TEMA 0. OPERACIONES CON VECTORES

1. MAGNITUDES FÍSICAS Y SU CLASIFICACIÓN

Una magnitud física es una propiedad de los cuerpos que se puede medir, es decir, que se puede expresar mediante una cantidad y su correspondiente unidad.

Una primera clasificación de las magnitudes físicas es:

- Magnitudes físicas fundamentales
- Magnitudes físicas derivadas.

Recuerda que las primeras se definen sin hacer uso de ninguna otra magnitud y que las segundas utilizan para su definición a una o varias de las primeras. La elección de las magnitudes fundamentales es arbitraria pero, el número de magnitudes fundamentales elegidas debe ser el mínimo que se necesite para definir coherentemente y con precisión a todas las demás (por esto se llaman derivadas).

Tanto las magnitudes físicas fundamentales como las derivadas se agrupan en sistemas de unidades. En la tabla siguiente se recogen las magnitudes fundamentales y sus unidades en el Sistema Internacional de Unidades (SI):

MAGNITUDES FUNDAMENTALES Y SUS UNIDADES EN EL SI		
MAGNITUD	**UNIDAD DE MEDIDA**	**SÍMBOLO**
Longitud	*metro*	*m*
Masa	*kilogramo*	*Kg*
Tiempo	*segundo*	*s*
Temperatura	*grado Kelvin*	*K*
Intensidad de corriente eléctrica	*amperio*	*A*
Intensidad luminosa	*candela*	*Cd*
Cantidad de materia	*mol*	*mol*
UNIDADES COMPLEMENTARIAS DEL SI		
Ángulo plano	*radián*	*rad*
Ángulo sólido	*estereoradian*	*sr*

Recuerda que la medida de cualquier magnitud física en una unidad la puedes cambiar a otra unidad equivalente y que el método más recomendable es el llamado “método de las fracciones unitarias”.

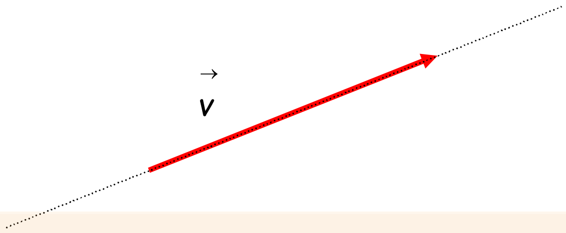
Desde otro punto de vista las magnitudes físicas se clasifican en:

- ✓ Magnitudes físicas escalares.
- ✓ Magnitudes físicas vectoriales

Recuerda que una magnitud física se dice que es escalar cuando queda perfectamente determinada mediante una cantidad y su correspondiente unidad. Este es el caso de la masa, temperatura, superficie, volumen, densidad, trabajo, etc.

Sin embargo para que una magnitud física vectorial quede perfectamente determinada no basta con dar la cantidad y su unidad, es necesario saber la dirección y el sentido (algunas veces también el punto de aplicación). Es el caso de la posición, velocidad, aceleración, fuerza, cantidad de movimiento, etc.

Las magnitudes físicas vectoriales se representan gráficamente mediante una flecha, denominada **VECTOR**, y se escribe simbólicamente con la letra que simboliza a la magnitud física con una flecha encima. Por ejemplo el vector velocidad sería:



En una magnitud física hemos de hablar de las siguientes características:

DIRECCIÓN: Es la recta que contiene al vector o que es paralela al vector.

SENTIDO: Es el extremo del vector.

MÓDULO: Es el valor numérico de la magnitud física y es directamente proporcional la longitud del vector. Se representa por:

$$|\vec{v}|$$

EJEMPLO 1º

Indica la dirección sentido y módulo de la magnitud física vectorial correspondiente en cada uno de los casos siguientes:

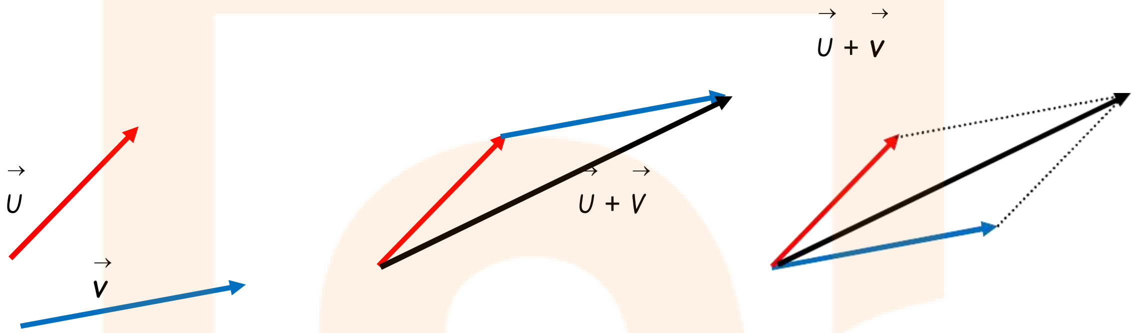
a) Coche que circula a 50 Km/h hacia la derecha.
b) Objeto que es lanzado verticalmente hacia arriba a 10 m/s.
c) Tren que se acerca al andén de la estación por tu derecha a 20 Km/h.
d) Aceleración de la gravedad terrestre.
e) Objeto que desciende a 5 m/s.
f) Moto que se acerca al paso de peatones por tu izquierda a 20 m/s.
g) Tu peso.
h) Balón que se chuta a 200 m/s con formando un ángulo de 45º con la horizontal.
i) Jugador de tenis que golpea la pelota hacia abajo formando 45º con la horizontal a 100 m/s.

2.- OPERACIONES GEOMÉTRICAS CON MAGNITUDES VECTORIALES.

Para operar con magnitudes escalares basta con manejar las cantidades y las unidades coherentes, pero para operar con magnitudes vectoriales no sólo hay que tener en cuenta la cantidad (módulo), hay que tener también en cuenta la dirección y el sentido. Recordemos las operaciones con vectores vistas los cursos anteriores y ampliemos a alguna más.

2.1 Suma y resta geométrica de vectores

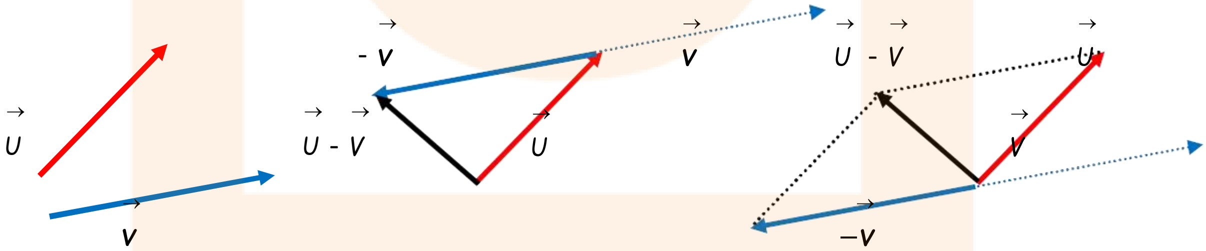
Para sumar geométricamente dos vectores $\vec{U}$ y $\vec{V}$, se sitúa uno de ellos a continuación del otro, y se une el origen del primero con el extremo del último:



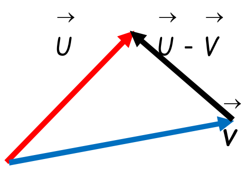
Puedes observar que cuando los vectores que sumas no tienen la misma dirección, su suma coincide con la diagonal del paralelogramo que forman $\vec{U}$ y $\vec{V}$:

Para restar geométricamente dos vectores $\vec{U} - \vec{V}$, se le suma a $\vec{U}$ el opuesto de $\vec{V}$ y se procede a realizar la suma como se ha explicado.

$$\vec{U} - \vec{V} = \vec{U} + (-\vec{V})$$



Observa como en este caso el vector $\vec{U} - \vec{V}$, es el vector que une el extremo del segundo con el extremo del primero.



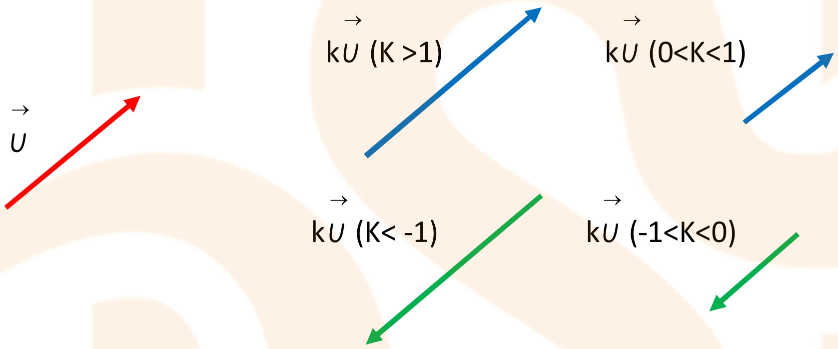
2.2 Definición geométrica de producto de un escalar por un vector

Se llama producto de un escalar por un vector, al producto de un nº real k, por un vector $\vec{U}$.
Se representa por $k.\vec{U}$, y el resultado es un nuevo vector que tiene las siguientes características:

Dirección: la misma que $\vec{U}$.

Sentido: el mismo que $\vec{U}$, si el escalar es positivo y, contrario a $\vec{U}$, si el escalar es negativo.

Módulo: el valor absoluto del escalar por el módulo de $\vec{U}$: $|k.\vec{U}| = |k|.|\vec{U}|$



2.3 Definición geométrica de producto escalar de dos vectores.

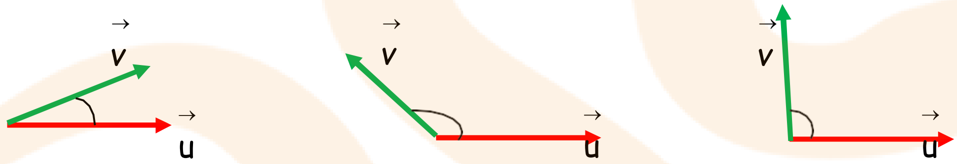
El producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que se representa por $\vec{u}.\vec{v}$, es un escalar que se obtiene de multiplicar los módulos de ambos vectores por el coseno del ángulo que forman:

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})}$$

COMENTARIOS: De la definición geométrica del producto escalar podemos deducir lo siguiente:

1º.- El producto escalar de dos vectores puede ser positivo, negativo o cero, dependiendo del valor del coseno del ángulo que forman:

- Si el ángulo que forman los vectores es agudo (coseno +), el producto escalar es positivo, si el ángulo es obtuso (coseno -), el producto escalar es negativo.
- Si los vectores son perpendiculares, el producto escalar es 0, puesto que cos 90º = 0. Esta propiedad sirve como **CRITERIO DE PERPENDICULARIDAD ENTRE DOS VECTORES.**



$\vec{u}.\vec{v} > 0$ $\qquad$ $\vec{u}.\vec{v} < 0$ $\qquad$ $\vec{u}.\vec{v} = 0$

2º.- Si multiplicamos escalarmente al vector por sí mismo, obtenemos una expresión que nos permite calcular el módulo del vector a partir de sus coordenadas:

$$\vec{u}.\vec{u} = |\vec{u}|.|\vec{u}|.\cos(\widehat{\vec{u},\vec{u}}) = |\vec{u}|^2 \cos 0^\circ = |\vec{u}|^2 \quad \Rightarrow \quad |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$$

3º.- Si despejamos el coseno en la definición geométrica, obtenemos la expresión:

$$\boxed{\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}}$$

De modo que si conocemos el módulo de los dos vectores y el valor de su producto escalar, podemos conocer el ángulo que forman dichos vectores.

2.4 Definición geométrica de producto vectorial de dos vectores.

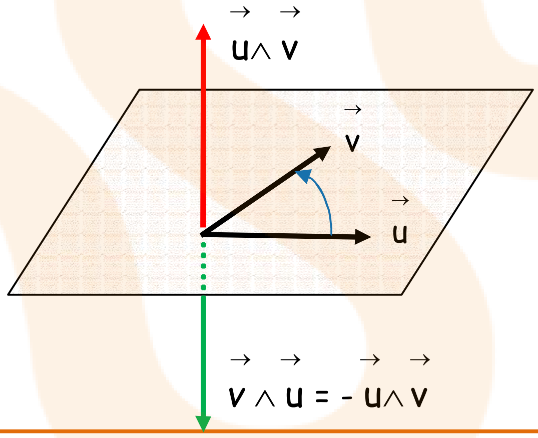
El producto vectorial de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que se representa por $\vec{u} \wedge \vec{v}$ o bien por $\vec{u} \times \vec{v}$, es un nuevo vector que tiene las siguientes características:

<u>Módulo:</u> es el producto del módulo de los vectores que se multiplican por el seno del ángulo que forman ambos vectores

$$|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}| . |\vec{v}| . sen(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$$

<u>Dirección:</u> perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es decir, perpendicular al plano que determinan $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

<u>Sentido:</u> el de avance de un tornillo al girar el primer vector hacia el segundo por el camino más corto.



COMENTARIOS:

De la definición geométrica del producto vectorial podemos deducir lo siguiente:

1º.-Si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección (paralelos o antiparalelos), su producto vectorial es nulo, ya que los vectores formarían entre sí un ángulo de 0º o 180º, y en ambos casos el seno vale 0.

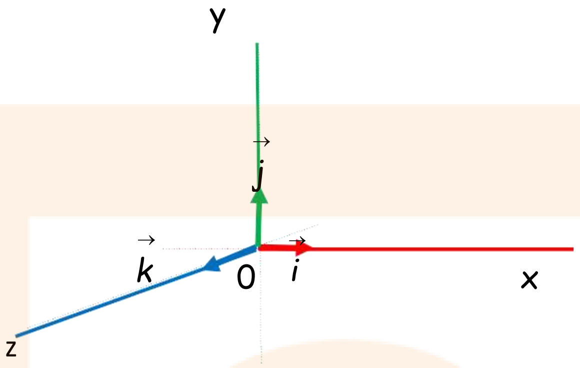
2º.- Si los vectores son perpendiculares su producto vectorial es máximo, ya que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ formarían 90º y su seno vale 1.

3º.- El producto vectorial de dos vectores no es conmutativo, como puede verse en el dibujo:

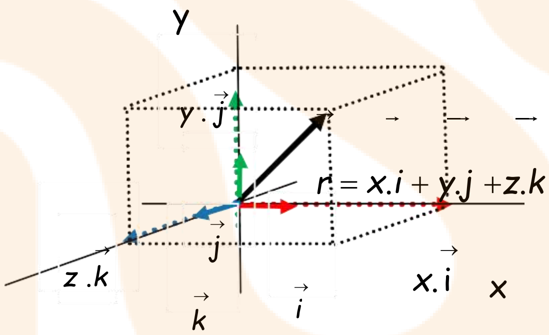
$$\vec{v} \wedge \vec{u} = - \vec{u} \wedge \vec{v}$$

3.- COORDENADAS CARTESIANAS O COMPONENTES DE UN VECTOR

El **sistema de coordenadas cartesiano** está formado por tres rectas perpendiculares entre sí, llamados **ejes de coordenadas cartesianos**, que se cortan en un punto O que es el origen de coordenadas. Los tres ejes son el **"eje x"**, el **"eje y"** y el **"eje z"**.



Si en cada uno de los ejes se define un vector unitario (de modo la unidad) y de sentido positivo (son los vectores $\vec{i}, \vec{j}$ y $\vec{k}$), cualquier vector $\vec{r}$ del espacio puede expresarse como una combinación lineal de los vectores $\vec{i}, \vec{j}$ y $\vec{k}$ Como puede verse en el siguiente dibujo:



A la expresión:

$$\boxed{\vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} \quad ó \quad \vec{r} = (x,y,z)}$$

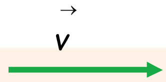
se le denomina **EXPRESIÓN ANALÍTICA O EXPRESIÓN VECTORIAL DEL VECTOR** $\vec{r}$.

A los escalares x, y, z se les denomina **COORDENADAS CARTESIANAS O COMPONENTES CARTESIANAS DEL VECTOR** $\vec{r}$.

COMENTARIOS:

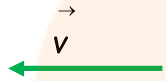
1º.- Cuando la dirección del vector es paralela a uno de los tres ejes de coordenadas, entonces el vector tiene sólo una coordenada distinta de cero: aquella que corresponde al eje respecto al cual es paralelo. Además, la coordenada no nula será positiva si el sentido del vector coincide con el sentido positivo del eje y negativa si es al contrario.

Por ejemplo, si un coche se mueve horizontalmente hacia la derecha con una velocidad de 10 m/s, la expresión analítica de su vector velocidad es:



$$\boxed{\vec{v} = 10\,\vec{i}\ m/s = 10\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 0\,\vec{k}\ m/s = (10, 0, 0)\,m/s} \Rightarrow \begin{cases} \text{Dirección : horizontal} \\ \text{Sentido : derecha} \\ \text{Módulo : } 10\,m/s \end{cases}$$

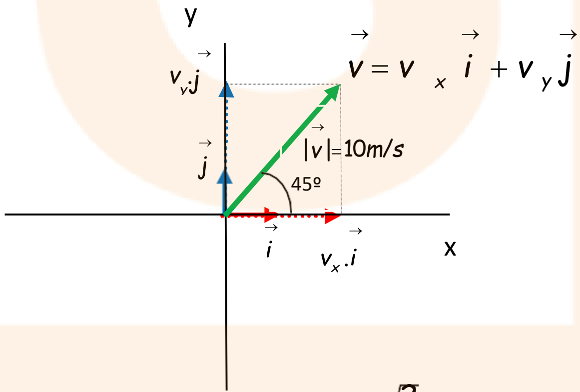
Si el coche se mueve ahora hacia la izquierda con la misma velocidad de 10 m/s, la expresión analítica de su vector velocidad es:



$$\boxed{\vec{v} = -10\,\vec{i}\ m/s = -10\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 0\,\vec{k}\ m/s = (-10, 0, 0)\,m/s} \Rightarrow \begin{cases} \text{Dirección: horizontal} \\ \text{Sentido: izquierda} \\ \text{Módulo: } 10\,m/s \end{cases}$$

2º.- Si el vector está contenido en el plano XY y su dirección no coincide con ninguno de los dos ejes, entonces el vector tendrá las dos primeras componentes distintas de cero y la tercera igual a cero.

Por ejemplo, supongamos que se dispara un proyectil con una velocidad de 100 m/s formando un ángulo de 45º con la parte positiva de eje x. Escribe la expresión analítica del vector velocidad.



$$\vec{v} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} \Rightarrow \begin{cases} v_x = |\vec{v}|.\cos 45^\circ = 100\cos 45^\circ = 100.\frac{\sqrt{2}}{2}\ m/s \\ v_y = |\vec{v}|.sen 45^\circ = 100 sen 45^\circ = 100.\frac{\sqrt{2}}{2}\ m/s \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = 50\sqrt{2}\,\vec{i} + 50\sqrt{2}\,\vec{j}\ m/s$$

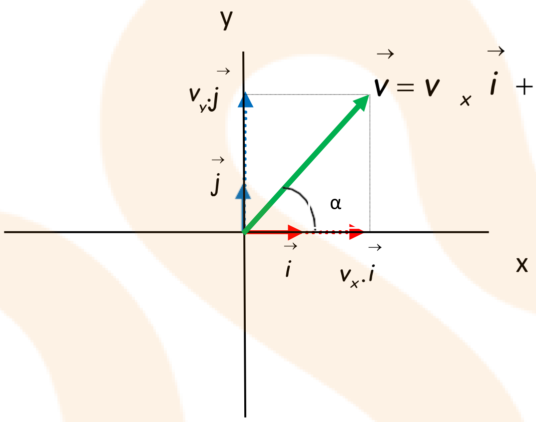
$$\boxed{\vec{v} = 50\sqrt{2}\,\vec{i} + 50\sqrt{2}\,\vec{j}\ m/s = 50\sqrt{2}\,\vec{i} + 50\sqrt{2}\,\vec{j} + 0\vec{k}\ m/s}$$

Observa como las dos coordenadas son positivas ya que el vector está orientado en el primer cuadrante.

La forma general de calcular las coordenadas de un vector en el plano XY, aplicando la trigonometría es:

$$\boxed{\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \Rightarrow \begin{cases} v_x = |\vec{v}|.\cos\alpha \\ v_y = |\vec{v}|.\operatorname{sen}\alpha \end{cases}}$$

Siendo α el ángulo que forma el semieje positivo de las x con el vector. El signo del seno y el coseno de este ángulo te proporcionará el signo de las coordenadas del vector.



3º.- Si el vector está contenido en los planos XZ ó YZ, siempre haba una coordenada nula: la coordenada "y" en el primer caso, y la coordenada "x" en el segundo.

4º.- Cuando el vector no coincida con ninguno de los ejes, ni con los planos XY, XZ ó YZ, entonces las tres coordenadas del vector serán distintas de cero.

EJEMPLO 2º

Indica la expresión analítica de la magnitud física vectorial correspondiente en cada uno de los casos siguientes:

a) Coche que circula a 50 Km/h hacia la derecha.
b) Objeto que es lanzado verticalmente hacia arriba a 10 m/s.
c) Tren que se acerca al andén de la estación por tu derecha a 20 Km/h.
d) Aceleración de la gravedad terrestre.
e) Objeto que desciende a 5 m/s.
f) Moto que se acerca al paso de peatones por tu izquierda a 20 m/s.

g) Tu peso.
h) Balón que se chuta a 200 m/s con formando un ángulo de 45º con la horizontal.
i) Jugador de tenis que golpea la pelota hacia abajo formando 45º con el semieje horizontal positivo a 100 m/s.
j) Avión que vuela a 1000 Km /h hacia S.
k) Avión que vuela a 1000 Km /h hacia NE.
l) Avión que vuela a 1000 Km /h hacia SE.
m) Avión que vuela a 1000 Km /h hacia NNO.

4.- OPERACIONES CON VECTORES EN FORMA ANALÍTICA

Supongamos dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ expresados en forma analítica:

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} \quad \text{y} \quad \vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

4.1 Suma y resta analítica de vectores

Se define la suma analítica de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, como es vector que se obtiene de sumar las coordenadas semejantes:

$$\boxed{\vec{u} + \vec{v} = (u_x, u_y, u_z) + (v_x, v_y, v_z) = (u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z) = (u_x + v_x)\vec{i} + (u_y + v_y)\vec{j} + (u_z + v_z)\vec{k}}$$

Se define la resta analítica de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, como es vector que se obtiene de restar a las coordenadas del primero, las coordenadas semejantes del segundo:

$$\boxed{\vec{u} - \vec{v} = (u_x, u_y, u_z) - (v_x, v_y, v_z) = (u_x - v_x, u_y - v_y, u_z - v_z) = (u_x - v_x)\vec{i} + (u_y - v_y)\vec{j} + (u_z - v_z)\vec{k}}$$

4.2 Producto de un escalar por un vector en forma analítica

Se define el producto de un escalar k por un vector $\vec{u}$, como el vector que se obtiene de multiplicar cada una de sus coordenadas por el escalar:

$$\boxed{k.\vec{u} = k.(u_x, u_y, u_z) = (k.u_x, k.u_y, k.u_z) = k.u_x \vec{i} + k.u_y \vec{j} + k.u_z \vec{k}}$$

4.3 Producto escalar de dos vectores en forma analítica

El producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, escrito en forma analítica es un escalar que se obtiene de multiplicar las coordenadas semejantes de ambos vectores y sumar los resultados:

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=(u_x,u_y,u_z)\cdot(v_x,v_y,v_z)=u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y+u_z\cdot v_z}$$

COMENTARIOS

1º.- Recuerda que el 2º comentario de la definición geométrica del producto escalar nos decía que si multiplicamos escalarmente al vector por sí mismo, obtenemos una expresión que nos permite calcular el módulo del vector a partir de sus coordenadas:

$$\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos(\widehat{\vec{u},\vec{u}})=|\vec{u}|^2\ \cos 0^\circ=|\vec{u}|^2 \quad\Rightarrow\quad |\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$$

Y si ahora sustituimos el producto escalar por su expresión analítica:

$$\boxed{|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}=\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}}$$

Obtenemos que el módulo de un vector es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus coordenadas.

2º.- Recuerda igualmente que, según el tercer comentario, si despejamos el coseno en la definición geométrica, obtenemos una expresión que nos permitía conocer el coseno del ángulo que forman los vectores y, a partir de él, calcular el ángulo que forman los vectores:

$$\boxed{\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}}$$

Y si ahora sustituimos el producto escalar por su expresión analítica y también el módulo de los vectores, queda la expresión:

$$\boxed{\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y+u_z\cdot v_z}{\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}\cdot\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}}$$

De modo que si conocemos las coordenadas de los vectores, podemos conocer el ángulo que forman

4.4 Producto vectorial de dos vectores en forma analítica

La expresión analítica del vector que resulta de un producto vectorial entre dos vectores se obtiene del siguiente modo:

$$\boxed{\vec{u}\wedge\vec{v} = \left(u_y v_z - u_z v_y\right)\vec{i} + \left(u_z v_x - u_x v_z\right)\vec{j} + \left(u_x v_y - u_y v_x\right)\vec{k}}$$

4.5 Derivada de un vector en forma analítica

La derivada de un vector es otro vector que se obtiene de derivar cada una de sus coordenadas y se escribe:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{v}' = v'_x\vec{i} + v'_y\vec{j} + v'_z\vec{k}}$$

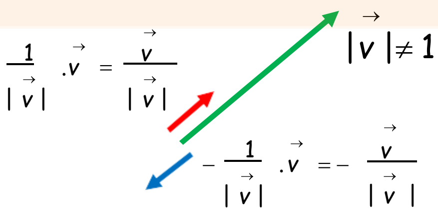
5. VECTORES UNITARIOS

Un vector es unitario cuando su módulo vale la unidad.

Si un vector $\vec{v}$ no es unitario, podemos hallar dos vectores unitarios de la misma dirección que él: uno en el mismo sentido y otro en sentido contrario.

Para ello basta con multiplicar al vector $\vec{v}$ por la inversa de su módulo o cambiar de signo dicho producto, respectivamente.

Si $|\vec{v}| \neq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|\vec{v}|}.\vec{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad$ ó $\quad -\frac{1}{|\vec{v}|}.\vec{v} = -\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ tienen de módulo la unidad



EJEMPLO 3º

Dados los vectores $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ $\quad \vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ Calcula:

a) La suma: $\vec{u} + \vec{v}$

b) La resta: $\vec{u} - \vec{v}$

c) El producto del escalar 3 por el vector $\vec{u}$: $3 \, . \vec{u}$

d) El producto escalar de ambos vectores: $\vec{u} . \vec{v}$

e) El módulo de cada uno de los vectores: $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$

f) El ángulo que forman ambos vectores.

g) El producto vectorial de ambos vectores: $\vec{u} \wedge \vec{v}$

h) Vector unitario de la misma dirección y sentido que $\vec{u}$. Comprueba que es unitario.

i) Vector unitario de la misma dirección y sentido contrario que $\vec{u}$. Comprueba que es unitario.

EJEMPLO 4º

Responde a los mismos apartados del ejercicio anterior con los vectores:

$$\vec{u} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \qquad \vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$$

EJEMPLO 5º

Comprueba el valor de los siguientes productos escalares entre los vectores unitarios:

$$\vec{i}.\vec{i} \qquad \vec{i}.\vec{j} \qquad \vec{i}.\vec{k} \qquad \vec{j}.\vec{j} \qquad \vec{j}.\vec{k} \qquad \vec{k}.\vec{k}$$

a) Aplicando la definición geométrica.

b) Aplicando la definición analítica.

Soluc: 1, 0, 0, 1, 0 y 1

EJEMPLO 6º

Comprueba los siguientes productos vectoriales:

$$\vec{i} \wedge \vec{i} \qquad \vec{i} \wedge \vec{j} \qquad \vec{i} \wedge \vec{k} \qquad \vec{j} \wedge \vec{i} \qquad \vec{j} \wedge \vec{j} \qquad \vec{j} \wedge \vec{k} \qquad \vec{k} \wedge \vec{i} \qquad \vec{k} \wedge \vec{j} \qquad \vec{k} \wedge \vec{k}$$

a) Aplicando la definición geométrica.

b) Aplicando la definición analítica.

Soluc: $\vec{0}$, $\vec{k}$, $-\vec{j}$, $-\vec{k}$, $\vec{0}$, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $-\vec{i}$, $\vec{0}$