas, en muelles, el sonido, etc.
- El movimiento ondulatorio se transmite entre las partículas del medio porque entre ellas:
    - Existe una fuerza recuperadora de tipo elástico que tiende a mantener las partículas unidas (fuerza de naturaleza electromagnética).
    - O bien, como ocurre en las ondas en el agua, la fuerza recuperadora es la gravedad, que tiende a que el agua vuelva a su posición de equilibrio (horizontal).

Ondas electromagnéticas

- Se propaga energía electromagnética, producida por oscilaciones de cargas eléctricas aceleradas.
- Están formadas por campos eléctricos y magnéticos periódicos y auto-sostenidos.
- Se propagan por medios materiales, y también por el vacío, es decir, no precisan de un medio material para su propagación.
- Son ondas electromagnéticas todas aquellas comprendidas en el llamado espectro electromagnético (ondas de radio y TV, microondas, ondas infrarrojas, luz visible, ultravioleta, rayos X y rayos gamma).

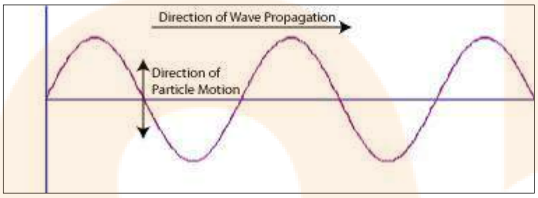
Según la relación entre la dirección de propagación y la dirección de vibración.

Toda onda lleva asociados dos movimientos, el movimiento de propagación de la onda (energía) y el movimiento vibratorio de las partículas del medio (o de los campos eléctricos y magnéticos en las ondas electromagnéticas).

Atendiendo a lo mencionado en el párrafo anterior las ondas se pueden clasificar:

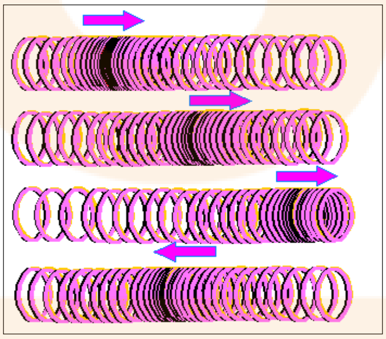
Ondas transversales

- La dirección de propagación del movimiento ondulatorio es perpendicular a la dirección de vibración de las partículas del medio.
- Son ondas transversales las que tienen lugar en una cuerda y las ondas electromagnéticas.
- Una onda transversal es una sucesión de crestas y valles:



Ondas longitudinales

- También se suelen llamar ondas de presión
- La dirección de propagación del movimiento ondulatorio coincide con la dirección de vibración de las partículas.
- Son ondas longitudinales las que tienen lugar en un muelle que se comprime en una parte en horizontal (ver figura) o las ondas sonoras.
- Una onda longitudinal es una sucesión de contracciones y dilataciones:



Según el número de dimensiones en que se propaga la energía.

Ondas unidimensionales, si la energía se propaga en una dirección, como ocurre, por ejemplo, en una onda que se propaga por una cuerda.

Ondas bidimensionales, si la energía se propaga en dos direcciones, en un plano, como las ondas que se propagan por la superficie del agua.

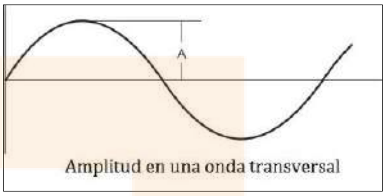
Ondas tridimensionales, si la energía se propaga en tres direcciones, en el espacio, como ocurre con el sonido.

3) MAGNITUDES CARACTERÍSTICAS DE LAS ONDAS

Se distinguirán las siguientes: amplitud, longitud de onda, frecuencia, periodo, velocidad de propagación y número de onda.

Amplitud

Es la máxima elongación con que vibran las partículas del medio. Se suele representar con la letra A y se mide, en el S.I., en metros.

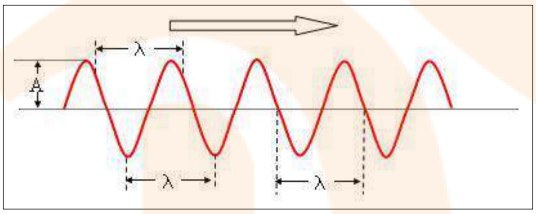


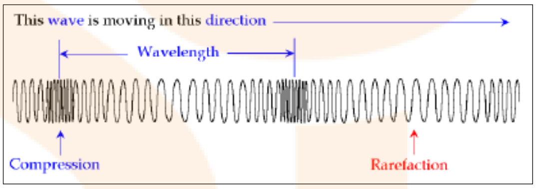
Longitud de onda

Su símbolo es "λ" y, en el S.I., se mide en metros.

Definición 1.
Es la distancia que se ha propagado la onda en un periodo, es decir, mientras el centro emisor ha efectuado una vibración completa.
Definición 2.
Es la distancia entre dos puntos del medio que vibran en fase.

En la figura se presenta la longitud de una onda transversal y de una onda longitudinal.

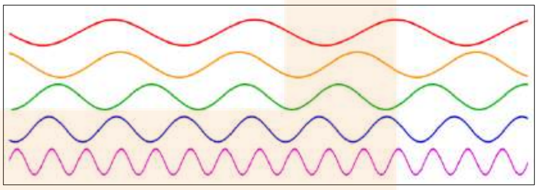




Frecuencia

Su símbolo es "f", si bien algunas ramas de la física (espectroscopia, física cuántica,...) se suele utilizar "ν". En el S.I. se mide en Hertzios (Hz). 1 Hz = 1 s^{-1}.

La frecuencia representa el número de ciclos completos de una onda que pasan por un punto concreto en la unidad de tiempo. En la figura se representan algunas ondas con diferentes frecuencias.



Periodo

Su símbolo es "T". En el S.I. se mide en segundos.

El periodo es el tiempo que tarda una partícula del medio en realizar una vibración completa. También se puede definir como el tiempo necesario para que por un punto del medio pase una onda completa.

El periodo y la frecuencia están relacionados (como se puede ver a partir de sus definiciones respectivas) por la expresión

$$T = \frac{1}{f}$$

Velocidad de propagación

Es la relación entre el espacio que avanza la onda (tren de ondas) en función del tiempo. También se le suele llamar *velocidad de fase*.

La velocidad de fase depende de la elasticidad o rigidez del medio, es decir, de las propiedades del medio. Si el medio es homogéneo e isótropo[1], la velocidad de propagación es la misma en todas las direcciones.

Según las definiciones anteriores, podemos determinar la velocidad de una onda si conocemos su periodo (o su frecuencia) y su longitud de onda, pues una onda recorre una distancia igual a una longitud de onda en un tiempo igual a un periodo. Por tanto,

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

En el caso de la luz, o de cualquier onda electromagnética, en el vacío el símbolo de su velocidad se cambia por una c, ya que su valor es una constante universal,

$$c = \lambda f = 299.792.458 \ m \, s^{-1}$$

Ampliación

La velocidad de determinadas ondas se puede determinar a partir de unas expresiones experimentales.

-Velocidad de una onda transversal en una cuerda, $v = \sqrt{\frac{F}{\eta}}$, donde *F* es la tensión de la cuerda en newton y η es la densidad lineal de la cuerda en kilogramos/metro.

-Velocidad de una onda longitudinal en un sólido, $v = \sqrt{\frac{J}{\rho}}$, donde *J* es el módulo de Young que determina la elasticidad del sólido (se mide en N/m^2, es decir, en pascales, Pa) y ρ es la densidad del sólido en Kg/m^3.

-Velocidad del sonido en un gas, $v = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}$, donde γ es el coeficiente adiabático del gas (para el aire su valor es de 1,4), R es la constante de los gases (= 8,31 J mol^{-1} K^{-1}), T es la temperatura del gas en grados Kelvin y M es la masa molar del gas en kilogramos/mol.

Número de onda

Se representa con la letra "k" y se define como el número de longitudes de onda que hay en una distancia igual a 2π. Por tanto,

[1] Dícese de la materia que, con respecto a una propiedad determinada, no presenta direcciones privilegiadas.

$$k = \frac{2\,\pi}{\lambda}$$

Podemos establecer relaciones entre el número de onda y otras magnitudes.

$$k = \frac{2\,\pi}{\lambda} = \frac{2\,\pi}{\frac{v}{f}} = \frac{2\,\pi\,f}{v} = \frac{\omega}{v}$$

donde ω es la frecuencia angular cuyo significado en el movimiento ondulatorio es el mismo que en el m.a.s. pues es la frecuencia angular de vibración de las partículas del medio.

4) ECUACIÓN DE UNA ONDA

1 La ecuación de una onda es una función matemática de dos variables,

$$y = f(x,t)$$

-Se trata de una función armónica que contiene una función seno o una función coseno. En estos apuntes se trabaja fundamentalmente con ecuaciones de onda expresadas con una función seno.

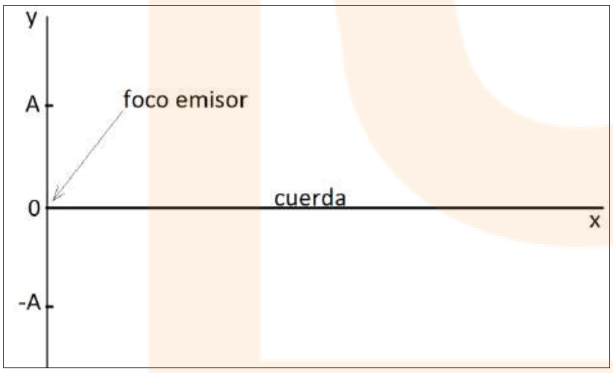
-La ecuación de una onda también se suele llamar función de onda.

-La dependencia de dos variables de la función de onda permite, por ejemplo,

-Conocer el estado vibración de todas las partículas del medio en un instante determinado.

-Conocer el estado de vibración de una partícula concreta del medio en función del tiempo. Es decir, la ecuación del m.a.s. de esa partícula concreta.

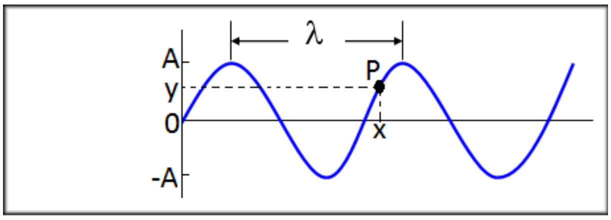
2 Punto de partida: supongamos una onda transversal que viaja sobre una cuerda estirada. El movimiento es *hacia la derecha* y se produce con una velocidad v (el sentido del movimiento es importante).



En la figura adjunta se muestra la situación en el instante inicial (t = 0). La partícula situada en x = 0, el foco emisor, se encuentra en el estado de vibración y = 0.

En realidad la partícula x = 0 puede empezar su vibración en cualquier punto situado entre +A y –A, siendo A la amplitud de vibración del foco emisor y la amplitud del movimiento ondulatorio que se generará.

3 Situación cuando ha pasado un tiempo cualquiera t_r.



El la figura el foco emisor se encuentra en y = 0, mientras que el punto P de la cuerda, localizado en x, se encuentra en un estado de vibración y.

④ El punto P hace lo mismo que el foco emisor pero con un cierto retraso, el tiempo necesario para que la onda llegue desde el origen hasta dicho punto. Como la onda tiene un movimiento uniforme,

$$v = \frac{x}{t_r}\ ;\ \ t_r = \frac{x}{v}$$

Donde t_r es el tiempo de retraso entre el foco emisor y el punto P.

⑤ La ecuación del m.a.s. del foco emisor (x =0) se puede escribir como

$$y\ (0, \mathrm{t}) = A \text{ sen } (\omega\, t + \varphi)$$

En el ejemplo concreto representado en el punto de partida anterior $\varphi = 0$. En efecto, en el instante inicial, t = 0,

$$y\ (0,0) = A \text{ sen } (\omega \cdot 0 + \varphi) = 0$$

$$0 = \text{sen } (\ \varphi);\ \ \varphi = 0$$

No obstante, el caso más general es considerar que existe una fase inicial.

⑥ La partícula situada a una distancia x del foco emisor empezará a moverse con un retrato, y su estado de vibración será *en función de su tiempo t'*

$$y(x, t') = A \text{ sen } (\omega\, t' + \varphi)$$

Ahora bien, sabemos que esta partícula vibra exactamente igual que el foco emisor solo que con un retraso en el tiempo, es decir,

$$t' = t - t_r = t - \frac{x}{v}$$

Por tanto, en función del tiempo medido desde el foco emisor,

$$y(x,t) = A \text{ sen } \left(\omega\left[t - \frac{x}{v}\right] + \varphi\right)$$

⑦ Transformemos la expresión anterior. Si $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

$$y(x,t) = A \text{ sen } \left(\frac{2\pi}{T}\left[t - \frac{x}{v}\right] + \varphi\right)$$

$$y(x,t) = A \text{ sen } \left(2\pi\left[\frac{t}{T} - \frac{x}{Tv}\right] + \varphi\right) = A \text{ sen } \left(2\pi\left[\frac{t}{T} - \frac{x\,f}{v}\right] + \varphi\right)$$

$$y(x,t) = A \text{ sen } \left(2\pi\left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right] + \varphi\right) \qquad (1)$$

$$y(x,t) = A \text{ sen } \left(\left[\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right] + \varphi\right)$$

$$y(x,t) = A \text{ sen } (\omega\, t - k\, x + \varphi) \qquad (2)$$

Las expresiones (1) y (2) son dos maneras de expresar la ecuación de una onda armónica sinusoidal que se desplaza de izquierda a derecha.

⑧ Si la onda se desplazara de derecha a izquierda la exposición sería la misma solo que cambiando la palabra "retraso" por "adelanto". Así, el resultado sería:

$$y(x,t) = A \text{ sen} \left(2\pi \left[\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right] + \varphi\right) \qquad (3)$$

$$y(x,t) = A \text{ sen} \left(\omega\, t + k\, x\ +\ \varphi\right) \qquad (4)$$

Las expresiones (3) y (4) son dos maneras de expresar la ecuación de una onda armónica sinusoidal que se desplaza de derecha a izquierda.

⑨ Consideraciones a tener en cuenta.

a) La ecuación de onda permite calcular la elongación o estado de vibración de cualquier punto del medio y en cualquier instante.

b) Si en la ecuación *se fija el valor de x*, nos estamos fijando en una partícula concreta del medio y la función de onda nos dará cómo varía la elongación de esa partícula en función del tiempo. Es la ecuación del m.a.s. de dicha partícula.

-Ejemplo 1. Para el foco emisor, x = 0,

$$y(0,t) = A \text{ sen} \left(\omega\, t + \varphi\right)$$

donde φ es la fase inicial del m.a.s. de la partícula x = 0.

-Ejemplo 2. Para la partícula situada en x = a,

$$y(a,t) = A \text{ sen} \left(\omega\, t + k\, a\ +\ \varphi\right) = \ y(a,t) = A \text{ sen} \left(\omega\, t + \xi\right)$$

donde $\xi\ = k\, a +\ \varphi$ es la fase inicial del m.a.s. de la partícula x = a.

c) Si en la función de onda se considera un instante concreto, es decir, se fija el tiempo, obtenemos el estado de vibración de todas las partículas del medio en dicho instante. Obtenemos así la "forma de la onda" que sería como si se tomara una foto instantánea de la onda en un momento concreto.

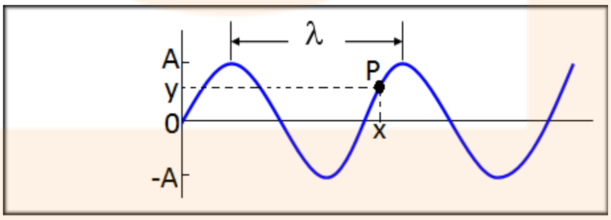
-Ejemplo 1. Para el instante inicial, t = 0,

$$y(x,0) = A \text{ sen} \left(k\, x + \varphi\right)$$

-Ejemplo 2. Para el instante t = a,

$$y(x,a) = A \text{ sen} \left(\omega\, a + k\, x\ +\ \varphi\right) = \ y(x,a) = A \text{ sen} \left(k\, x + \xi\right)$$

donde $\xi = \omega\, a + \ \varphi$ es un valor constante. La representación de esta función puede ser



d) No se debe confundir la velocidad de propagación de la onda, v, con la llamada velocidad de fase, que representa la velocidad de vibración de las partículas y que en el caso de las ondas transversales también se suele llamar velocidad transversal.

-Velocidad de propagación, velocidad de la onda, velocidad de fase

$$v =\ \lambda\, f$$

-Velocidad de vibración,

$$v = \frac{dy}{dt} = A\,\omega \cos\,(\omega\,t + k\,x\, +\, \varphi)$$

Además, podemos calcular la velocidad de vibración máxima o velocidad máxima de fase,

$$v_{max} = \pm\, A\,\omega$$

e) Al término $(\omega\,t + k\,x\, +\, \varphi)$ se le denomina fase.

f) La función de onda también puede expresarse en función del coseno.

Si $\text{sen}\,\alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

$$y(x,t) = A\,\text{sen}\,\left(2\pi\,\left[\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right] +\, \varphi\right) = \,A\cos\,\left(2\pi\,\left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right] +\, \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y(x,t) = A\,\text{sen}\,(\omega\,t - k\,x\, +\, \varphi) = \,A\cos\,\left(\omega\,t - k\,x\, +\, \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Estas son las ecuaciones de una onda armónica cosenoidal que se desplaza de izquierda a derecha, así como su relación con la misma onda pero sinusoidal.

4 Problemas resueltos.

Una onda armónica que viaja en el sentido positivo del eje OX tiene una amplitud de 8 cm, una longitud de onda de 20 cm y una frecuencia de 8,0 Hz. El desplazamiento transversal en x = 0 para t = 0 es cero. Calcula: a) el número de onda; b) el periodo y la frecuencia angular; c) la velocidad de la onda; d) la ecuación de la onda.

Datos:

· Sentido positivo eje OX
· A = 8 cm = 0,08 m
· λ = 20 cm = 0,2 m
· f = 8,0 Hz
· y(0,0) = 0

a) El número de onda, k, es el número de longitudes de onda que hay en una distancia igual a 2π.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}2} = 10\,\pi\ \ m^{-1}$$

b) El periodo es la inversa de la frecuencia,

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{8{,}0} = 0{,}125\,s$$

En cuando a la frecuencia angular,

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 8{,}0 = 16\pi\ \ rad \cdot s^{-1}$$

c) La velocidad de la onda es

$$v = \lambda\,f = 0{,}2 \cdot 8{,}0 = 1{,}6\,m \cdot s^{-1}$$

d) La ecuación general de una onda que se mueve de derecha a izquierda la podemos escribir como,

$$y(x,t) = A\,\text{sen}\,(\omega\,t - k\,x\, +\, \varphi)$$

De esta ecuación se conoce todo excepto la fase inicial o constante de fase. Para conocerla debemos saber dónde se encuentra un punto del medio en un instante determinado. Según los datos aportados por el problema,

$$y(0{,}0) = A\,\text{sen}\,(\omega \cdot 0 - k \cdot 0\, +\, \varphi) = 0$$

$$\text{sen}\,\varphi = 0$$

$$\varphi = \text{arcosen}\,0 = 0$$

Por tanto, la ecuación de la onda será:

$$y(x,t) = 0{,}08\ \text{sen}\ (16\pi\ t - 10\pi\ x\ )$$

Esta ecuación también se puede poner en función del coseno [$\text{sen}\alpha = \cos(\alpha - \pi/2)$]

$$y(x,t) = 0{,}08\ \cos\ \left(16\pi\ t - 10\pi\ x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Una onda transversal se propaga por una cuerda según la ecuación $y(x,t) = 0{,}40\cos(100t - 0{,}5x)$ en unidades del S.I. Calcula: a) la longitud de onda; b) la velocidad de propagación de la onda; c) el estado de vibración de una partícula situada a x = 20 cm en el instante 0,500 s; d) La velocidad transversal de la partícula anterior; e) Representa gráficamente la variación de la elongación de la partícula anterior en función del tiempo; f) Representa gráficamente la forma que adopta la onda cuando transcurrido medio periodo.

<u>Datos:</u>
$y(x,t) = 0{,}40\cos(100t - 0{,}5x)$

Se trata de una onda armónica cosenoidal que se desplaza en el sentido positivo del eje OX. La ecuación general de este tipo de ondas es

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi)$$

a) Comparando la ecuación general con la ecuación dada, tenemos que

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 0{,}5\ m^{-1}$$

Por tanto,

$$\lambda = \frac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi\ m$$

b) Seguimos el mismo procedimiento que en el apartado anterior. La frecuencia angular nos permitirá determinar la frecuencia de vibración de las partículas del medio,

$$\omega = 100\ rad/s = 2\pi f;\ \ f = \frac{100}{2\pi} = \frac{50}{\pi}\ Hz$$

La velocidad de propagación de la onda es

$$v = \lambda f = 4\pi\ \frac{50}{\pi} = 200\ m/s$$

c) Sustituyendo la posición de la partícula y el instante concreto, determinamos su estado de vibración,

$$y(0{,}2\ ; 0{,}5) = 0{,}40\cos(100\cdot 0{,}5 - 0{,}5\cdot 0{,}2) = 0{,}4\cos(50 - 0{,}1) = 0{,}4\cos(49{,}9) = 0{,}37\ m$$

d) La velocidad transversal de las partículas, velocidad de vibración, del medio se obtiene derivando la ecuación de onda respecto del tiempo,

$$v = \frac{dy}{dt} = -0{,}40\cdot 100\,\text{sen}(100\ t - 0{,}5x) = -40\,\text{sen}(100t - 0{,}5x)$$

La partícula del apartado c) tendrá una velocidad,

$$v(0{,}2\ ; 0{,}5) = -40\,\text{sen}(100\cdot 0{,}5 - 0{,}5\cdot 0{,}2) = -40\ \text{sen}\ (49{,}9) = 14{,}3\ m/s$$

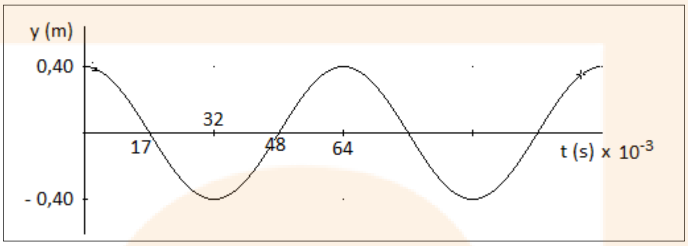
e) La ecuación del m.a.s. de la partícula situada a 20 cm del foco emisor es,

$$y(0{,}2\ , t) = 0{,}40\cos(100\ t - 0{,}5\cdot 0{,}2) = 0{,}40\cos(100\ t - 0{,}1)$$

La representación gráfica de esta función coseno se puede hacer de forma aproximada encontrado los puntos de máxima elongación y los puntos de elongación cero, además de la elongación inicial. Averiguamos pues los instantes en los que la elongación de la partícula es máxima o cero. Podemos rellenar la siguiente tabla:

Fase (rad) $(100\,t - 0{,}1)$	$\cos(100\,t - 0{,}1)$	t (s)	y (m)
- 0,1	0,995 ≅ 1	0	0,40
0	1	0,001 ≅ 0	0,40
π/2	0	0,017	0
π	-1	0,032	-0,40
3π/2	0	0,048	0
2π	1	0,064	0,40

La partícula vibrante está muy cerca del foco emisor, por lo que su desfase es despreciable,



f) El periodo del movimiento ondulatorio es

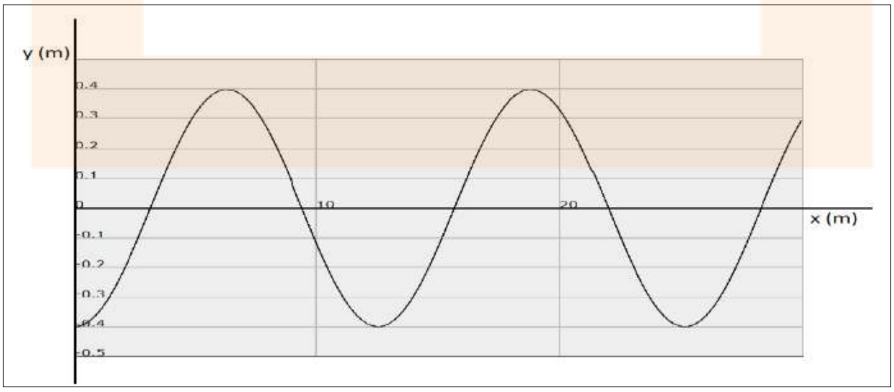
$$T = \frac{1}{f} = \frac{\pi}{50}\ s$$

La ecuación que representa la forma de la onda al cabo de medio periodo, es decir, el estado de vibración de las partículas del medio cuando ha pasado un tiempo igual a T/2, es,

$$y(x, T/2) = 0{,}40\cos\left(100 \cdot \frac{\pi}{100} - 0{,}5\,x\right) = 0{,}40\cos(\pi - 0{,}5\,x)$$

Procedemos igual que en el apartado anterior, empezando por el foco emisor,

Fase (rad) $\pi - 0{,}5\,x$	$\cos(\pi - 0{,}5\,x)$	x (m)	y (m)
π	-1	0	-0,40
0,5π	0	π	0
0	1	2π	0,40
-0,5π	0	3π	0
-π	0	4π	-0,40



Una onda transversal sinusoidal, que se propaga de derecha a izquierda, tiene una longitud de onda de 20 m, una amplitud de 4 m y una velocidad de propagación de 200 m/s. Si el foco emisor de ondas tiene una elongación máxima cuando t = 0, calcula: a) La ecuación de onda; b) la velocidad transversal máxima de un punto del medio; c) la función que da la forma de la onda a los 10 s; d) la diferencia de fase entre dos puntos que distan 10 m en un instante dado

Datos:
· Desplazamiento hacia valores negativos en el eje OX.
· $\lambda = 20$ m
· A = 4 m
· v = 200 m/s
· y(0,0) = A

a) La ecuación general de una onda sinusoidal que se mueve de derecha a izquierda la podemos escribir como,

$$y(x,t) = A \text{ sen } (\omega\, t + k\, x\, +\, \varphi)$$

Para poder escribir la ecuación de la onda debemos determinar primero el número de onda, k, y la frecuencia angular, ω. El número de onda es,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{20} = 0{,}1\,\pi\ \ m^{-1}$$

Para determinar la frecuencia angular utilizamos el dato de la velocidad de la onda,

$$v = \lambda\, f\ ;\ f = \frac{v}{\lambda}\ ;\ \ \omega = 2\pi f = 2\pi\frac{v}{\lambda} = 2\pi\frac{200}{20} = 20\pi\, rad/s$$

Para conocer la fase inicial debemos saber dónde se encuentra un punto del medio en un instante determinado. Según los datos aportados por el problema,

$$y(0{,}0) = A = A \text{ sen } (\omega \cdot 0 + k \cdot 0\, +\, \varphi) = 0$$

$$\text{sen } \varphi = 1$$

$$\varphi = \text{arcosen } 1 = \frac{\pi}{2}$$

En definitiva,

$$y(x,t) = 4 \text{ sen } (20\pi\, t + 0{,}1\pi\, x\, +\, 0{,}5\pi)$$

b) La velocidad transversal de un punto del medio será:

$$v = \frac{dy}{dt} = y(x,t) = 4 \cdot 20\pi \cos (20\pi\, t + 0{,}1\pi\, x\, +\, 0{,}5\pi)$$

Esta velocidad es máxima cuando el coseno vale ± 1. Entonces,

$$v_{max} = \pm \text{A}\, \omega = \pm 4 \cdot 20\pi = 80\pi \text{ m/s}$$

c) La función de onda a los 10 segundos es,

$$y(x,10) = 4 \text{ sen } (20\pi \cdot 10 + 0{,}1\pi\, x\, +\, 0{,}5\pi)$$
$$y(x,10) = 4 \text{ sen } (0{,}1\pi\, x\, +\, 200{,}5\pi)$$

d) Llamaremos δ a la diferencia de fase (en radianes) entre dos puntos o instantes, su expresión general será:

$$\delta = (\omega\, t_2 + k\, x_2\, +\, \varphi) - (\omega\, t_1 + k\, x_1 + \varphi)$$

$$\delta = (\omega\, t_2 + k\, x_2) - (\omega\, t_1 + k\, x_1)$$

$$\delta = (\omega\, t_2 - \omega\, t_1) + (k\, x_2 - k\, x_1) = \omega(t_2 - t_1) + k(x_2 - x_1)$$

En este caso se pide la diferencia de fase entre dos puntos que distan 10 m en un mismo instante, es decir:

$$t_2 = t_1$$
$$x_2 - x_1 = 10\ m$$

Con estos datos,

$$\delta = k(x_2 - x_1) = 0{,}1\pi \cdot 10 = \pi\ rad$$

La ecuación de una onda es,

$$y(x,t) = 25\ \text{sen}\ (0{,}40\ t - 3{,}14\ x)$$

expresada en unidades del S.I. Calcula: a) Los puntos que están en fase y en oposición de fase; b) ¿Qué tiempo debe transcurrir para que un punto situado a 5,0 m del foco tenga velocidad máxima.

Datos:
$\cdot\ y(x,t) = 25\ \text{sen}\ (0{,}40\ t + 3{,}14\ x)$

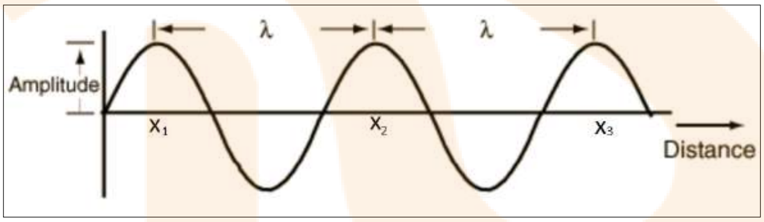
Un poco de teoría antes de empezar,
Dos puntos de un medio transmisor de una onda vibran en fase (también en concordancia de fase) cuando la distancia entre ellos es igual a una longitud de onda. En efecto, la diferencia de fase entre dos puntos es (véase último apartado del problema anterior),

$$\delta = \omega(t_2 - t_1) + k(x_2 - x_1)$$

estos dos puntos vibran en fase en un instante dado ($t_1 = t_2$) si $\delta = 2\pi$. Por tanto

$$\delta = 2\pi = k(x_2 - x_1)$$

$$2\pi = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) \quad \rightarrow \quad (x_2 - x_1) = \lambda$$



En la figura adjunta se puede observar lo que se acaba de deducir. Por otra parte, en la figura también se observa que todos los puntos que vibran en fase con un punto inicial considerado están sucesivamente a una distancia igual a

$$(x_2 - x_1) = n\ \lambda \qquad \text{donde n = 1, 2, 3, 4,....}$$

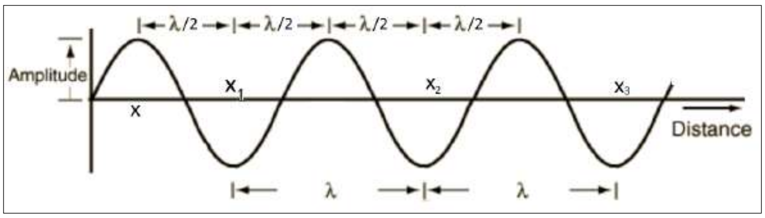
Dos puntos de un medio transmisor de una onda están en oposición de fase cuando la distancia entre ellos es igual a media longitud de onda. En efecto, la diferencia de fase entre dos puntos es

$$\delta = \omega(t_2 - t_1) + k(x_2 - x_1)$$

estos dos puntos están en oposición de fase en un instante dado ($t_1 = t_2$) si $\delta = \pi$. Por tanto

$$\delta = \pi = k(x_2 - x_1)$$

$$\pi = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) \quad \rightarrow \quad (x_2 - x_1) = \frac{\lambda}{2}$$



En la figura adjunta se puede observar lo que se acaba de deducir. Por otra parte, en la figura también se observa que para un punto x, el primer punto que está en oposición de fase (x_1) está a una distancia igual a λ/2, el siguiente punto (x_2) que está en oposición de fase con el primero está a una distancia igual a 3λ/2,.... Podemos pues establecer una expresión que determine los puntos que están en oposición de fase a partir de un punto concreto,

$$(x_2 - x_1) = (2n - 1)\,\frac{\lambda}{2} \qquad \text{donde n = 1, 2, 3, 4,....}$$

a) Empezaremos por determinar la longitud de onda. A partir de la ecuación de onda,

$$k = 3{,}14 = \pi = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \rightarrow \qquad \lambda = 2\,m$$

Los puntos que se encuentran en fase cumplen que,

$$(x_2 - x_1) = n\,\lambda \qquad \text{donde n = 1, 2, 3, 4,....}$$

es decir, se encuentran en fase aquellos puntos situados a 2n metros (2, 4, 6, 8,....)

Los puntos que se encuentran en oposición de fase cumplen que,

$$(x_2 - x_1) = (2n - 1)\,\frac{\lambda}{2} \qquad \text{donde n = 1, 2, 3, 4,....}$$

es decir, se encuentran en oposición de fase aquellos puntos situados a 2n-1 metros (1, 3, 5, 7,...)

b) La velocidad de un punto del medio (velocidad transversal) es, para este movimiento ondulatorio,

$$v = \frac{dy}{dt} = y(x,t) = 25 \cdot 0{,}4\cos(0{,}4\,t - 3{,}14\,x) = 10 \cdot \cos(0{,}4\,t - 3{,}14\,x)$$

Esta velocidad es máxima si el coseno es ± 1. Debemos poner esta condición para el punto situado a 5,0 metros del foco emisor como demanda el problema,

$$\cos(0{,}4\,t - 3{,}14 \cdot 5{,}0) = \pm 1$$

Esto ocurre si,

$$0{,}4\,t - 3{,}14 \cdot 5{,}0 = 0; \quad t = \frac{3{,}14 \cdot 5{,}0}{0{,}4} = 39{,}3\,s$$

Pero también cuando

$$0{,}4\,t - 3{,}14 \cdot 5{,}0 = 3{,}14; \quad t = \frac{3{,}14 + 3{,}14 \cdot 5{,}0}{0{,}4} = 47{,}1\,s$$

De estas dos soluciones vemos que tienen que ocurre antes la primera, la respuesta es 39,3 s.

5) ENERGÍA DE UNA ONDA

Se pueden poner numerosos ejemplos que muestran la capacidad de producir cambios por parte de las ondas, hecho que demuestra que las ondas transportan energía en la dirección y sentido en el que viajan:

- Las radiaciones solares son la principal fuente de energía de nuestro planeta.
- Las olas del mar son capaces de erosionar la costa.
- Las ondas sísmicas pueden destruir estructuras y edificios.
- Las ondas sonoras muy intensas pueden romper vidrios y tímpanos.
- Etc.

Una onda mecánica se llama así porque transmite energía mecánica por el medio. Una onda armónica transmite la energía de un oscilador armónico (*el foco emisor*) a través del medio:

$$E_o = \frac{1}{2}\,K\,A^2 = \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,A^2 = \frac{1}{2}\,m\,4\,\pi^2\,f^2\,A^2$$

Donde m es la masa de la partícula vibrante que forma el foco emisor de ondas. Simplificando,

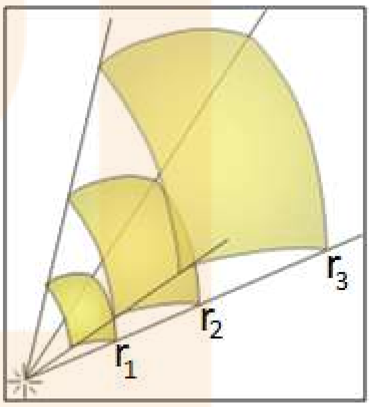
$$E_o = 2\,m\,\pi^2\,f^2\,A^2$$

Esta energía del foco emisor es la que se irradia con una velocidad v en todas las direcciones si la onda es tridimensional, en dos direcciones si es bidimensional y en una dirección si es unidimensional.

Como se puede ver en la expresión, la energía que propaga una onda es proporcional al cuadrado de la amplitud y al cuadrado de la frecuencia.

6) ATENUACIÓN Y ABSORCIÓN DE UNA ONDA.

① La energía que propaga una onda viene dada por la expresión de E_o, que da la energía mecánica del foco emisor.



② En una onda tridimensional la energía del foco emisor se va repartiendo sobre superficies esféricas concéntricas cuyo centro es el foco emisor.

③ Al cabo de un tiempo, t_1, la energía se habrá repartido entre las partículas que forman el frente de onda de radio r_1. Si v es la velocidad de la onda,

$$r_1 = v\,t_1$$

④ De la misma manera, un cierto tiempo después, t_2, el radio del frente de onda, r_2, será:

$$r_2 = v\,t_2$$

⑤ Ahora bien, la energía que tienen las partículas del frente de onda 1 es la misma que la que tienen en el frente de onda 2 y en el frente de onda 3 (véase la figura). Es la energía que tiene el foco emisor solo que cada vez repartida entre más partículas que ocupan los sucesivos frentes de onda (en una onda plana también hay reparto de energía entre las partículas de un frente de onda. En una onda unidimensional es de suponer que esto no ocurre pues toda la energía del foco emisor pasa a una única partícula vecina).

⑥ Llamaremos E_1 a la energía del frente de onda 1, y E_2 a la energía del frente de onda 2. Según se ha dicho en el punto anterior,

$$E_1 = E_2 \quad (= E_o)$$

$$2\, m_1\, \pi^2\, f^2\, A_1^2 = \, 2\, m_2\, \pi^2\, f^2\, A_2^2$$

En esta igualdad vemos que,

· m_1 ya no es la masa de una sola partícula sino que representa la masa de las partículas que conforman el frente de onda 1.

· m_2 representa la masa de las partículas que conforman el frente de onda 2.

· Es claro que $m_2 > m_1$, la igualdad se mantiene porque entre los sucesivos frentes de onda cambian las amplitudes de vibración, indicadas por A_1 y A_2 (siendo $A_2 < A_1$).

En definitiva,

$$m_1\, A_1^2 = m_2\, A_2^2$$

⑦ Para determinar m_1 y m_2, supondremos que los frentes de onda tienen un espesor infinitesimal (dr) y que el medio (homogéneo) tiene una densidad ρ.

En general, la masa de una esfera hueca será,

$$m = \, \rho\, V = \, \rho\, S\, dr = \, \rho\, 4\, \pi\, r^2\, dr$$

donde S es la superficie de la esfera y dr, como se ha dicho, su espesor. Por tanto,

$$\rho\, 4\, \pi\, r_1^2\, dr\, A_1^2 = \rho\, 4\, \pi\, r_2^2\, dr\, \, A_2^2$$

$$r_1^2\, A_1^2 = r_2^2\, A_2^2$$

$$r_1\, A_1 = r_2\, A_2$$

$$r\, A = cte$$

La amplitud de una onda en un punto es inversamente proporcional a la distancia de ese punto al centro emisor.

⑧ Por tanto, la onda, a medida que se aleja del centro emisor, se va amortiguando. La amplitud disminuye y, por tanto, las partículas vibran con menos energía. Esto se debe a que la misma energía se reparte, en cada frente de onda, entre mayor número de partículas, pero la suma de la energía de cada una de las partículas del frente de onda es igual a la energía mecánica del foco emisor. Este fenómeno recibe el nombre de **atenuación.** Tiene lugar, como se ha dicho, en las ondas bidimensionales y tridimensionales.

⑨ En los medios reales de propagación la onda también se amortigua por pérdida de energía debido a rozamientos, viscosidad, poca elasticidad, etc. En este caso se dice que la onda se amortigua por **absorción**.

7) INTENSIDAD DE UNA ONDA.

Interesa conocer la cantidad de energía que, a través de una onda, llega a un determinado punto del medio en la unidad de tiempo. Para ello se define el término *intensidad de una onda*.

Se llama intensidad de un movimiento ondulatorio en un punto a la energía que atraviesa la unidad de superficie perpendicularmente a la dirección de propagación en la unidad de tiempo.

$$I = \frac{E}{S\,t} = \frac{P}{S}$$

La unidad en el S.I. es: $\frac{J}{m^2\,s} = \frac{W}{m^2}$

Volvamos a los frentes de onda 1 y 2 (pág. 16). Hablamos, por tanto, de ondas esféricas. Podemos analizar la relación que existe entre las intensidades de onda en los dos frentes, I_1 e I_2, en un instante determinado

$$I_1 = \frac{E_1}{S_1\,t} = \frac{E_1}{4\,\pi\,r_1^2\,t}$$

$$I_2 = \frac{E_2}{S_2\,t} = \frac{E_2}{4\,\pi\,r_2^2\,t}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{E_1}{4\,\pi\,r_1^2\,t}}{\frac{E_2}{4\,\pi\,r_2^2\,t}} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

$$I_1 r_1^2 = I_2 r_2^2$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{A_1^2}{A_2^2}$$

$$I_1 A_2^2 = I_2 A_1^2$$

Como vemos, la intensidad de una onda es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco,

$$I \cdot r^2 = cte$$

También, la intensidad de una onda es directamente proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda,

$$\frac{I}{A^2} = cte$$

2 Problemas resueltos.

Un foco emite ondas esféricas con una potencia de 20 W. Calcula la intensidad de la onda a una distancia de 2 m y a 4 m del foco. ¿Cuál es la relación entre las intensidades y las amplitudes a esas distancias del foco?

Datos

· $P = 20\ W = 20\ J \cdot s^{-1}$

· $r_1 = 2\ m$

· $r_2 = 4\ m$

La intensidad de una onda esférica a una distancia R del foco es

$$I = \frac{E}{S\,t} = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\,\pi\,r^2}$$

Sustituyendo para los dos frentes de onda tenemos,

$$I_1 = \frac{20}{4\,\pi\,2^2} = 0{,}4\,\frac{W}{m^2}$$

$$I_2 = \frac{20}{4\,\pi\,4^2} = 0{,}1\,\frac{W}{m^2}$$

Como vemos, $I_1 = 4I_2$, es decir, al duplicar la distancia al foco la intensidad disminuye cuatro veces.

En cuanto a la relación entre las amplitudes,

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{A_1^2}{A_2^2}$$

$$\frac{0{,}4}{0{,}1} = \frac{4^2}{2^2} = \frac{A_1^2}{A_2^2} = 4$$

$$A_1^2 = 4\,A_2^2$$

$$A_2 = \frac{1}{2}A_1$$

al duplicarse la distancia al foco la amplitud se divide por dos.

Una onda armónica esférica tiene una intensidad de $6{\cdot}10^{-8}$ W·m^{-2} a 20 m del foco emisor. Si no hay absorción, calcula: a) la energía emitida por el foco emisor en un minuto; b) la amplitud de la onda a los 40 m si se sabe que a 20 m su amplitud es de 4 mm.

Datos

· $I = 6{\cdot}10^{-8}$ W·m^{-2} si r = 20 m

· $A = 4{\cdot}10^{-3}$ m si r = 20 m

a) La intensidad de una onda esférica a una distancia R del foco es

$$I = \frac{E}{S\,t} = \frac{P}{S} = \frac{E}{4\,\pi\,r^2\,t}$$

Despejando la energía en esta expresión,

$$E = I\,4\,\pi\,r^2\,t$$

Si sustituimos r por 20 m y t por 60 s obtenemos la energía transmitida por el frente de onda situado a 20 m en un minuto, es decir,

$$E = 6\cdot 10^{-8}\cdot\ 4\,\pi\cdot 20^2\cdot\ 60 = 1{,}8\cdot 10^{-2}\,J$$

Ahora bien, esta energía es precisamente la que corresponde a la emitida por el foco emisor en dicho tiempo si no hay amortiguamiento por absorción.

b) La relación, para dos frentes de onda, entre las intensidades de una onda, las amplitudes de una onda y las distancias al foco emisor es

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{A_1^2}{A_2^2}$$

Con los datos del problema,

$$\frac{40^2}{20^2} = \frac{(4\cdot 10^{-3})^2}{A_2^2}$$

$$A_2 = 0{,}002\,m$$

8) ONDAS SONORAS

① Definiciones:

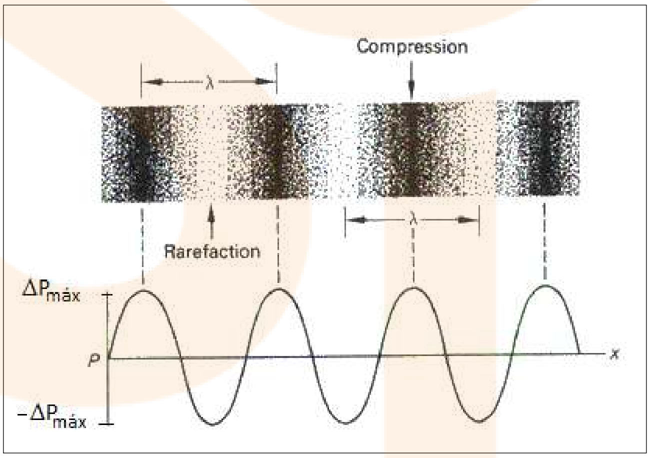
- El *sonido* es una vibración o perturbación mecánica de algún cuerpo que se propaga en forma de ondas a través del medio material que rodea a dicho cuerpo.

- La onda mediante la cual se propaga el sonido a través de un medio material elástico se llama *onda sonora*.

② Una onda sonora es una onda mecánica longitudinal.

Analicemos básicamente cómo se genera una onda sonora en el aire. Un cuerpo en oscilación (por ejemplo, la membrana de un tambor al ser golpeada) pone en movimiento a las moléculas de aire (del medio) que lo rodean. Éstas, a su vez, transmiten ese movimiento a las moléculas vecinas y así sucesivamente. Cada molécula de aire entra en oscilación en torno a su punto de reposo. Es decir, el desplazamiento que sufre cada molécula es pequeño. Pero el movimiento se propaga a través del medio. Entre la fuente sonora (el cuerpo en oscilación) y el receptor (el ser humano) tenemos entonces una transmisión de energía pero no un traslado de materia. No son las moléculas de aire que rodean al cuerpo en oscilación las que hacen entrar en movimiento al tímpano, sino las que están junto al mismo, que fueron puestas en movimiento a medida que la onda se fue propagando en el medio.

El (pequeño) desplazamiento (oscilatorio) que sufren las distintas moléculas de aire genera zonas en las que hay una mayor concentración de moléculas (mayor densidad), zonas de condensación, y zonas en las que hay una menor concentración de moléculas (menor densidad), zonas de rarefacción. Esas zonas de mayor o menor densidad generan una variación alterna en la presión estática del aire (la presión del aire en ausencia de sonido). Es lo que se conoce como presión sonora (ver figura adjunta)

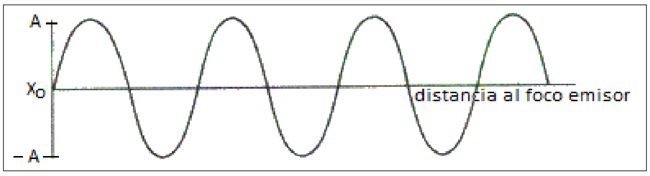


③ Una onda sonora se puede estudiar bajo dos puntos de vista:

1º) Como una onda de presión. En la figura adjunta se ha representado cómo varía la presión en el aire en torno a un valor central (P) cuando se produce una onda sonora. La onda así representada (*onda de presión*) obedece a la expresión,

$$\Delta P(x,t) = \Delta P_{máx}\,\mathrm{sen}\,(\omega\, t \pm kx)$$

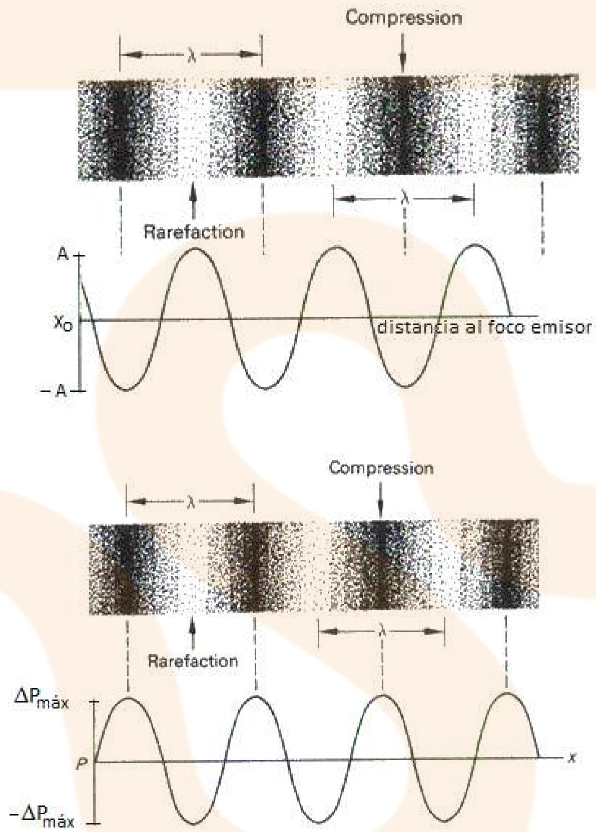
Esta función representa la variación armónica de la presión del medio en torno a una presión de equilibrio.



2º) Como una onda de desplazamiento. Se puede representar la variación de la posición de pequeños elementos de volumen del medio respecto de su posición de equilibrio (*onda de desplazamiento*). En efecto, cualquier elemento de volumen oscila longitudinalmente en torno a una posición de equilibrio con un movimiento armónico simple. La función de onda será:

$$\Delta x(x,t) = A \text{ sen } \left(\omega\, t\ \pm kx + \frac{\pi}{2}\right) = \text{A cos } (\omega\, t\ \pm kx)$$

Es decir la onda de desplazamiento está desfasada respecto de la onda de presión (y viceversa) 90º (no apreciable en las figuras de la página anterior y sí en la figura de esta página). Esto es así porque los máximos de presión corresponden a mínimos de desplazamiento y viceversa.



9) CUALIDADES DEL SONIDO

El ser humano puede distinguir (sin mirar al foco emisor) entre diferentes tipos de sonidos. Esto es así porque distinguimos entre tres cualidades del sonido que están relacionadas con las características de las ondas sonoras: intensidad, tono y timbre.

9.1.- Intensidad

Está relacionada con la amplitud de la onda (energía). Tal como ya se ha definido (pág. 18), es el volumen acústico o energía que transmite la onda por unidad de tiempo a través de la unidad de superficie perpendicular a la dirección de propagación.

Una forma de medir la intensidad relativa de una onda sonora es el decibelio, dB, (en honor a Alexander Graham Bell):

- El umbral de audición en el ser humano se sitúa para ondas sonoras cuya intensidad (intensidad umbral) es,

$$I_o = 1{,}0 \cdot 10^{-12}\ W \cdot m^{-2}$$

- El umbral del dolor en el ser humano, es decir, la intensidad máxima que el oído humano puede registrar sin sentir dolor (no de forma continuada) se sitúa para ondas sonoras cuya intensidad está en torno a 1 $W \cdot m^{-2}$.

- Se define el nivel de intensidad sonora (β) como un submúltiplo del belio, concretamente como la décima parte y se denomina decibelio (dB). Se determina con la expresión

$$\beta = 10 \cdot log \frac{I}{I_o}$$

Donde I_o es el umbral de audición, e I es la intensidad sonora considerada.

- Es evidente que si $I = I_o$, $\beta = 0$ dB. Es el umbral de audición
- Si I = 1 $W \cdot m^{-2}$, $\beta = 120$ dB. Es el umbral del dolor.

Nivel de intensidad del sonido.[1]

180 dB	Explosión del Volcan Krakatoa. Se cree que es el mayor sonido registrado en la historia.
140 dB	Umbral del dolor
130 dB	Avión despegando
120 dB	Motor de avión en marcha
110 dB	Concierto
100 dB	Perforadora eléctrica
90 dB	Tráfico
80 dB	Tren
70 dB	Aspiradora
50/60 dB	Aglomeración de Gente
40 dB	Conversación
20 dB	Biblioteca
10 dB	Respiración tranquila
0 dB	Umbral de audición

Fuente: Wikipedia

9.2.- Tono

Es la cualidad del sonido relacionada con la frecuencia. Los sonidos graves son de baja frecuencia y los sonidos agudos son de alta frecuencia. Las ondas sonoras se llaman así porque las podemos percibir los seres humanos. Se trata de ondas cuya frecuencia oscila entre 20 y 20000 Hz. Así,

- Ondas sonoras de 20 Hz corresponden a sonidos muy graves. Para una velocidad de la onda sonora de 340 m/s corresponden a una longitud de onda es de 17 m (onda larga).

- Ondas sonoras de 20000 Hz corresponden a sonidos muy agudos. Para un velocidad de la onda sonora de 340 m/s corresponden a una longitud de onda de 0,017 m (onda corta).

- Las ondas ultrasónicas (no percibidas por los seres humanos) tienen una frecuencia superior a 20000 Hz. Los ultrasonidos son utilizados como "radar" por murciélagos y delfines. Las ecografías de abdomen se consiguen mediante ondas ultrasónicas cuya frecuencia oscila entre 2 y 5 MHz.

- Los infrasonidos (no percibidos por los seres humanos) tienen una frecuencia inferior a 20 Hz. Los elefantes los utilizan para comunicarse. Las ondas sísmicas van acompañadas de infrasonidos.

9.3.- Timbre

Es la cualidad del sonido que está relacionada con la forma de la onda. Esta cualidad es la que nos permite identificar entre dos sonidos con la misma intensidad y tono pero emitidos por cuerpos diferentes, por ejemplo, una misma nota emitida por un violín o un piano.

Estos apuntes se finalizaron el 9 de noviembre de 2010
en Villanueva del Arzobispo, Jaén (España).

Realizados por: Felipe Moreno Romero
fresenius1@gmail.com
http://www.escritoscientificos.es

FÍSICA 2º BACHILLERATO

BLOQUE TEMÁTICO: VIBRACIONES Y ONDAS

ESTUDIO DE ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS ONDAS

Contenidos:

1) Principio de Huygens
2) Reflexión de las ondas
3) Refracción de las ondas
4) Difracción y polarización
5) Superposición de ondas: interferencias
6) Superposición de ondas: ondas estacionarias

---

1) PRINCIPIO DE HUYGENS

① Para explicar muchos fenómenos ondulatorios se hace uso del principio propuesto en 1678 por el físico y astrónomo Christiaan Huygens (1629-1695).

② Se trata de un método geométrico que Huygens ideó para explicar el carácter ondulatorio de la luz y que puede ser aplicado por extensión a todo tipo de ondas.

③ Definiciones previas:

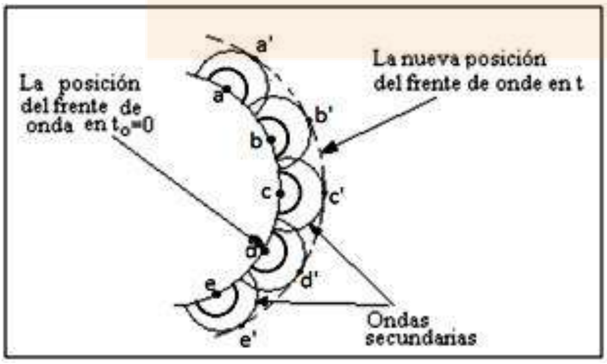
- *Frente de ondas:* es la superficie constituida por todos los puntos de un medio transmisor de ondas que en un momento dado vibran en concordancia de fase.

- *Rayo:* es la recta que indica la dirección de propagación del movimiento ondulatorio. Desde un foco emisor de ondas se pueden dibujar tantos rayos como direcciones de propagación existan.

④ *Principio de Huygens*

Todo punto de un frente de onda es centro emisor de nuevas ondas elementales cuya envolvente es el nuevo frente de onda.

⑤ Explicación del avance de una onda según el principio de Huygens.



- Supongamos los puntos a, b, c, d y e de un frente de onda en t_o =0 (ver figura).

- Cada uno de estos puntos está animado de un movimiento armónico simple.

- Al ser estos puntos de un mismo frente de onda su m.a.s. tiene la misma fase para todos sus puntos.

- Estos puntos son a su vez centros

emisores de nuevas ondas secundarias.

-Al cabo de un cierto tiempo, todas las ondas secundarias han recorrido la misma distancia y alcanzan los puntos a', b', c', d' y e', que están en fase entre sí, formando, por tanto, un nuevo frente de ondas.

⑥ Fenómenos ondulatorios que se pueden explicar con el principio de Huygens (entre otros):

- Reflexión
- Refracción
- Polarización
- Difracción

2) REFLEXIÓN DE ONDAS

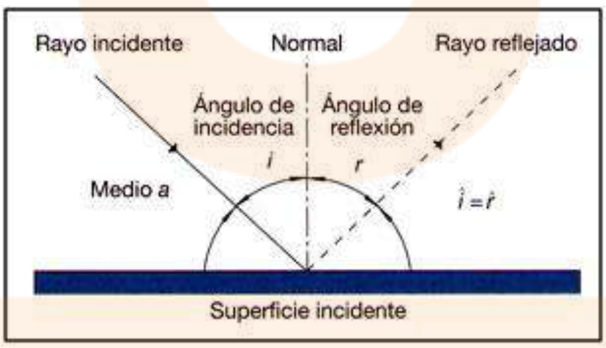
① La reflexión es un fenómeno propio de cualquier tipo de ondas.

La reflexión de una onda se define como el cambio de dirección dentro del mismo medio que experimentan las ondas al incidir sobre la superficie de separación de dos medios.

Se produce reflexión de ondas, por ejemplo, cuando la luz incide sobre un espejo, el eco de un sonido, etc.

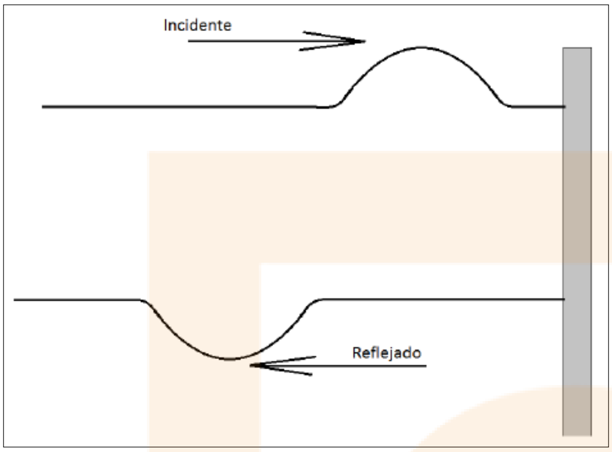
② La reflexión de las ondas cumple las siguientes leyes, conocidas como leyes de Snell para la reflexión (las leyes de la reflexión en la luz, que son las mismas, se conocen desde la antigüedad).

1ª) El ángulo de incidencia y el ángulo de reflexión son iguales.
2ª) Los rayos incidente y reflejado están en el mismo plano.



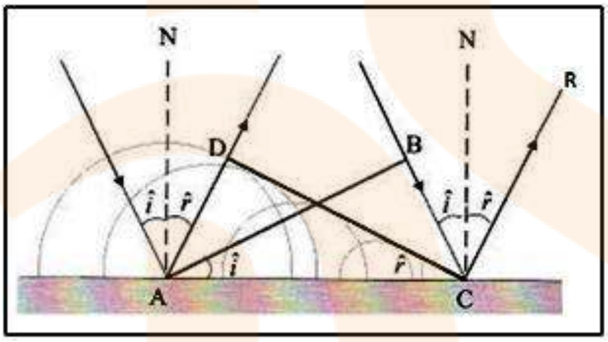
En la figura se muestra la reflexión de una onda al incidir sobre una superficie. Los frentes de onda no aparecen dibujados si bien la dirección de propagación de los mismos viene dada por los correspondientes rayos incidente y reflejado. Se puede observar que se llama ángulo de incidencia, $\hat{\imath}$, al ángulo que forma el rayo incidente con la normal en el punto de la superficie de separación sobre el que incide la onda. De la misma manera, el ángulo reflejado, $\hat{r}$, es el ángulo que forma el rayo que parte del punto de incidencia con la normal a dicho punto.

③ En determinadas situaciones, por ejemplo un pulso que se transmite por una cuerda, hay una diferencia entre la onda incidente y la onda reflejada: están desfasadas en 180º. Por ejemplo, supongamos un pulso que viaja por una cuerda tensa que está sujeta a una pared. Al reflejarse dicho pulso en la pared ocurre lo que se observa en la figura siguiente,



Para su explicación se tiene en cuenta el tercer principio de la dinámica (principio de acción-reacción). Cuando el pulso llega al soporte de la cuerda sobre la pared, al ser este medio más rígido que la cuerda, ésta ejerce una fuerza hacia arriba sobre el soporte. Como reacción el soporte ejerce una fuerza hacia abajo sobre la cuerda que provoca la inversión del pulso.

④ Las leyes de la reflexión se pueden demostrar según el principio de Huygens. Se trata de una demostración geométrica (esta demostración se considera ampliación respecto de los contenidos de la asignatura de Física de 2º de Bachillerato).



La reflexión de una onda es el rebote que experimenta cuando llega a un obstáculo grande, como una pared. Aunque el obstáculo absorba parte de la energía recibida se produce también reflexión en la que se transmite de vuelta parte de la energía a las partículas del medio incidente.

En la figura adjunta se representa un frente de ondas plano llegando a una superficie horizontal con un cierto ángulo $\hat{\imath}$ de incidencia. De acuerdo con el principio de Huygens, cuando el frente de ondas empieza a "tocar" la superficie, el punto A se convierte en un nuevo foco que emite ondas secundarias y según transcurre el tiempo y el frente AB va incidiendo, repiten este comportamiento todos los puntos de la superficie comprendidos entre A y C. El frente de ondas reflejado, DC, es el envolvente de las ondas secundarias que se han ido emitiendo durante un tiempo igual al periodo desde el tramo AC de la pared.

En la figura se observa que:

$$\hat{\imath} = \hat{r}$$

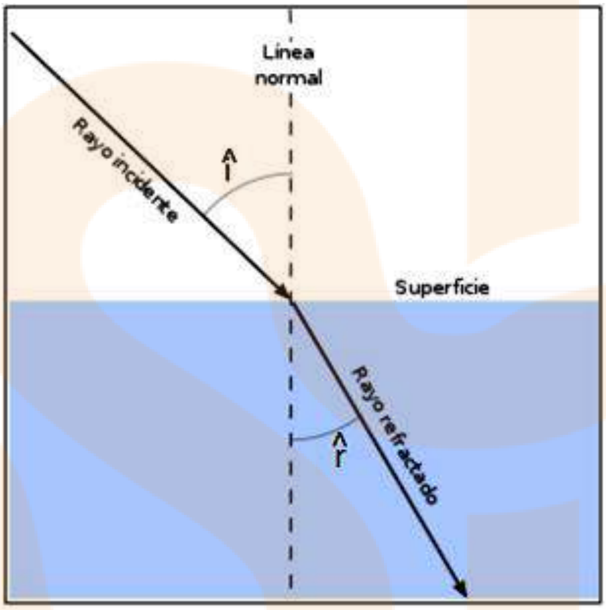
porque son semejantes los triángulos ADC y ABC, ya que su hipotenusa (AC) es común y los catetos AD y BC son idénticos (la velocidad de la onda no cambia pues no se ha cambiado de medio).

3) REFRACCIÓN DE ONDAS

La refracción se produce cuando una onda llega a la superficie de separación entre dos medios de propagación distintos. Consiste en un cambio de dirección de propagación y de velocidad de la onda al atravesar los dos medios.

① La refracción cumple la llamada ley de Snell para la refracción: El cociente entre los senos de los ángulos de incidencia y de refracción es igual al cociente entre las velocidades de propagación de la onda en los medios 1 y 2 (ver figura explicativa).

$$\frac{\text{sen}\ \hat{\imath}}{\text{sen}\ \hat{r}} = \frac{v_1}{v_2}$$



② De la ley de Snell se deduce que cuando una onda accede a un medio por el que se propaga más despacio, el ángulo de refracción es menor que el de incidencia (la dirección de propagación se acerca a la normal). En caso contrario, el ángulo de refracción es mayor que el de incidencia (la dirección de propagación se aleja de la normal).

③ Si cambia la velocidad de propagación de una onda al atravesar dos medios, ¿Qué característica de la onda cambia?

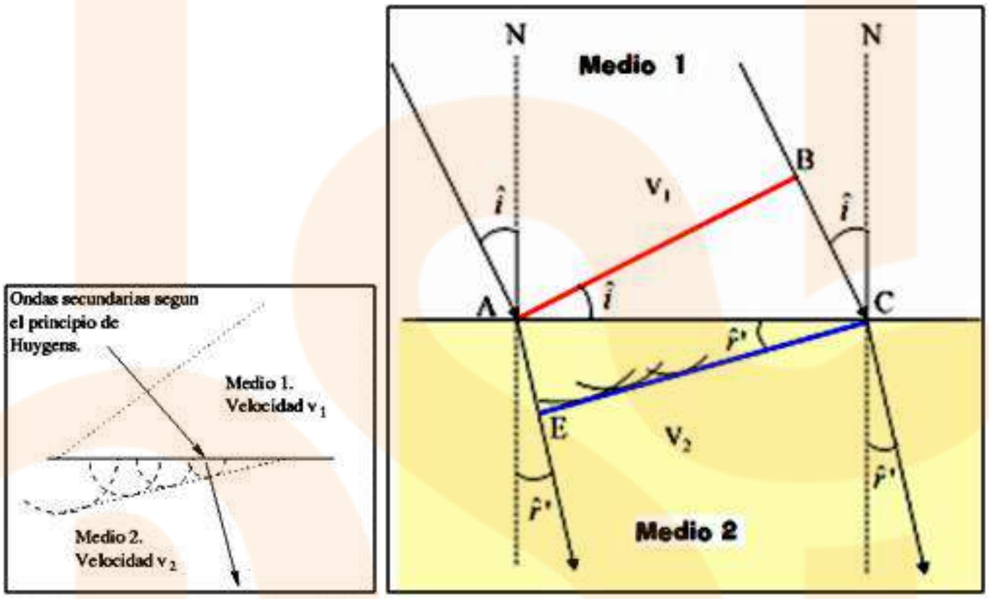
$$v = \lambda f$$

Al pasar de un medio a otro la frecuencia de la onda permanece constante, por tanto, si la velocidad cambia entonces también cambia la longitud de la onda. Si la velocidad de una onda disminuye al pasar de un medio a otro, su longitud de onda también disminuye (y viceversa).

Esto es así porque la longitud de onda es la distancia recorrida por la onda en un periodo, si la velocidad disminuye esta distancia debe disminuir. Sin embargo la frecuencia de vibración de las partículas está relacionada con la frecuencia de vibración del foco emisor de ondas, que no cambia.

④ Al igual que la reflexión, la explicación de la ley de Snell según el principio de Huygens es totalmente geométrico, se expone aquí como ampliación.

En la figura de la página siguiente se representa la refracción de una onda plana desde un medio 1 a otro medio 2, suponiendo que la velocidad de propagación es menor en el segundo medio que en el primero. A medida que el frente de ondas AB va incidiendo en la superficie de separación, los puntos AC de esa superficie se convierten en focos secundarios y transmiten la vibración hacia el segundo medio. Debido a que la velocidad en el segundo medio es menor, la envolvente de las ondas secundarias transmitidas conforma un frente de ondas EC, en el que el punto E está más próximo a la superficie de separación que el B. En consecuencia, al pasar al segundo medio los rayos se desvían acercándose a la dirección normal N.



De la figura se deduce que para un mismo tiempo,

$$BC = v_1\, t$$

$$AE = v_2\, t$$

$$\text{sen}\, \hat{\imath} = \frac{BC}{AC}$$

$$\text{sen}\, \hat{r} = \frac{AE}{AC}$$

dividiendo miembro a miembro,

$$\frac{\text{sen}\, \hat{\imath}}{\text{sen}\, \hat{r}} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AE}{AC}} = \frac{BC}{AE} = \frac{v_1\, t}{v_2\, t} = \frac{v_1}{v_2}$$

Tanto la reflexión como la refracción son tratadas con mayor profundidad en el tema dedicado a la luz (ondas electromagnéticas).

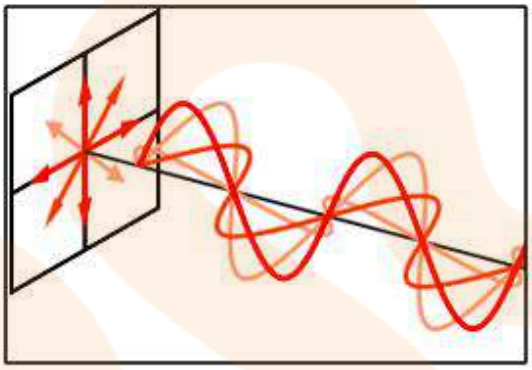
4) POLARIZACIÓN Y DIFRACCIÓN

4.1.- Polarización

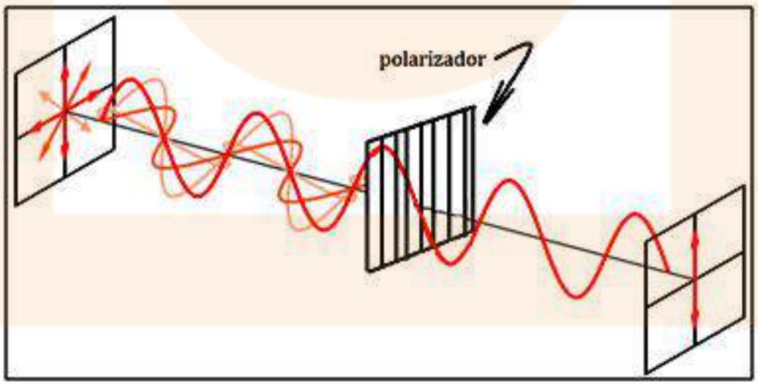
Este fenómeno sólo se produce en las ondas transversales, es decir, ondas en las que la dirección de vibración de las partículas del medio es perpendicular a la dirección de propagación de la onda.

Las ondas electromagnéticas, como la luz visible, también pueden sufrir polarización ya que los campos eléctrico y magnético auto-sostenidos vibran en dirección perpendicular a la de propagación.

Para explicar el fenómeno supongamos una onda transversal que se transmite a lo largo de una cuerda. En principio las direcciones transversales en las que puede vibrar el foco emisor de ondas son infinitas (*se trata de una onda no polarizada*). Esto es lo que pretende representar la figura siguiente, en la que se representan cuatro posibles direcciones de vibración transversales a la dirección de propagación.



Se dice que una onda transversal está *linealmente polarizada* cuando sólo puede vibrar en una sola dirección (de todas las posibles). Para conseguir polarizar una onda se utiliza un *polarizador*, un dispositivo que sólo permite el paso de las ondas que vibran en una dirección determinada.



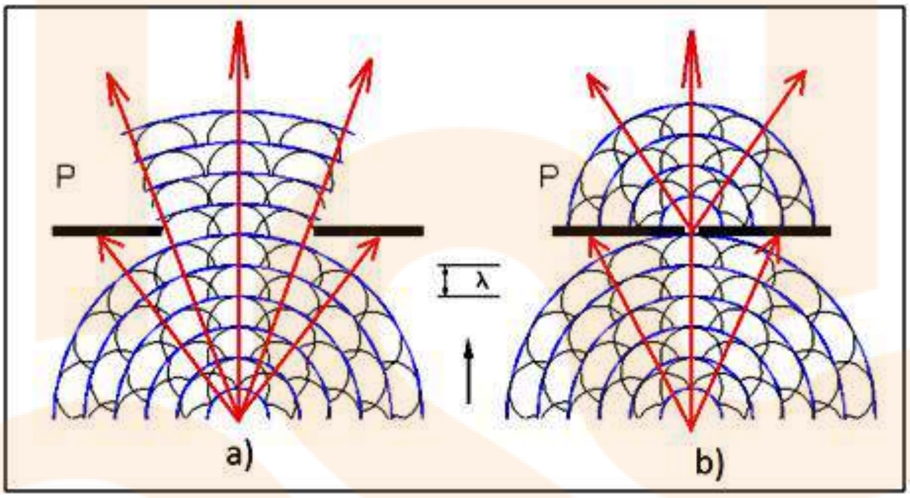
Curiosidades:

Los vidrios anti-reflectantes (gafas, lunas de los coches) son en realidad vidrios polarizadores que sólo dejan pasar una parte de la luz que reciben. A través de estos vidrios los objetos se ven más oscuros. Los monitores LCD emiten luz polarizada por lo que mirar estos dispositivos con unas gafas polarizadas puede hacer que no veamos nada si la orientación de las gafas no coincide con la orientación de vibración de los campos eléctricos y magnéticos emitidos por el monitor.

4.2.- Difracción

① El fenómeno de difracción se produce cuando un obstáculo impide el avance de una parte de un frente de onda.

② Veamos en principio lo que ocurre en dos situaciones, representadas en las dos figuras siguientes.



a) Una sucesión de frentes de onda alcanza un obstáculo cuya abertura es mayor a la longitud de onda. Como se observa las ondas se propagan siguiendo la dirección rectilínea de los rayos que parten de la fuente.

b) Una sucesión de frentes de onda alcanza un obstáculo cuya abertura tiene un tamaño comparable con la longitud de onda. Los rayos cambian de dirección al llegar a la abertura. Se ha producido un efecto de *difracción*.

> *La difracción es la desviación en la propagación rectilínea de las ondas cuando atraviesan una abertura o pasan próximas a un obstáculo.*

③ Explicación según el principio de Huygens: en b) los puntos del frente de onda que no están tapados por el obstáculo se comportan como centros emisores de ondas cuya envolvente es el nuevo frente de ondas. Es como si la abertura en b) fuese un nuevo foco emisor de ondas.

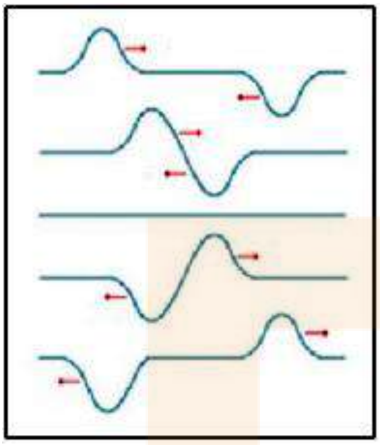
④ Curiosidades.

Debido al fenómeno de la difracción podemos oír detrás de un obstáculo, o las ondas electromagnéticas pueden salvar obstáculos, tal como se muestra en la figura adjunta.

Mediante este fenómeno se puede explicar la existencia de una zona de penumbra en la esquina entre una calle iluminada y una calle oscura.

5) SUPERPOSICIÓN DE ONDAS. INTERFERENCIAS.

Cuando dos ondas, producidas por dos focos diferentes, coinciden en un punto se produce una superposición o interferencia. Por ejemplo:

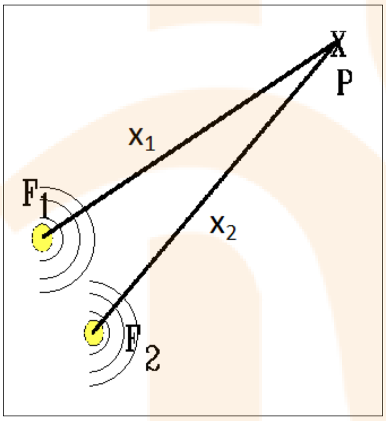


Dos pulsos desfasados en 180 grados viajan por una misma cuerda en sentidos opuestos, como se muestra en la figura adjunta. Cuando las dos ondas coinciden en el punto central se han anulado por completo, pero sólo en ese instante pues después cada pulso sigue con si viaje.

① Idea principal:

Cuando dos ondas se superponen en un punto, en dicho punto se produce una nueva onda cuya función de onda es la suma de las funciones de onda incidentes (principio de superposición).

② Supondremos que las ondas que se superponen son ondas coherentes, es decir, ondas que están en fase o cuya diferencia de fase es constante. En esta situación, si F_1 y F_2 son dos focos emisores de ondas cuyas funciones de onda son respectivamente



$$F_1 \;\rightarrow\; y_1\,(x,t)$$

$$F_2 \;\rightarrow\; y_2\,(x,t)$$

Sea P el punto donde se desea analizar el tipo de interferencia de estas dos ondas, según el principio de superposición, en P la onda que tiene lugar tiene por ecuación

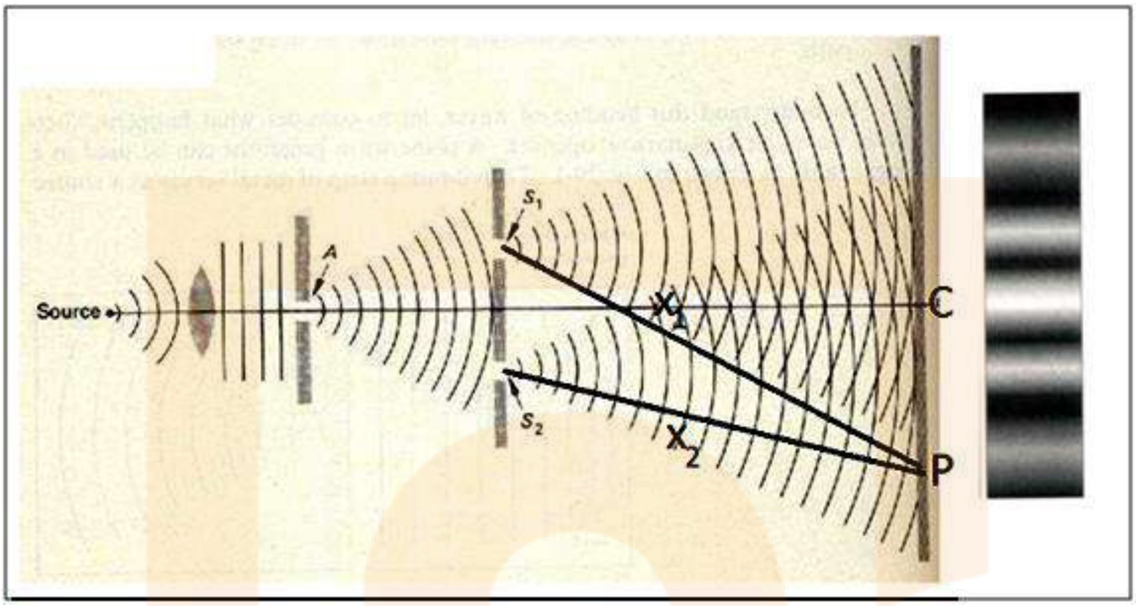
$$y = y_1\,(x_1,t) + y_2\,(x_2,t)$$

Donde x_1 y x_2 son, respectivamente, las distancias de los focos emisores F_1 y F_2 al punto considerado. Se puede observar que el tiempo para ambas ondas en el punto P es el mismo ya que en dicho punto ambas ondas coinciden en el mismo instante.

Esta será la situación que se analizará en estos apuntes donde para simplificar aún más se considerará que las ondas que interfieren tienen la misma amplitud, longitud de onda y frecuencia. Esto será en el punto ④, después aprovechar el experimento de Young para explicar lo que ocurre.

③ Descripción de lo que ocurre a través del Experimento de Young.

En el caso de la luz se pueden conseguir dos fuentes de ondas coherentes de la misma amplitud, frecuencia y longitud de onda mediante un dispositivo experimental que aprovecha el fenómeno de difracción. El dispositivo experimental no es más que una doble rendija a través de la cual se hace pasar la luz. Si el tamaño de la rendija es comparable a la longitud de la onda se produce difracción, en este caso doble difracción. Este experimento fue realizado por Thomas Young en 1801, se conoce también como experimento de la doble rendija, y sus resultados constituyeron un espaldarazo a la teoría ondulatoria de la luz.



- Una fuente luminosa emite luz que es dirigida hacia una primera rendija (A) donde se produce una primera difracción que pretende conseguir luz de una determinada longitud de onda y frecuencia.

- Después la luz, que podemos suponer originada en A, se dirige hacia una doble rendija, S_1 y S_2, donde se vuelve a producir difracción. Las dos rendijas son idénticas por lo que se crean dos focos emisores del mismo tipo de onda.

- La luz que procede de S_1 interfiere con la que procede de S_2 (y viceversa). Si se coloca una placa fotográfica a una cierta distancia de la doble rendija se obtiene una imagen (diferente según la distancia de la placa fotográfica a la doble rendija) como la que aparece en la figura anterior (idealizada).

- Se observan bandas luminosas y bandas oscuras que corresponden con zonas veladas y no veladas de la placa fotográfica. Resulta curioso que la zona central (C) es donde más luz ha llegado aunque dicho punto no está frente a ninguna de las rendijas. La intensidad luminosa de las bandas va disminuyendo conforme nos alejamos de C.

- Podemos llamar aquí zonas de vientres a las zonas veladas y zona de nodos a las zonas no veladas. Las zonas de vientres son zonas de interferencia constructiva. Las zonas de nodos son zonas de interferencia destructiva.

- En la figura anterior P, x_1 y x_2 tienen el mismo significado que en la figura explicativa del punto ②.

④ El principio de superposición debe explicar la aparición de estos vientres y nodos.

Supongamos que en el punto P, las ecuaciones de las dos ondas emitidas por los focos F1 y F2 (punto ②) son respectivamente

$$y_1\,(x_1,t) = A\,\text{sen}(\omega t - kx_1)$$

$$y_2\,(x_2,t) = A\,\text{sen}(\omega t - kx_2)$$

Para una mayor simplificación, se ha supuesto que las dos ondas que interfieren son iguales en amplitud, frecuencia angular (y, por tanto, frecuencia) y número de onda (y por tanto, longitud de onda). Además, ambas ondas no tienen fase inicial, es decir, en el instante inicial su fase es cero.

Según el principio de superposición, la onda resultante en el punto P tiene por función

$$y = \; y_1\,(x_1,t) + \; y_2\,(x_2,t) = A\,[\text{sen}(\omega t - kx_1) + \;\text{sen}(\omega t - kx_2)]$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que $\text{sen}\,a + \text{sen}\,b = \; 2\cdot\text{sen}\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}$, entonces,

$$y = 2A\cdot\text{sen}\frac{(\omega t - kx_1) + (\omega t - kx_2)}{2}\cdot\cos\frac{(\omega t - kx_1) - (\omega t - kx_2)}{2}$$

$$y = 2A\cdot\text{sen}\;\frac{2\omega t - k(x_1 + x_2)}{2}\cdot\cos\left[\frac{k(x_2 - x_1)}{2}\right]$$

$$y = 2A\cdot\cos\left[\frac{k(x_2 - x_1)}{2}\right]\cdot\text{sen}\;\left(\omega t - \;k\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

$$y = A_r\cdot\;\text{sen}\;\left(\omega t - \;k\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

Donde

$$A_r = \;2A\cdot\cos\left[\frac{k(x_2 - x_1)}{2}\right]$$

A_r recibe el nombre de amplitud resultante. Es la amplitud de la nueva onda en el punto P. Como podemos ver esta amplitud no es constante y del análisis de los valores que pueda tomar nos llevará a conclusiones importantes.

Por otra parte, la ecuación final se puede considerar la ecuación de la onda resultante en el punto P.

⑤ Análisis de la expresión de la amplitud resultante en el punto P.

$$A_r = \;2A\cdot\cos\left[\frac{k(x_2 - x_1)}{2}\right]$$

- En primer lugar mencionar una vez más que la expresión anterior se ha obtenido al sumar dos ondas coherentes sinusoidales con la misma amplitud, frecuencia y longitud de onda. Para el mismo tipo de ondas pero con una ecuación en función del coseno la amplitud resultante tendría la misma expresión. Se puede comprobar esta afirmación teniendo en cuenta que, en este caso, $\cos a + \cos b = \; 2\cdot\cos\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}$.

- En segundo lugar definir la diferencia de fase, ΔΦ, entre dos ondas coherentes de misma longitud de onda y frecuencia, en un mismo punto en un instante dado como

$$\Delta\phi = (\omega t - kx_1) - \;(\omega t - kx_2) = k(x_2 - x_1)$$

- El valor de la amplitud resultante, A_r, pasa por los valores que pueda tomar el coseno de su expresión. Veremos los casos extremos.

- *Interferencia constructiva*. Son puntos del medio donde la amplitud resultante es máxima (correspondería a zonas de vientres o zonas veladas en el experimento de Young). Para que A_r sea máxima,

$$\cos\left[\frac{k(x_2 - x_1)}{2}\right] = 1, \qquad \text{es decir,} \qquad \frac{k(x_2 - x_1)}{2} = n\,\pi\,, \qquad \text{donde } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Sustituyendo el valor del número de onda, k, operando y simplificando obtenemos

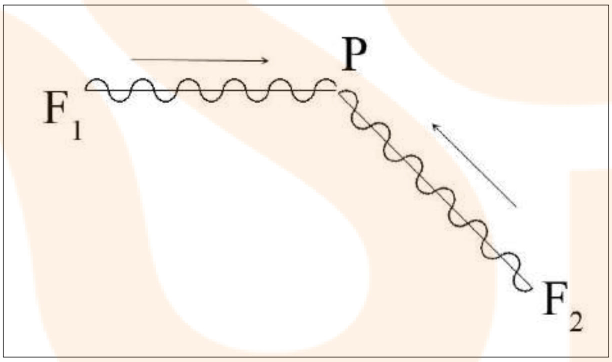
$$x_2 - x_1 = n\lambda$$

Que es la condición que cumplen todos los puntos del medio donde la amplitud es máxima (vientres).

¿Qué ocurre con la diferencia de fase de las dos ondas confluyentes en estos puntos?

$$\frac{k(x_2 - x_1)}{2} = n\,\pi = \frac{\Delta\phi}{2}\text{ , luego }\ \Delta\phi = \mathrm{n}\ 2\pi$$

Es decir, las ondas llegan en concordancia de fase, como se muestra en la figura, donde dos ondas emitidas por los focos F_1 y F_2 confluyen en el punto P en concordancia de fase.



- *Interferencia destructiva*. Son puntos del medio donde la amplitud resultante es cero (correspondería a zonas de nodos o zonas no veladas en el experimento de Young). Para que A_r sea nula,

$$\cos\left[\frac{k(x_2 - x_1)}{2}\right] = 0, \qquad \text{es decir,} \qquad \frac{k(x_2 - x_1)}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

Donde n = 0, 1, 2, 3,…Sustituyendo el valor del número de onda, k, operando y simplificando obtenemos

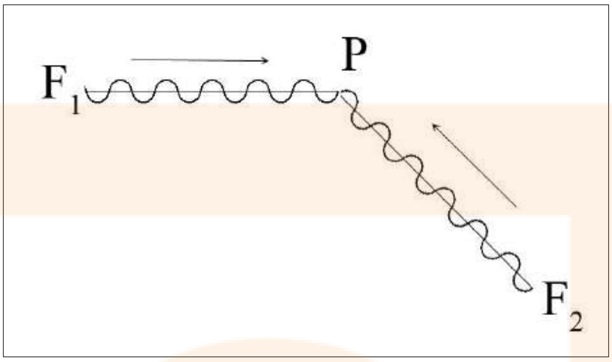
$$x_2 - x_1 = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$$

Que es la condición que cumplen todos los puntos del medio donde la amplitud es nula (nodos).

¿Qué ocurre con la diferencia de fase de las dos ondas confluyentes en estos puntos?

$$\frac{k(x_2 - x_1)}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2} = \frac{\Delta\phi}{2} \text{ , luego } \Delta\phi = (2n+1)\pi$$

Es decir, las ondas llegan en oposición de fase, como se muestra en la figura, donde dos ondas emitidas por los focos F_1 y F_2 confluyen en el punto P en oposición de fase.



Los dos casos analizados están muy idealizados. Si la interferencia se da entre ondas de la misma frecuencia pero distinta amplitud las condiciones de interferencia constructiva o destructiva son las mimas pero en la destructiva la amplitud no llega a ser cero en ningún punto.

⑥ Cuatro problemas resueltos

Dos ondas sonoras de ecuación $y = 1{,}2 \cos\ 2\pi(170t - 0{,}5x)\ \ Pa$, proceden de dos focos coherentes e interfieren en un punto P que dista 20 m de un foco y 25 m de otro foco. Determina la perturbación que originan en el punto P cada uno de estos focos, en el instante t = 1 s. Calcula la diferencia de fase de las dos ondas al llegar al punto considerado y determina la amplitud de la perturbación total en el citado punto.

Datos:

· $y = 1{,}2 \cos(170t - 0{,}5x)\ \ Pa$, quiere decir que se trata de la ecuación de una onda de presión, es decir, y representa la variación de la presión en torno a un valor central.

· $x_1 = 20$ m

· $x_2 = 25$ m

· t = 1 s

La perturbación que origina cada onda generada por cada uno de los focos en el instante pedido es,

$$y\,(20,1) = 1{,}2 \cos\ 2\pi(170 \cdot 1 - 0{,}5 \cdot 20) = 1{,}2 \cdot \cos(2\pi \cdot 160) = 1{,}2\ Pa$$
$$y\,(25,1) = 1{,}2 \cos\ 2\pi(170 \cdot 1 - 0{,}5 \cdot 25) = 1{,}2 \cdot \cos(2\pi \cdot 157{,}5) = -\ 1{,}2\ Pa$$

Por el resultado obtenido se puede ver que las dos ondas llegan en oposición de fase. Podemos comprobarlo calculando la diferencia de fase de las dos ondas, que es lo que se pide.

$$\Delta\phi = 2\pi(170 \cdot 1 - 0{,}5 \cdot 20) - 2\pi(170 \cdot 1 - 0{,}5 \cdot 25) = 2\pi \cdot (160 - 157{,}5) = 5\pi\ rad$$

$$5\pi = 2 \cdot 2\pi + \pi$$

Las ondas llegan en oposición de fase.

Para conocer la amplitud de la onda generada en el punto P debemos aplicar el principio de superposición. La onda generada en el punto P tendrá por ecuación,

$$y_t = y(20,1) + y(25,1) = 0$$

Es decir, la interferencia en el punto P es destructiva. Esto también se pude comprobar al comparar la diferencia de recorridos de las dos ondas con la longitud de las mismas. Primero calculamos la longitud de onda,

$$\frac{1}{\lambda} = 0{,}5, \qquad \lambda = 2\ m$$

Si utilizamos la condición de interferencia destructiva para las distancias dadas,

$$x_2 - x_1 = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$$

$$25 - 20 = (2n+1)\frac{2}{2}$$

$$5 = (2n+1); \qquad 4 = 2n; \qquad n = 2$$

Valor que indica que la diferencia entre las distancias de los dos focos es un número impar de veces (5) la semi-longitud de onda.

Dos ondas $y_1 = 0{,}3\cos(200t - 0{,}050x_1)$ *e* $y_2 = 0{,}3\cos(200t - 0{,}050x_2)$ se propagan por el mismo medio. Si las ondas se anulan en un punto distante 10 m del centro emisor de la primera onda, calcula el valor más pequeño de la distancia a la que se puede encontrar el segundo foco.

<u>Datos</u>

· $y_1 = 0{,}3\cos(200t - 0{,}050x_1)$
· $y_2 = 0{,}3\cos(200t - 0{,}050x_2)$
· $x_1 = 10$ m

La condición de interferencia destructiva (ondas que se anulan) es

$$x_2 - x_1 = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$$

La longitud de estas ondas se puede determinar a partir del número de onda que viene dado en las expresiones de las funciones de onda,

$$k = 0{,}050 = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \lambda = \frac{2\pi}{0{,}050} = 126\ m$$

Si utilizamos este valor en la condición de interferencia destructiva, y sustituimos n por 0 con objeto de encontrar el punto más cercano, podemos saber la posición del segundo foco,

$$x_2 - 10 = (2 \cdot 0 + 1)\frac{126}{2}$$

$$x_2 = 63 + 10 = 73\ m$$

Dos ondas transversales polarizadas con el mismo plano de polarización se propagan por un medio, tienen la misma frecuencia (100 Hz), longitud de onda (82 m) y amplitud (0,02 m), pero están desfasadas en 30º. Calcular: a) la amplitud de la onda resultante y su ecuación de onda para los puntos equidistantes a los dos focos emisores; b) la velocidad máxima de un punto de la cuerda.

Datos

· f = 100 Hz, por tanto, ω = 2πf = 200π rad/s

· λ = 82 m, por tanto, k = 2π/λ = π/41 m^{-1}

· A = 0,02 m

· Desfase entre las dos ondas: 30º = π/6

a) Empezaremos por las ecuaciones de las ondas. Las escribiremos en función del seno al no dar datos el problema de que no se pueda hacer.

$$onda\ 1 \ \rightarrow \ y_1(x,t) = 0{,}02 \text{ sen } \left[200\pi\, t - \frac{\pi x}{41}\right]$$
$$onda\ 2 \ \rightarrow \ y_2(x,t) = 0{,}02 \text{ sen } \left[200\pi\, t - \frac{\pi x}{41} + \frac{\pi}{6}\right]$$

Cuando estas dos ondas interfieren en un punto cualquiera, supuesto equidistante de los dos focos emisores, la onda resultante tiene por función, según el principio de superposición,

$$y = y_1 + y_2 = 2 \cdot 0{,}02 \cdot \cos\left[\frac{\left(200\pi\, t - \frac{\pi x}{41}\right) - \left(200\pi\, t - \frac{\pi x}{41} + \frac{\pi}{6}\right)}{2}\right] \cdot \text{sen}\left[\frac{\left(200\pi\, t - \frac{\pi x}{41}\right) + \left(200\pi\, t - \frac{\pi x}{41} + \frac{\pi}{6}\right)}{2}\right]$$

$$y = 0{,}04 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) \cdot sen\left[\frac{2\left(200\pi t - \frac{\pi x}{41} + \frac{\pi}{12}\right)}{2}\right]$$

$$y = 0{,}039 \cdot sen\left[200\pi t - \frac{\pi x}{41} + \frac{\pi}{12}\right]$$

Que es la ecuación de la onda resultante para los puntos equidistantes de ambos focos. Su amplitud 0,039 m.

b) La velocidad de vibración de estos puntos será:

$$v = \frac{dy}{dt} = 0{,}039 \cdot 200\pi \cdot \cos\left[200\pi t - \frac{\pi x}{41} + \frac{\pi}{12}\right]$$

Que será máxima si el coseno vale ± 1. En estos casos,

$$v_{máx.} = \pm 0{,}039 \cdot 200\pi = \pm 24{,}5\ m/s$$

Al oscilador de una cubeta de ondas se le acopla un accesorio que consta de dos punzones separados por una distancia de 4 cm. Al incidir sobre la superficie del agua generan ondas coherentes con una frecuencia de 24 Hz, que se propagan con una velocidad de 12 cm/s. Determina el tipo de perturbación que existirá en los siguientes puntos: A que dista 10 cm de un foco y 12 del otro; B que dista 10 cm de un foco y 8,5 del otro; C que dista 8 cm de un foco y 9,75 cm del otro; D que dista 8 cm de un foco y 9,15 del otro.

<u>Datos</u>
· Distancia entre focos: 4 cm
· f = 24 Hz
· v = 12 cm/s
· Punto A: x_1 = 10 cm, x_2 = 12 cm; Punto B: x_1 = 10 cm, x_2 = 8,5 cm; Punto C: x_1 = 8 cm, x_2 = 9,75 cm; Punto D: x_1 = 8 cm, x_2 = 9,25 cm

En este problema es más cómodo trabajar con las distancias en centímetros. Calcularemos primero la longitud de onda de las ondas generadas (ondas coherentes que tienen la misma longitud de onda),

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{12}{24} = 0{,}5\ cm$$

Punto A.

Probaremos con la condición de interferencia constructiva,

$$x_2 - x_1 = n\lambda \quad (n = 1,2,3, \dots)$$
$$12 - 10 = 2\ cm$$
$$2 = n \cdot 0{,}5 \qquad n = 4$$

Que es un número entero de longitudes de onda. Por tanto, las dos ondas llegan al punto A en fase y la interferencia es constructiva.

Punto B.

La diferencia entre las distancias de los focos al punto B es

$$x_2 - x_1 = 10 - 8{,}5 = 1{,}5\ cm$$
$$1{,}5 = n \cdot 0{,}5 \qquad n = 3$$

Que es un número entero de longitudes de onda. Por tanto, las dos ondas llegan al punto B en fase y la interferencia es constructiva.

Punto C.

La diferencia entre las distancias de los focos al punto C es

$$x_2 - x_1 = 9{,}75 - 8 = 1{,}75\ cm$$

Si utilizamos la condición de interferencia constructiva vemos que no es posible pues n no da un número entero,

$$1{,}75 = n \cdot 0{,}5 \qquad n = 3{,}5$$

Probamos entonces con la condición de interferencia destructiva

$$x_2 - x_1 = (2n+1)\frac{\lambda}{2} \quad (n = 0,1,2,3, \dots)$$
$$1{,}75 = (2n+1)\frac{0{,}5}{2} \qquad (2n+1) = 7$$

Qué es un número impar de semilongitudes de onda. Por tanto, las dos ondas llegan al punto C en oposición de fase y la interferencia es destructiva.

Punto D.

La diferencia entre las distancias de los focos al punto D es

$$x_2 - x_1 = 9{,}15 - 8 = 1{,}15\ cm$$

Se puede comprobar que esta diferencia entre distancias no cumple ni la condición de interferencia constructiva (n = 2,3) ni la condición de interferencia destructiva (n = 4,6). Se trata de un punto entre dos con interferencia constructiva y destructiva. Se podría calcular la diferencia de fase entre las dos ondas al llegar a este punto:

$$\Delta\phi = (\omega t - kx_1) - (\omega t - kx_2) = k(x_2 - x_1)$$
$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{0{,}5}(1{,}15) = 4{,}6\pi\ rad$$

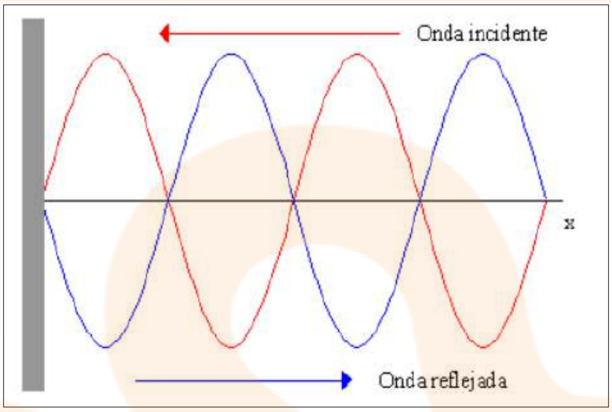
6) SUPERPOSICIÓN DE ONDAS: ONDAS ESTACIONARIAS

① ¿Qué son? ¿cuándo se producen?

Las ondas estacionarias se producen por interferencia de dos ondas idénticas (misma amplitud, frecuencia y longitud de onda) que se propagan en sentidos opuestos.

② Ejemplos:

- Si en una cuerda con un extremo fijo y el otro libre generamos una oda en el extremo libre, éste se propaga hasta el extremo fijo y se refleja volviendo por la cuerda hasta el extremo libre. La onda incidente y reflejada tienen las mismas características.

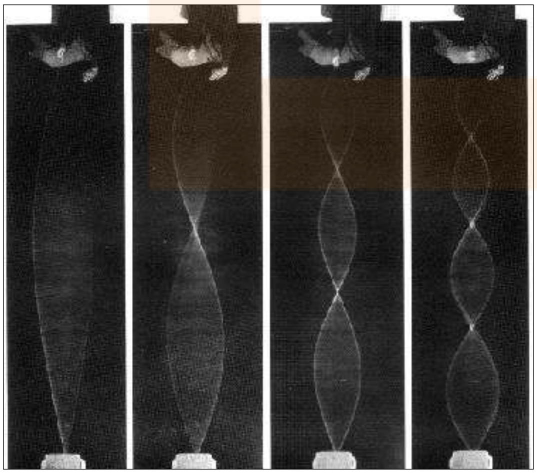


- Las ondas estacionarias se producen en instrumentos musicales, como guitarras y violines, son ondas que se propagan en medios no abiertos o limitados pues tienen obstáculos (los límites de las cuerdas) en los que son reflejadas, entonces las ondas reflejadas interfieren con las ondas incidentes y forman ondas estacionarias.

- También se producen ondas estacionarias en tubos sonoros, como la flauta.

Distinguiremos pues tres casos:

- Ondas estacionarias en una cuerda fija por un extremo
- Ondas estacionarias en una cuerda fija por dos extremos
- Ondas estacionarias en tubos sonoros



③ Observación de una onda estacionaria. Características.

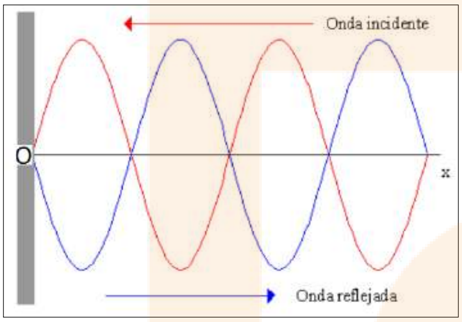
El resultado de la interferencia es que unos puntos están siempre en reposo y otros presentan movimiento vibratorio armónico de distintas amplitudes, alcanzando todos en el mismo instante posiciones centrales y extremos de vibración.

- Reciben el nombre de ondas estacionarias porque el perfil de la onda no se desplaza. Cada punto del medio está vibrando siempre de la misma manera.

- Los puntos que vibran con mayor amplitud se llaman vientres. Hay puntos que no vibran, se llaman nodos.

- Si la onda estacionaria no se desplaza, en realidad no es una onda pues no hay transporte de energía ya que hay puntos en reposo permanente (nodos) que no la transmiten. En una onda estacionaria se está transformando de forma permanente y para cada partícula vibrante (excepto nodos), energía cinética en energía potencial elástica y viceversa.

④ Ecuación de una onda estacionaria.



La situación de partida será la de la figura adjunta, una onda se propaga por una cuerda en el sentido negativo del eje OX, su ecuación:

$$y_i = A\ \text{sen}(\omega t + kx)$$

Al llegar al origen de coordenadas la onda es reflejada. La función de la onda reflejada será:

$$y_r = A\ \text{sen}(\omega t - kx + \pi)$$

Donde podemos observar que dicha onda está desfasada 180º respecto de la onda incidente (ha habido un cambio de fase en la reflexión). Ahora bien, como $\text{sen}\ (\alpha + \pi) = -\ \text{sen}\ \alpha$

$$y_r = A\ \text{sen}(\omega t - kx + \pi) = -A\ \text{sen}(\omega t - kx)$$

Si queremos analizar cualquier punto de la cuerda, la función de onda dicho punto será, según el principio de superposición,

$$y = y_i + y_r = A\ \text{sen}(\omega t + kx) - A\ \text{sen}(\omega t - kx)$$

Como

$$\text{sen}\ a - \text{sen}\ b = 2 \cdot \cos\frac{a+b}{2} \cdot \text{sen}\frac{a-b}{2}$$

entonces

$$y = 2A\cos\left(\frac{\omega t + kx + \omega t - kx}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\omega t + kx - \omega t + kx}{2}\right)$$

$$y = 2A\ \text{sen}(kx)\cos(\omega t)$$

La ecuación resultante es la ecuación de la onda estacionaria, que depende de la posición y del tiempo separadamente. Si llamamos amplitud resultante a $A_r = 2A\ \text{sen}\ (kx)$, entonces

$$y = A_r\cos(\omega t)$$

Como vemos en la ecuación, una onda estacionaria tiene la misma frecuencia y longitud de onda originales y su amplitud depende de la localización de la partícula en la cuerda y no del tiempo. Además vemos que se trata de la ecuación del m.a.s. con la particularidad de que, dependiendo de la partícula que se trate, así será la amplitud de dicho m.a.s.

⑤ Otras ecuaciones de ondas estacionarias.

Dependiendo de la función de onda incidente y reflejada que se utilice, se obtienen diferentes formas de la función de onda estacionaria, tal como se observa en la tabla siguiente.

Onda incidente y onda reflejada	Onda estacionaria
$y_i = A\,\text{sen}(\omega t + kx)$ $y_r = A\,\text{sen}(\omega t - kx + \pi)$	$y = 2A\,\text{sen}(kx)\cos(\omega t)$
$y_i = A\,\text{sen}(\omega t + kx)$ $y_r = A\,\text{sen}(\omega t - kx)$	$y = 2A\cos(kx)\,\text{sen}(\omega t)$
$y_i = A\cos(\omega t + kx)$ $y_r = A\cos(\omega t - kx)$	$y = 2A\,\text{sen}(kx)\,\text{sen}(\omega t)$
$y_i = A\cos\,(\omega t - kx)$ $y_r = A\cos(\omega t + kx + \pi)$	$y = 2A\,\text{sen}(kx)\,\text{sen}(\omega t)$

Por tanto, la ecuación de la onda estacionaria depende de las ecuaciones de las ondas incidente y reflejada que se elijan.

⑥ Posición de nodos y vientres.

Utilizaremos la onda estacionaria deducida en el punto ④, es decir,

$$y = 2A\,\text{sen}(kx)\cos(\omega t)$$

$$y = A_r\cos(\omega t) \qquad A_r = 2A\,\text{sen}\,(kx)$$

<u>Vientres</u>

-La amplitud es máxima cuando $\text{sen}\,(kx) = \pm 1$, en esta situación, $A_r = 2A$.

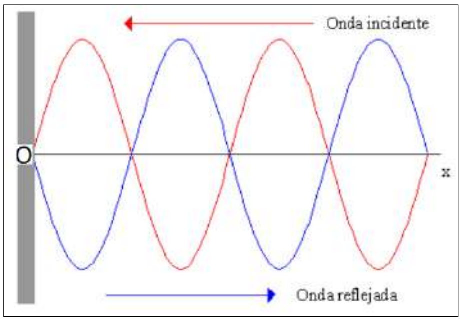
-Cuando ocurre esta circunstancia,

$$kx = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = (2n+1)\frac{\pi}{2} \qquad x = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

-Todos los puntos que distan un número impar de cuartos de longitudes de onda del extremo fijo son vientres.

-En la figura adjunta se puede ver que la distancia entre vientres consecutivos es $\lambda/2$.



<u>Nodos</u>

-La amplitud es mínima cuando $\text{sen}\,(kx) = 0$, en esta situación $A_r = 0$.

-Cuando ocurre esta circunstancia,

$$kx = n\pi$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi \qquad x = n\frac{\lambda}{2} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

-Todos los puntos que distan un número entero de veces la mitad de la longitud de onda son nodos.

-En la figura anterior también se puede ver que la distancia entre nodos consecutivos es $\lambda/2$.

6.1.- Ondas estacionarias en una cuerda fija por un extremo y en un tubo con un extremo abierto

Sea una cuerda, de longitud L, con un extremo fijo y otro libre. En el extremo fijo debe existir un nodo y en el libre, un vientre.

La condición de vientre en una onda estacionaria es, según hemos visto

$$x = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

Si aplicamos la condición de vientre al extremo libre, hacemos x = L

$$L = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

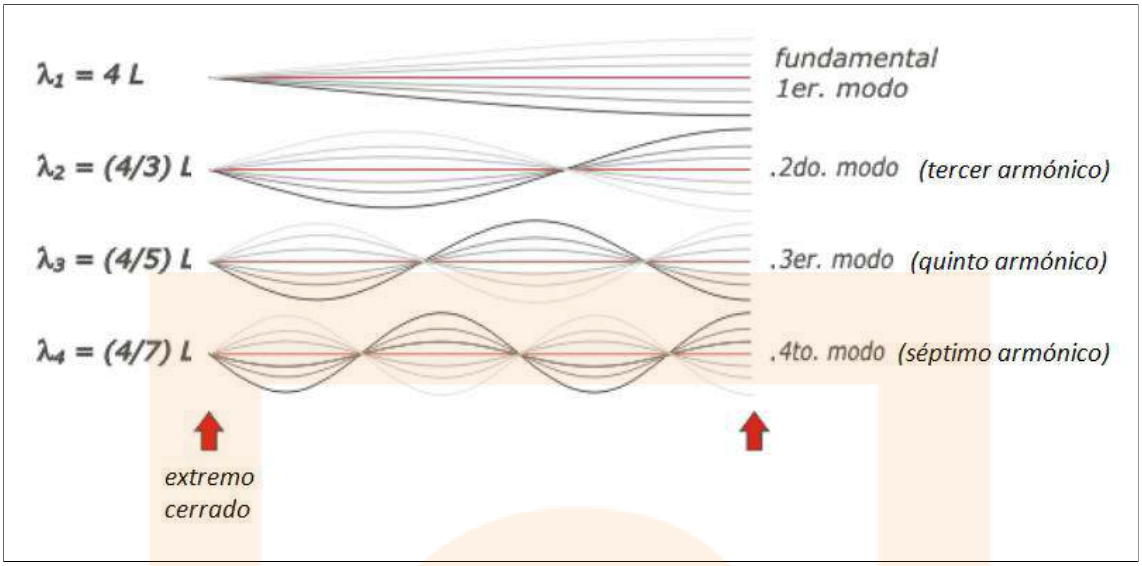
Despejamos la longitud de onda

$$\lambda = \frac{4L}{(2n+1)}$$

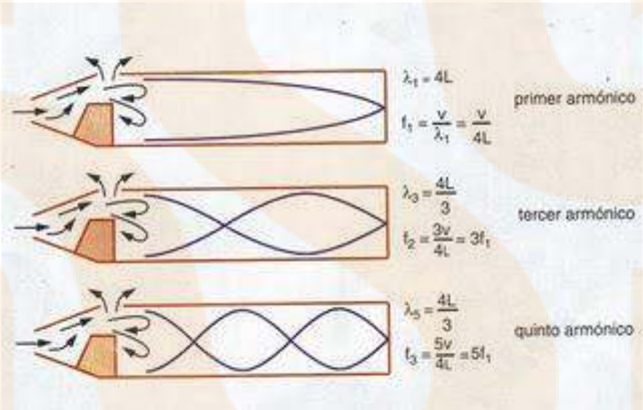
Esta condición es la que deben cumplir todas las ondas estacionarias que se creen en esta cuerda y que vienen descritos en la tabla y figuras siguientes.

n	Modo de vibración	Longitud de onda	Frecuencia $\left(f = \frac{v}{\lambda}\right)$	Descripción
0	Fundamental	$\lambda_1 = 4L$	$f_1 = \frac{v}{4L}$	1 nodo 1 vientre
1	Tercer armónico	$\lambda_2 = \frac{4L}{3} = \frac{\lambda_1}{3}$	$f_2 = 3\frac{v}{4L} = 3f_1$	2 nodos 2 vientres
2	Quinto armónico	$\lambda_3 = \frac{4L}{5} = \frac{\lambda_1}{5}$	$f_3 = 5\frac{v}{4L} = 5f_1$	3 nodos 3 vientres
3	Séptimo armónico	$\lambda_4 = \frac{4L}{7} = \frac{\lambda_1}{7}$	$f_4 = 7\frac{v}{4L} = 7f_1$	4 nodos 4 vientres

Ondas estacionarias en una cuerda fija por un extremo



Ondas estacionarias en un tubo con un extremo abierto cumplen las mismas condiciones



__6.2.- Ondas estacionarias en una cuerda fija por sus dos extremos y en tubos con los dos extremos abiertos__

Sea una cuerda, de longitud L, con los dos extremos fijos. En estas condiciones los dos extremos fijos son dos nodos.

La condición de nodo en una onda estacionario es, según hemos visto

$$x = n\frac{\lambda}{2}$$

Si aplicamos la condición de nodo a uno de los extremos, hacemos x = L

$$L = n\frac{\lambda}{2}$$

Despejamos la longitud de onda

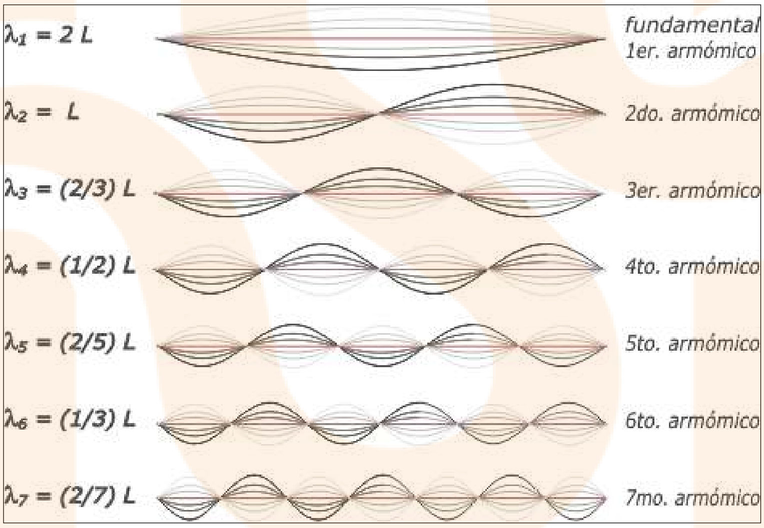
$$\lambda = \frac{2L}{n}$$

Esta condición es la que deben cumplir todas las ondas estacionarias que se creen en esta cuerda y que vienen descritos en la tabla y figuras siguientes.

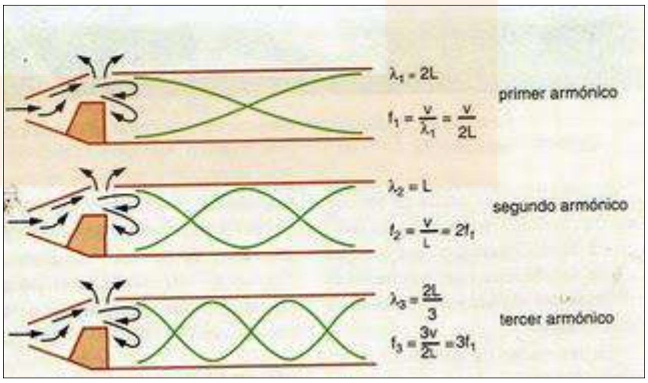
n[1]	Modo de vibración	Longitud de onda	Frecuencia $\left(f = \frac{v}{\lambda}\right)$	Descripción
1	Fundamental	$\lambda_1 = 2L$	$f_1 = \frac{v}{2L}$	2 nodos 1 vientre
2	Segundo armónico	$\lambda_2 = \frac{2L}{2} = \frac{\lambda_1}{2}$	$f_2 = 2\frac{v}{2L} = 2f_1$	3 nodos 2 vientres
3	Tercer armónico	$\lambda_3 = \frac{2L}{3} = \frac{\lambda_1}{3}$	$f_3 = 3\frac{v}{2L} = 3f_1$	4 nodos 3 vientres
4	Cuarto armónico	$\lambda_4 = \frac{2L}{4} = \frac{\lambda_1}{4}$	$f_4 = 4\frac{v}{2L} = 4f_1$	5 nodos 4 vientres

[1] El valor n=0 correspondería al nodo de uno de los dos extremos. Si estamos haciendo x=L el valor n=1 correspondería al nodo del otro extremo, que es por el que se empieza a contar aquí.

Ondas estacionarias en una cuerda fija por sus dos extremos



Ondas estacionarias *en tubos con los dos extremos abiertos.* Cumplen las mismas condiciones (longitud de onda y frecuencia), pero se el número de nodos y de vientres se intercambian respecto de los mencionados en una cuerda. Por ejemplo, en el segundo armónico de una cuerda hay 3 nodos y dos vientres, y en el segundo armónico de un tubo abierto hay 3 vientres y dos nodos.



Tres problemas resueltos

a) Se hace vibrar una cuerda de guitarra de 0,4 m de longitud, sujeta por los dos extremos. Calcule la frecuencia fundamental de vibración, suponiendo que la velocidad de propagación de la onda en la cuerda es de 352 m s^{-1}.

b) Explique por qué, si se acorta la longitud de una cuerda en una guitarra, el sonido resulta más agudo.

Datos:
· L = 0,4 m
· v = 352 m·s^{-1}

a) Cuando una cuerda se sujeta por los dos extremos dichos extremos son nodos. Si la amplitud resultante de las ondas estacionarias generadas en la misma tiene la forma

$$A_r = 2A \text{ sen } kx$$

La condición de nodo es

$$x = n\frac{\lambda}{2} \qquad \lambda = \frac{2x}{n}$$

Si aplicamos la condición de nodo a uno de los extremos, hacemos x = L = 0,4 m

$$\lambda = \frac{2x}{n} = \frac{2L}{n}$$

Despejamos la longitud de onda

$$\lambda = \frac{0{,}8}{n}$$

El modo fundamental de vibración tiene lugar cuando n = 1, entonces λ = 0,8 m.
Conocida la longitud de onda del modo fundamental, la frecuencia se puede determinar si se sabe la velocidad de la onda en la cuerda,

$$v = \lambda \cdot f \qquad f = \frac{v}{\lambda} = \frac{352}{0{,}8} = 440\ Hz$$

b) La frecuencia en función de la longitud de la cuerda viene dada por

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{\frac{2L}{n}} = \frac{nv}{2L}$$

Si de la frecuencia fundamental se trata

$$f = \frac{v}{2L}$$

Como vemos la longitud de la cuerda está en el denominador. Así, si la longitud disminuye la frecuencia aumenta. En el caso del sonido el tono es la cualidad que está relacionada con la frecuencia, los tonos agudos corresponden a frecuencias más altas, que es lo que ocurre cuando la cuerda se acorta.

Una onda estacionaria tiene por ecuación $y = 10\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)\cos(10\pi t)$ donde *x* e *y* se miden en cm y *t* en segundos. Determina:

a) Magnitudes características de las ondas que al interferir dan lugar a la onda estacionaria.

b) La posición de los nodos y la distancia entre un nodo y un vientre consecutivos.

c) La velocidad de vibración instantánea de la partícula situada en la posición x = 3 cm.

d) La velocidad máxima de vibración de la partícula situada en la posición x = 6 cm.

$$y = 10\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)\cos(10\pi t)$$

a) La ecuación de la onda estacionaria del enunciado tiene como forma general

$$y = 2A\cos(kx)\cos(\omega t)$$

Por tanto, en dicha ecuación podemos encontrar las magnitudes características de las dos ondas que interfieren. Así, identificando entre las dos ecuaciones encontramos que,

· Amplitud: $2A = 10 \text{ cm} \rightarrow A = 5 \text{ cm}$

· Frecuencia: $\omega = 10\pi \frac{rad}{s} \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10\pi}{2\pi} = 5 \text{ Hz}$

· Longitud de onda: $k = \frac{\pi}{6}\, m^{-1} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\pi/6} = 12 \text{ cm}$

· Velocidad de propagación: $v = \lambda \cdot f = 12 \cdot 5 = 60\ cm/s$

b) Nodos son los puntos en los que la amplitud es cero. La amplitud de la onda estacionaria dada es

$$A_r = 10\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)$$

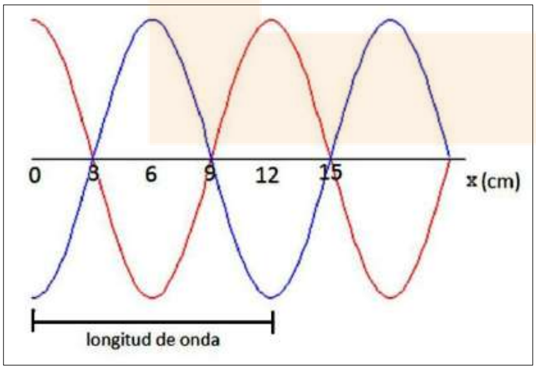
Dicha amplitud será cero si $\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) = 0$, es decir,

$$\left(\frac{\pi}{6}x\right) = (2n+1)\frac{\pi}{2} \qquad \text{donde n} = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Despejando x,

$$x = 3(2n+1) = 6n + 3$$

Los nodos están situados en las posiciones x = 3 cm, 9 cm, 15 cm, 21 cm, …



Dado que la distancia entre dos nodos consecutivos es media longitud de onda, 6 cm, la distancia entre un nodo y un vientre es un cuarto de longitud de onda, es decir, 3 cm (ver figura). Se puede observar en la representación de la onda estacionaria que cuando x = 0 la amplitud es máxima, como corresponde a la ecuación de la onda que aparece en el enunciado.

c) La velocidad de vibración de las partículas del medio se puede obtener derivando la función de onda estacionaria respecto del tiempo,

$$v = \frac{dy}{dt} = -10\pi \cdot \ 10\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)\ \text{sen}(10\pi t) = \ -100\pi\ \cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)\ \text{sen}(10\pi t)$$

La velocidad de vibración de la partícula situada a 3 cm del extremo de la cuerda será, en cm/s,

$$v(3,t) = \ -100\pi\ \cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 3\right)\ \text{sen}(10\pi t) = 0$$

La partícula situada en x = 3 cm es un nodo y, por tanto, su velocidad siempre es cero. Esta circunstancia ya se podía observar en la figura anterior.

d) A partir de la expresión de la velocidad de vibración del apartado anterior, para la partícula situada a 6 cm de extremo de la cuerda,

$$v(6,t) = \ -100\pi\ \cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 6\right)\ \text{sen}(10\pi t) = -100\pi\cos\pi\ \text{sen}(10\pi t) = \ 100\pi\ \text{sen}(10\pi t)$$

Dicha velocidad es máxima si $\text{sen}(10\pi t) = \pm 1$, entonces,

$$v_{máx} = \ \pm 100\pi = \ \pm 314\frac{cm}{s}$$

Este punto es un vientre, su velocidad de vibración es máxima cuando pasa por su posición de equilibrio siendo +314 cm/s cuando se dirige en el sentido positivo del eje OY, y -314 cm/s cuando lo hace en el sentido negativo de dicho eje.

En una cuerda tensa, sujeta por sus extremos, se tiene una onda de ecuación:

$$y = 0{,}02\ \text{sen}(4\pi\ x)\cos(200\pi\ t) \quad (S.I.)$$

Indicar el tipo de onda de que se trata y calcular razonadamente la longitud mínima de la cuerda que puede contener esa onda. ¿Podría existir esa onda en una cuerda más larga?

$$y = 0{,}02\ \text{sen}(4\pi\ x)\cos(200\pi\ t) \quad (S.I.)$$

Se trata de una onda estacionaria unidimensional, transversal y armónica, resultado de la superposición de dos ondas iguales en amplitud, frecuencia y longitud de onda pero que se propagan en sentidos opuestos, una en sentido positivo del eje OX y la otra en sentido negativo.

Según se indica en el enunciado esta onda está "confinada" entre dos extremos, es decir, como mínimo puede vibrar formando dos nodos (los extremos) y un vientre. Este modo de vibración es el fundamental y en él los nodos se encuentran, según se ha dicho en x=0 y x=L, donde L es la longitud de la cuerda.

El número de onda, k, y la longitud de onda, λ, de esta onda estacionaria son

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 4\pi\ \ m^{-1} \ \ \rightarrow \ \ \lambda = 0{,}5\ m$$

Los nodos de esta onda cumplen la siguiente condición,

$$\text{sen}(kx) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{2\pi}{\lambda}\, x = n \cdot \pi \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

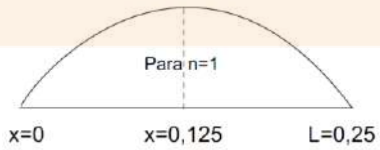
Si hacemos x = L y despejamos

$$4\, L = n \qquad \rightarrow \qquad L = \frac{n\lambda}{2}$$

El valor mínimo de L será cuando n = 1, entonces

$$L = \frac{\lambda}{2} = 0{,}25\, m$$

Cuerda mínima, nodos y vientre



Por otra parte, si la cuerda fuera más larga la expresión obtenida para su longitud

$$L = \frac{n\lambda}{2}$$

nos indica que la longitud de la cuerda es directamente proporcional a la longitud de la onda estacionaria generada. En el modo fundamental de vibración (n=1), si la longitud de la cuerda cambia entonces la longitud de la onda estacionaria cambia y, por tanto, no se trata de la misma onda.

Estos apuntes se finalizaron el 3 de diciembre de 2010
en Villanueva del Arzobispo, Jaén (España).

Realizados por: Felipe Moreno Romero
fresenius1@gmail.com
http://www.escritoscientificos.es