TEMA 1. DINÁMICA DEL PUNTO MATERIAL

1. **Introducción.**
2. **Movimiento, trayectoria, espacio recorrido, vector de posición y vector desplazamiento.**
3. **Vectores velocidad instantánea y aceleración instantánea.**
4. **Componentes intrínsecas de la aceleración: aceleración normal o centrípeta y aceleración instantánea.**
5. **Clasificación de los movimientos.**
6. **MRU.**
7. **MRUA.**
8. **MCU.**
9. **Composición de movimientos: movimiento parabólico.**
10. **Cantidad de movimiento o momento lineal.**
11. **Las Leyes de la Dinámica ó Leyes de Newton.**
12. **La fuerza de rozamiento.**
13. **Fuerza centrípeta.**

1. INTRODUCCIÓN

En física se denomina **punto material o partícula** a aquel objeto que tiene masa pero que no tiene dimensiones. En realidad, cuando la física considera a un cuerpo como un punto material, no es que carezca de volumen sino que este no ha de ser tenido en cuenta para el fenómeno que se está estudiando.

2. MOVIMIENTO, TRAYECTORIA, ESPACIO RECORRIDO, VECTOR DE POSICIÓN Y VECTOR DESPLAZAMIENTO

Se denomina ***movimiento*** al cambio de posición de un cuerpo respecto a un punto que se toma como referencia, denominado sistema de referencia. De la definición se deduce claramente que el movimiento es un concepto relativo, es decir, un mismo objeto puede estar en movimiento respecto a un sistema de referencia y al mismo tiempo estar en reposo respecto a otro sistema de referencia diferente.

En movimiento, se denomina ***trayectoria*** a la línea imaginaria que une las sucesivas posiciones por las que va pasando un cuerpo. Esta puede ser rectilínea, curvilínea (circular, elíptica, parabólica, etc.) o una sucesión de ambas.

En un movimiento, se denomina ***espacio recorrido*** a la longitud de la trayectoria.

Se denomina ***vector de posición*** de una partícula, respecto a un sistema de referencia, al vector que va desde el origen del sistema de referencia a la posición que ocupa la partícula. Se representa por $\vec{r}$.

El vector de posición de una partícula que se mueve respecto a un sistema de referencia será función del tiempo (sólo será constante cuando la partícula esté en reposo respecto a dicho sistema) y por eso podemos escribir:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

El módulo del vector de posición nos indicará a qué distancia estará la partícula del sistema de referencia en cada instante.

Llamamos ***ecuaciones cartesianas del vector de posición*** a las expresiones analíticas de sus componentes x(t), y(t) y z(t), que corresponden con tres ecuaciones escalares.

En general serán tres las ecuaciones cartesianas de la posición, pero si la partícula se mueve solamente a lo largo de uno de los ejes de coordenadas entonces la única coordenada distinta de 0 del vector de posición será la de ese eje, pudiendo prescindir de las otras dos coordenadas ya que serían nulas, y por tanto, habrá una sola ecuación cartesiana de la posición.

Se llama ***vector desplazamiento*** entre dos instantes de tiempo t_1 y t_2, a la diferencia entre los vectores de posición en el instante final t_2, y el vector de posición en el instante inicial t_1,. Se representa por $\Delta \vec{r}$ y se calcula:

$$\boxed{\Delta \vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}$$

Teniendo en cuenta la definición geométrica de la resta entre dos vectores, puede observarse que el vector desplazamiento coincide gráficamente con el vector que va desde la posición inicial a la posición ocupada en el instante final (figura 1.1).

El módulo del vector desplazamiento nos indicará la distancia que separa en línea recta las dos posiciones ocupadas por la partícula. En general, esta distancia será menor que el espacio recorrido. El módulo del vector desplazamiento sólo coincidirá con el espacio recorrido cuando la trayectoria sea rectilínea y no se invierta el sentido del movimiento.

En la gráfica siguiente se puede observar los vectores de posición de una partícula, respecto a un sistema de referencia, en dos instantes de tiempo diferentes, la trayectoria y el vector desplazamiento entre esos dos mismos instantes:

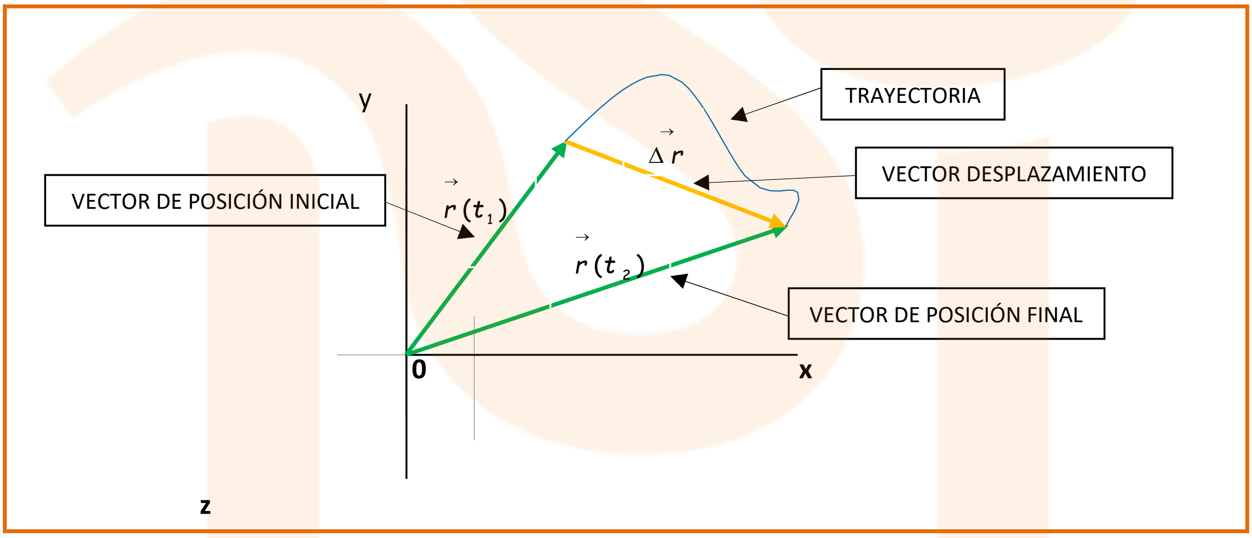


Figura 1.1
Vector de posición, vector desplazamiento y trayectoria

3. VECTORES VELOCIDAD INSTANTÁNEA Y ACELERACIÓN INSTANTÁNEA

El vector velocidad instantánea es el vector que indica la velocidad de la partícula en cualquier instante de tiempo. Es un vector tangente a la trayectoria en cada punto de ella y de sentido el del movimiento. Se calcula derivando respecto al tiempo el vector de posición instantáneo:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j} + v_z(t)\vec{k}}$$

El vector aceleración instantánea es el vector que indica la aceleración de la partícula en cualquier instante de tiempo. Se calcula derivando respecto al tiempo el vector de posición instantáneo:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \vec{v}\,'(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r}\,''(t) = v_x'(t)\vec{i} + v_y'(t)\vec{j} + v_z'\vec{k} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j} + z''(t)\vec{k} = \\ &= a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}\end{aligned}}$$

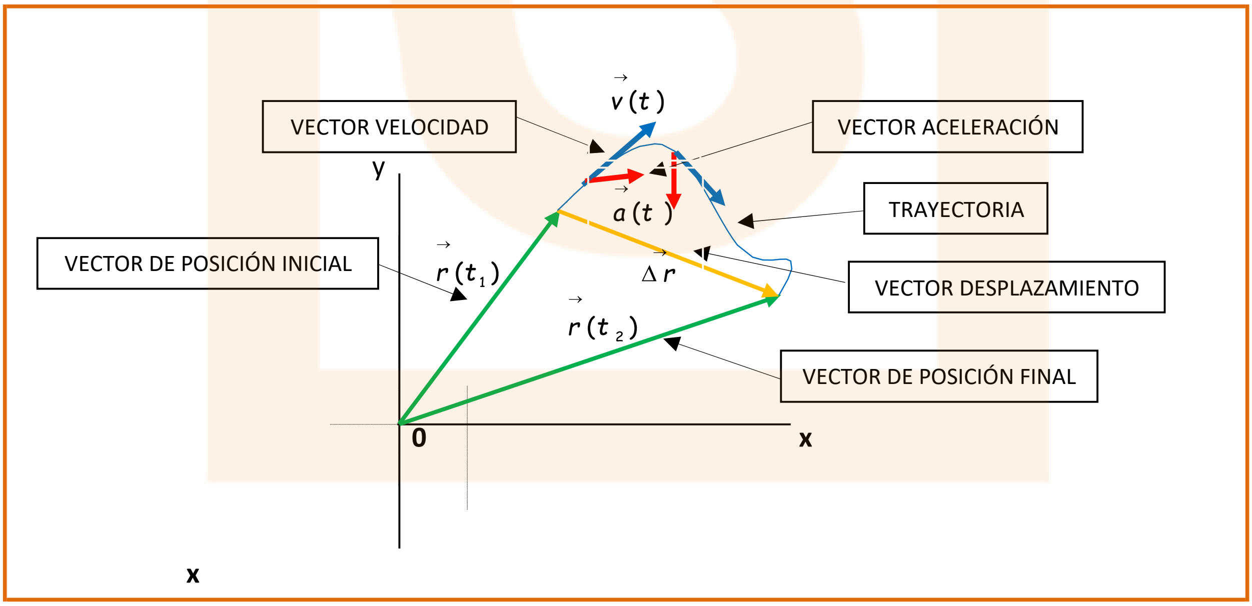


Figura 1.2
Vectores velocidad y aceleración instantáneos

4. COMPONENTES INTRÍNSECAS DE LA ACELERACIÓN:ACELERACIÓN NORMAL O CENTRÍPETA Y ACELERACIÓN TANGENCIAL

El vector aceleración mide los cambios en el vector velocidad por unidad de tiempo. Por tanto si el vector velocidad no se modifica a lo largo del tiempo, la aceleración vale 0.

Pero la velocidad es un vector y por tanto se caracteriza por tener módulo, dirección y sentido. Esto quiere decir que basta que una sola de estas características se modifique para que podamos afirmar que la velocidad no es constante.

En los movimientos rectilíneos la dirección de la velocidad no varía. El módulo puede que sí o puede que no.

En los movimientos curvilíneos la dirección y el sentido de la velocidad está cambiando continuamente. El módulo puede que sí o puede que no.

Por tanto en los movimientos rectilíneos habrá aceleración si cambia el módulo de la velocidad mientras que en los movimientos curvilíneos siempre habrá aceleración cambie o no el módulo de la velocidad.

En un movimiento en el que hay aceleración siempre es posible descomponer al vector aceleración en dos componentes, llamadas ***componentes intrínsecas de la aceleración***:

- una componente tangente a la trayectoria llamada ***aceleración tangencial***.
- Y una componente perpendicular a la trayectoria llamada ***aceleración normal o centrípeta.***

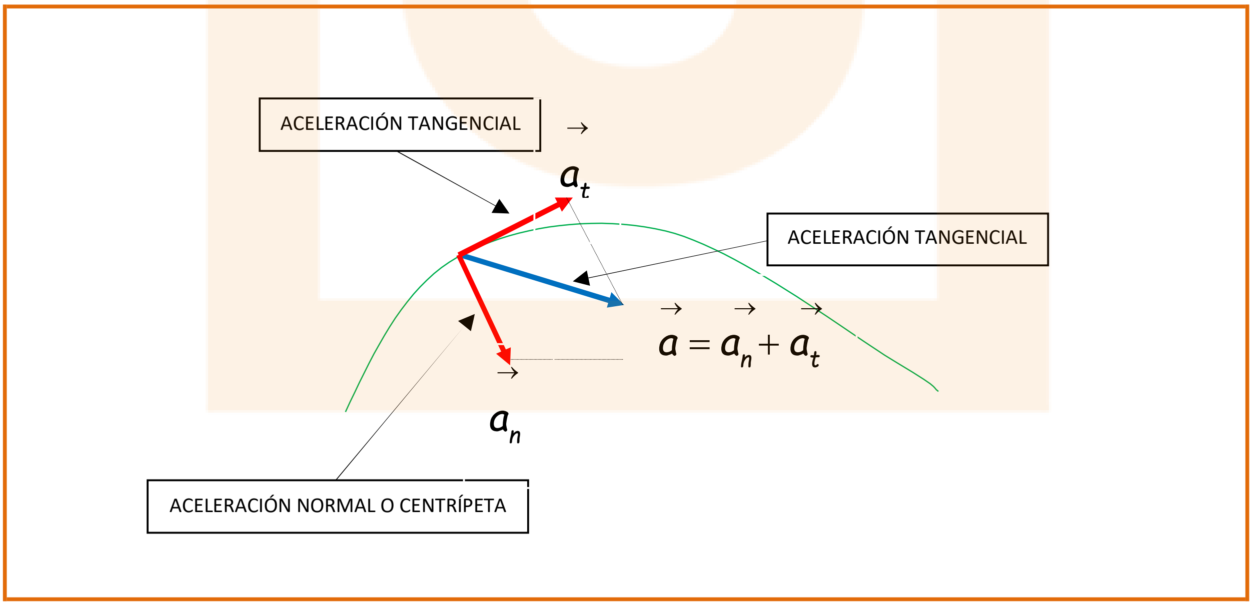


Figura 1.3
Componentes intrínsecas de la aceleración

La aceleración tangencial mide los cambios en el módulo de la velocidad mientras que la aceleración normal o centrípeta mide los cambios en la dirección (y por tanto también en el sentido) de la velocidad.

Por tanto, en los movimientos rectilíneos nunca habrá aceleración normal o centrípeta. Si en un movimiento rectilíneo hay aceleración será tangencial.

Sin embargo en los movimientos curvilíneos siempre habrá aceleración normal o centrípeta ya que siempre hay cambios en la dirección de la velocidad. En estos movimientos, si el módulo de la velocidad cambia, también habrá aceleración tangencial.

Las características de las componentes intrínsecas de la aceleración son:

ACELERACIÓN TANGENCIAL:

MÓDULO: $$\boxed{|\vec{a}_t| = \frac{d\,|\vec{v}|}{dt} \quad o \quad simplemente \quad a_t = \frac{dv}{dt}}$$

DIRECCIÓN: tangente a la trayectoria.

SENTIDO: el del movimiento si la velocidad aumenta o contrario al movimiento si la velocidad disminuye.

ACELERACIÓN NORMAL O CENTRÍPETA:

MÓDULO: $$\boxed{|\vec{a}_n| = |\vec{a}_c| = \frac{|\vec{v}|^2}{R} \quad o \quad simplemente \quad a_n = a_c = \frac{v^2}{R}}$$

DIRECCIÓN: perpendicular a la trayectoria.

SENTIDO: hacia el centro de la trayectoria.

RELACIÓN ENTRE LA ACELERACIÓN Y SUS COMPONENTES INTRÍNSECAS:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t}$$

MÓDULO: $$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}_c|^2 + |\vec{a}_c|^2}}$$

EJEMPLO 1º

El vector de posición instantáneo de una partícula que se mueve por el espacio, en unidades del SI, es:

$$\vec{r}(t) = (t^2 - t)\vec{i} + (4 - 2t)\vec{j} + t^3\vec{k}$$

Para dicha partícula calcula:

a) La posición inicial. b) La posición a los 3 s.

c) La distancia a la que se encuentra la partícula a los 5 s.

d) El vector desplazamiento entre los instantes 3 y 5 s.

e) El vector velocidad instantánea. f) La velocidad inicial.

g) El módulo de la velocidad a los 2 s. h) El vector aceleración instantánea.

i) El módulo de la aceleración a los 10 s.

EJERCICIO 1º

Las coordenadas cartesianas del vector de posición de una partícula que se mueve por el plano XY vienen dadas por las siguientes expresiones, en unidades del SI:

$$\begin{cases} x(t) = -t^2 + 2 \\ y(t) = 3t - 2 \end{cases}$$

Para dicha partícula responde a los mismos apartados del ejemplo anterior.

EJEMPLO 2º

La posición instantánea de una partícula que se mueve a lo largo del eje de abscisas viene dada por la expresión:

$$x(t) = t^2 - 6t + 1$$

en unidades SI. Calcular:

a) La velocidad y la aceleración con la que se mueve el cuerpo en cualquier instante.

b) La posición inicial y la velocidad inicial.

c) La posición y la velocidad a los 4s.

d) ¿Ha cambiado el sentido del movimiento? ¿Por qué?

e) ¿Se anula la velocidad en algún momento? ¿Cuándo?

f) Calcula el espacio recorrido en los 5 primeros segundos?

EJERCICIO 2º

La posición de un punto material que se mueve a lo largo del eje x varía con el tiempo según la expresión:

$$x(t) = 4t^2 - 3t + 11$$

donde x se mide en metros y t en segundos. Responde a los mismos apartados del ejemplo anterior.

SOLUC: a) $v(t) = 8t-3$ m/s $a(t)=8$ m/s^2 b) $x_0=11$ m $v_0=-3$ m/s c) $x(t=4s) = 63$ m $v(t=4s) = 29$ m/s d) si e) si a $t = 3/8$ s f) $e = 86{,}125$ m

5. CLASIFICACIÓN DE LOS MOVIMIENTOS

Los movimientos se clasifican atendiendo a dos puntos de vista: según la trayectoria y según el módulo de la velocidad.

TRAYECTORIA
- Rectilíneos
- Curvilíneos: circulares, parabólicos, elípticos, etc.

MÓDULO DE LA VELOCIDAD
- UNIFORMES: $|\vec{v}|$= cte
- VARIADOS
  - uniformemente variados: $|\vec{v}|$ varía de forma uniforme
  - variados de forma no uniforme: $|\vec{v}|$varía de forma no uniforme

6. MOVIMIENTO RECTILÍNEO Y UNIFORME (MRU)

Tiene trayectoria rectilínea y modulo de velocidad constante, es decir, el vector velocidad es constante y, por tanto, no hay aceleración.

La ecuación del movimiento o ecuación de la posición de un MRU sería:

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}\,.t \quad ó \quad \begin{cases} x(t) = x_0 + v_x\,.t \\ y(t) = y_0 + v_y\,.t \\ z(t) = z_0 + v_z\,.t \end{cases}}$$

Si la partícula se mueve solo a lo largo del eje x, la ecuación paramétrica del movimiento o ecuación paramétrica de la posición sería:

$$\boxed{x(t) = x_0 + v\,.t}$$

que es la ecuación que conoces de los cursos anteriores.

El espacio recorrido por el móvil en un tiempo t puede calcularse como: $\boxed{e = v\,.t}$

7. MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO (MRUA)

Tiene trayectoria rectilínea y modulo de velocidad varía de forma uniforme, es decir, sólo tiene aceleración tangencial y es constante.

La ecuación del movimiento o ecuación de la posición de un MRUA sería:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 .t + \frac{1}{2}\vec{a} .t^2 \quad ó \quad \begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}.t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ y(t) = y_0 + v_{0y}.t + \frac{1}{2}a_y t^2 \\ z(t) = z_0 + v_{0z}.t + \frac{1}{2}a_z t^2 \end{cases}$$

Si la partícula se mueve solo a lo largo del eje x, la ecuación paramétrica del movimiento o ecuación paramétrica de la posición sería:

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 .t + \frac{1}{2}a .t^2}$$

La ecuación paramétrica de la velocidad es: $\boxed{v(t) = v_0 + a .t}$

El espacio recorrido en un tiempo t, cuando no se invierte el sentido del movimiento, se calcula:

$$\boxed{e = v_0 t + \frac{1}{2}a .t^2}$$

que son las ecuaciones que conoces de los cursos anteriores.

Aunque aún te será más familiar la que corresponde a un MRUA en la dirección vertical, el eje y, cuya ecuación paramétrica del movimiento o ecuación paramétrica de la posición sería:

$$\boxed{y(t) = y_0 + v_0 .t + \frac{1}{2}a .t^2}$$

y en concreto cuando se trata de un ***movimiento de caída libre***, es decir, con la sola presencia de la fuerza de la gravedad (sin rozamiento con el aire), donde siempre conocemos el valor de la aceleración, a, que es la aceleración de la gravedad. Como recordarás se simboliza por la letra g y en el caso de movimientos de caída libre en las proximidades de la superficie de la tierra vale -9,8 m/s^2. La ecuación paramétrica de la posición o ecuación del movimiento de caída libre en las proximidades de la tierra sería:

$$\boxed{y(t) = y_0 + v_0 .t + \frac{1}{2}g .t^2 = y_0 + v_0 .t - 5t^2}$$

Recordarás también la siguiente ecuación en la que no aparece el tiempo: $\boxed{v^2 = v_0^2 + 2ae}$

esta ecuación algunas veces presenta problemas cuando despejamos la v y/o v_0 en movimientos con aceleración negativa.

EJEMPLO 3º

Dos atletas están separados 200 m y corren a su encuentro con velocidades respectivas de 8 y 10 m/s. Calcula:

a) Las ecuaciones del movimiento de ambos corredores.
b) El punto de encuentro y el instante en que lo harán.
c) El espacio recorrido por cada uno de ellos hasta ese momento.

EJEMPLO 4º

Un coche inicialmente en reposo persigue a una moto que se encuentra 50 m por delante de él. La moto circula a velocidad constante de 20 m/s mientras que el coche acelera uniformemente a 4 m/s^2. Calcula:

a) Las ecuaciones del movimiento de ambos vehículos.
b) ¿Dónde y cuándo se encontrarán?
c) El espacio recorrido por cada vehículo hasta ese momento y contado desde el instante en que comenzó a moverse el coche.

EJEMPLO 5º

Desde la terraza de un edificio de 80 m se lanza hacia abajo a un objeto con una velocidad de 5 m/s. Simultáneamente se lanza desde el suelo otro objeto con una velocidad de 30 m/s. Hallar:

a) Las ecuaciones del movimiento de cada objeto.
b) ¿Dónde y cuándo se cruzarán?
c) El segundo cuerpo ¿estará subiendo o bajando?. ¿Por qué?
d) El espacio recorrido por cada uno de ellos hasta el momento del encuentro.

EJERCICIO 3º

Desde dos pueblos A y B separados por una distancia de 10 Km, salen al encuentro dos automóviles con velocidades de 72 Km/h y 108 Km/h. Calcular:

a) Las ecuaciones de movimiento de ambos automóviles.
b) El tiempo que tardan en cruzarse.
c) La distancia a la que están ambos automóviles del pueblo A en ese momento.
d) El espacio que ha recorrido cada coche hasta ese momento.

SOLUC: b) 200 s c) 4000 m d) 4000 m y 6000 m respectivamente

EJERCICIO 4º

Desde una ventana a 15 m del suelo, se deja caer un cuaderno. Al mismo tiempo, desde el suelo se lanza un lápiz con una velocidad inicial de 12 m/s.Hallar:

a) La ecuación del movimiento de cada objeto.
b) ¿Dónde y cuándo se cruzan?.

SOLUC: a) $y_1 = 15 – 4{,}9t^2$ $y_2 = 12t – 4{,}9t^2$ b) A los 1,25 s y a 7,3 m del suelo

8. MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME (MCU)

Es un movimiento con trayectoria circular y módulo de velocidad constante. No tiene, por tanto, aceleración tangencial pero sí tiene aceleración normal o centrípeta. En la figura siguiente pueden verse los vectores velocidad y aceleración en diferentes puntos de la trayectoria:

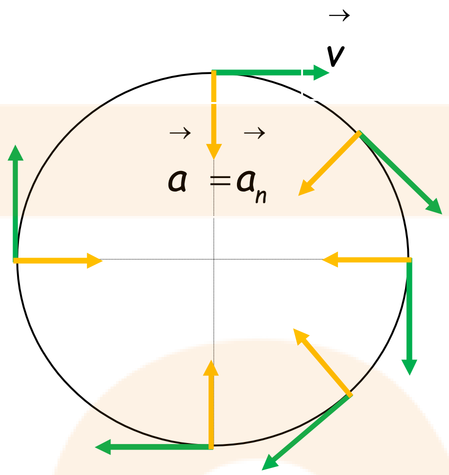


Figura 1.4
Vectores velocidad y aceleración en un MCU

Observa en la figura que el módulo del vector velocidad es el mismo en cualquier punto de la trayectoria. Observa igualmente que el módulo de la aceleración normal o centrípeta también es igual en cualquier punto de la trayectoria.

$$\boxed{|\vec{a}_n| = |\vec{a}_c| = \frac{|\vec{v}|^2}{R} \; o \;\; simplemente \quad a_n = a_c = \frac{v^2}{R}}$$

Como el módulo de la velocidad es constante, el tiempo que emplea la partícula en describir una vuelta completa siempre es el mismo. A este tiempo se llama ***periodo*** del MCU y se representa por la letra T y en el SI de unidades se mide en s.

En un MCU se denomina ***frecuencia*** al nº de vueltas descritas por unidad de tiempo. Se representa por la letra f, coincide con la inversa del periodo y en el SI de unidades se mide en vueltas/s = ciclos/s = rps (revoluciones/s). A esta unidad se denomina hercio (Hz).

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

Se denomina velocidad angular al ángulo descrito por unidad de tiempo. Se representa por la letra ω, se calcula dividiendo el ángulo descrito entre el tiempo empleado en describirlo y en el SI de unidades se mide en rad/s.

$$\boxed{\omega = \frac{ángulo \;\; descrito}{tiempo \;\; empleado} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f}$$

La relación que existe entre los módulos de la velocidad lineal v y de la velocidad angular ω es: $\boxed{v = \omega \, . R}$ siendo R el radio de la trayectoria circular.

EJEMPLO 6º

La polea de un motor gira con m.c.u. a razón de 240 rpm (revoluciones por minuto). Hallar:

a) La frecuencia, a velocidad angular y el periodo.
b) La aceleración centrípeta del movimiento de la polea si su radio es de 20 cm.

SOLUC: a) 4 Hz 25,12 rad/s y 0,25 s b) 3155 m/s²

EJERCICIO 5º

Un tocadiscos gira a 33 rpm. Calcula:

a) La velocidad angular y el ángulo descrito a los 3 s.
b) Si el radio es de 10cm y una mosca se encuentra en el borde del disco calcula la velocidad lineal de la mosca.
c) La distancia recorrida por la mosca a los 3s.

SOLUC: a) 3,454 rad/s y 10,362 rad b) 0,34 m/s c) 1 m

EJERCICIO 6º

La velocidad angular de una rueda es de 6,28 rad/s. Hallar:

a) la frecuencia, el periodo.
b) La velocidad lineal (v) y la aceleración normal de un punto de la periferia de la rueda. El radio de giro es de 50 cm.

SOLUC: a) 2 Hz y 0,5 s b) 3,14 m/s y 19,72 m/s²

EJERCICIO 7º

Un ciclista recorre una trayectoria circular de 5 m de radio con una velocidad de 54 Km/h. Calcular:

a) La aceleración del ciclista.
b) La velocidad angular
c) El tiempo que tarda en completar cada vuelta

SOLUC: a) 45 m/s² b) 3 rad/s c) 2 s

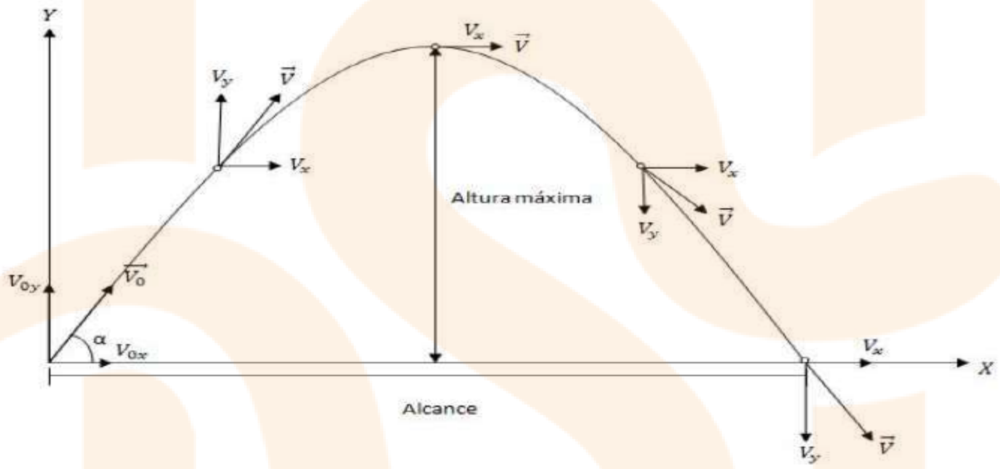
9. COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS: MOVIMIENTO PARABÓLICO

Se dice que una partícula describe un movimiento compuesto cuando la partícula se encuentra sometida a dos o más movimiento simultáneos. Un ejemplo de este fenómeno se produce cuando una barca en un río se ve sometida a dos movimientos simultáneos: el movimiento impulsado por el barquero al remar y el de arrastre de la corriente del agua del río.

Otro ejemplo de movimiento compuesto es el que tienen los cuerpos cuando son lanzados en la superficie de la tierra en una dirección distinta a la vertical. El cuerpo se ve sometido a dos movimientos: un MRU de avance en la dirección horizontal y un MRU de caída libre como consecuencia de la acción de la fuerza gravitatoria (de su propio peso). El resultado de estos dos movimientos es un movimiento parabólico.

En la siguiente figura se representa al vector velocidad y a sus componentes horizontal y vertical e diferentes puntos de la trayectoria para una partícula lanzada desde el origen de coordenadas:

Figura 1.5



$$\boxed{\vec{v}_0 = v_{0x}\,\vec{i} + v_{0x}\,\vec{j}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{v_{0x} = |\vec{v}_0|\ \cos\alpha} \\ \boxed{v_{0y} = |\vec{v}_0|\ sen\alpha} \end{cases}$$

Siendo α el ángulo de lanzamiento.

Es importante destacar que en los lanzamientos horizontales el ángulo de lanzamiento es 0º.

Vector velocidad y sus componente en un movimiento parabólico

En la figura anterior puede observarse como la componente horizontal de la velocidad permanece constante (MRU) mientras que la componente vertical de la velocidad va variando, siendo positiva mientras el cuerpo asciende, haciéndose 0 en el punto más alto de la trayectoria y siendo negativa mientras desciende.

Las ecuaciones del movimiento ó posición y de la velocidad son las siguientes:

ECUACIONES DE LA POSICIÓN

$$\boxed{\vec{r}(t) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = x_0 + v_{0x}t = x + |\vec{v}_0|\cos\alpha\,.t} \\ \boxed{y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2 = y_0 + |\vec{v}_0|\,sen\alpha\,.t - 5t^2} \end{cases}$$

ECUACIONES DE LA VELOCIDAD

$$\boxed{\vec{v}(t) = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{v_x = v_{0x} = |\vec{v}_0|\cos\alpha} \\ \boxed{v_y = v_{0y} + gt = |\vec{v}_0|\,sen\alpha - 10t} \end{cases}$$

EJEMPLO 7º

Una persona lanza una pelota desde una plataforma situada a 1,7 m del suelo con una velocidad de 6 m/s y un ángulo de disparo de 53º. Calcular:

a) Las ecuaciones de la posición y de la velocidad.
b) El tiempo de vuelo.
c) La velocidad con la que llega al suelo.
d) El alcance.
e) La altura máxima a la que llega la pelota.

EJERCICIO 8º

Un proyectil es lanzado desde un acantilado de 150 m de altura con una velocidad inicial de 400 m/s y un ángulo de inclinación de 30º. Calcular:

a) Las componentes de la velocidad inicial
b) El tiempo que tarde en caer al suelo.
c) El alcance.
d) La altura máxima alcanzada.

SOLUC: a) v_{0x} = 346,4 m/s v_{0y} = 200 m/s b) 41,5 s c) 14,4 km d) 2191 m

EJERCICIO 9º

Un chico lanza piedras horizontalmente desde lo alto de un acantilado de 25 m de altura. Si desea que choquen contra un islote que se encuentra a 30 m de la base del acantilado, calcula:

a) La velocidad con la que debe lanzar las piedras.

b) El tiempo que tardan las piedras en llegar al islote.

SOLUC: a) 13,3 m/s b) 2,2 s

10. MOMENTO LINEAL O CANTIDAD DE MOVIMIENTO

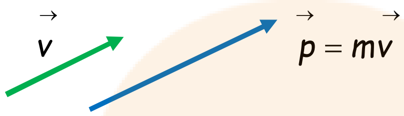
Se llama momento lineal o cantidad de movimiento de una partícula de masa m que se mueve con velocidad $\vec{v}$, al producto de la masa de su masa por su velocidad:

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

COMENTARIOS:

1º.- Es una magnitud vectorial por que se obtiene del producto de un escalar, la masa, por un vector, la velocidad.

2º.- Tiene la misma dirección y sentido que el vector velocidad:



3º.- El módulo de la cantidad de movimiento es el producto de la masa por el módulo de la velocidad:

$$\boxed{|\vec{p}| = m\,|\vec{v}| \quad ó \quad simplemente \quad p = m.v}$$

4º.- En el sistema internacional de unidades se mide en kg.m/s.

11. LAS LEYES DE NEWTON

La Mecánica clásica se basa en tres leyes o principios que fueron enunciados por el científico inglés Isaac Newton (1642-1727). Estas tres leyes del movimiento se recogen en una de sus obras más importantes: el libro titulado “Principios matemáticos de la filosofía natural (1687)”.

Realmente podrían reducirse a sólo dos leyes, ya que la segunda incluye a la primera. Sin embargo así es como él las presentó, es más fácil para comprenderlas y además la primera realmente fue propuesta por Galileo Galilei (1564-1642) un gran hombre del renacimiento nacido en Pisa.

11.1 PRIMERA LEY DE NEWTON, PRIMER PRINCIPIO DE LA DINÁMICA O PRINCIPIO DE INERCIA

“Si sobre un cuerpo no actúa ninguna fuerza ó si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo vale cero, entonces la partícula estará en reposo o moviéndose con velocidad constante, es decir, con MRU.”

COMENTARIOS

1º.- Según este principio, las fuerzas no son las causantes del movimiento de los cuerpo ya que, un cuerpo puede estar moviéndose con MRU y sin embargo la resultante de las fuerzas vale 0.

2º.- Este principio también dice que en ausencia de fuerzas los cuerpos carecen de aceleración, es decir, no cambian su velocidad, o sea, no cambian su estado de reposo o de movimiento inicial en el que estaban. Como la inercia se define como la resistencia u oposición que presenta un cuerpo a cambiar su estado de reposo o de movimiento, es por esta razón por la que también se denomina principio de inercia.

3º.- Cuando sobre un cuerpo no actúan fuerzas o la resultante de todas las que actúan vale 0 se dice que el cuerpo está en equilibrio. Por tanto, tanto un cuerpo en reposo como con MRU, se encuentran en equilibrio. En el primer caso se habla de equilibrio estático, mientras que en el segundo caso se habla de equilibrio dinámico.

4º.- El reposo y el MRU son dos situaciones equivalentes desde el punto de vista dinámico porque n ambos hay ausencia de fuerzas.

11.2 SEGUNDA LEY DE NEWTON, SEGUNDO PRINCIPIO DE LA DINÁMICA O PRINCIPIO FUNDAMENTAL DE LA DINÁMICA

"La resultante de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula coincide con el producto de su masa por su aceleración".

$$\boxed{\vec{F}_{RTE.} = m\vec{a}}$$

$$\boxed{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n = m\vec{a}}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a}}$$

COMENTARIOS:

1º.- La primera Ley de Newton es un caso particular de la segunda:

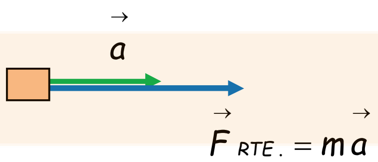
$$Si \quad \vec{F}_{RTE.} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{RTE.} = m\,\vec{a} = 0 \Rightarrow m\,\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{v} = cte \Rightarrow reposo \quad ó \quad MRU$$

2º.- La unidad de fuerza es la unidad de masa por la unidad de aceleración que, en el SI de unidades, es kg.m/s^2. A esta unidad se le conoce con el nombre de Newton.

$$Kg\frac{m}{s^2} = NEWTON\,(N)$$

Un Newton es la fuerza que aplicada a un cuerpo de 1 Kg le proporciona una aceleración de 1 m/s^2.

3º.- La fuerza resultante que actúa sobre una partícula y la aceleración dicha partícula son vectores de la misma dirección y sentido ya que, la fuerza se obtiene del producto de un escalar positivo, la masa m, por un vector, la aceleración $\vec{a}$.



4º.- La ecuación $\vec{F}_{RTE.} = m\,\vec{a}$ es una ley física que nos dice que las fuerzas son las causantes de las aceleraciones de los cuerpos, es decir, las fuerzas son las causantes de los cambios en la velocidad de los cuerpos, o sea, de los cambios en el movimiento de los cuerpos. Por tanto, la expresión $\vec{F}_{RTE.} = m\,\vec{a}$ es una relación causa-efecto: la causa son las fuerzas y el efecto es la aceleración.

5º.- Esta Ley también nos permite interpretar físicamente a la masa, no como cantidad de materia, sino como una medida de la inercia de los cuerpos, es decir, como una medida de la resistencia u oposición que presentan los cuerpos a los cambios en su movimiento. En efecto, si aplicamos dos fuerzas iguales a dos cuerpos de diferente masa, la aceleración que adquiere cada uno de ellos sería:

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}}{m} \quad y \quad \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}}{M}$$

El cuerpo de menor masa presenta mayor aceleración, es decir, cambia más rápidamente su velocidad y, por tanto, presenta menor inercia. Al contrario que el de mayor masa.

11.3 TERCERA LEY DE NEWTON, TERCER PRINCIPIO DE LA DINÁMICA O PEINCIPIO DE ACCIÓN Y REACCIÓN

"Si un cuerpo A ejerce una fuerza (acción) sobre otro cuerpo B, este ejerce sobre el A otra fuerza (reacción) igual pero de sentido contrario".

COMENTARIOS:

1º.- Este principio afirma que las fuerzas siempre aparecen por parejas, el par acción-reacción, y son fuerzas de la misma dirección, de igual módulo pero de sentido contrario.

2º.- Según el comentario anterior podría pensarse que el par de fuerzas acción-reacción se anula entre sí. Sin embargo esto no es cierto puesto que están aplicadas a cuerpos diferentes.

3º.- Las fuerzas de acción y reacción son simultáneas, es decir, no hay separación temporal entre ellas.

4º.- Este principio afirma que las fuerzas son siempre acciones mutuas entre cuerpos y, por esta razón, a las fuerzas también se les conoce con el nombre de interacciones.

12. LA FUERZA DE ROZAMIENTO

La fuerza de rozamiento es una fuerza que disipa energía en forma de calor. Suele decirse que la fuerza de rozamiento se opone al movimiento. Aunque esto es cierto, no es menos cierto que también permite otros movimientos. En efecto, sin la fuerza de rozamiento no podríamos andar, ni escribir, las ruedas de los vehículos no podrían avanzar, etc.

La fuerza de rozamiento puede ser ***estática o dinámica***, también llamada ***cinética***. La fuerza de rozamiento estática es la que actúa mientras el cuerpo está en reposo sobre la superficie y puede tener valores comprendidos entre 0 y un valor máximo. Cuando la fuerza aplicada supera este valor máximo el cuerpo inicia el movimiento sobre la superficie y entonces aparece la fuerza de rozamiento dinámica o cinética.

El valor máximo de la fuerza de rozamiento estática vale:

$$\boxed{|\vec{F}|_{roz.est.máx.} = \mu_e \cdot |\vec{N}|} \quad ó \quad bien \quad \boxed{F_{roz.est.máx.} = \mu_e . N}$$

Siendo:

μ_e una constante característica que sólo depende de la naturaleza de las superficies puestas en contacto y que se denomina *coeficiente de rozamiento estático.*

$\vec{N}$ es la fuerza normal con la que se aprietan ambas superficies.

El módulo de esta fuerza representa el valor mínimo que debe de tener una fuerza paralela a la superficie para que al aplicarla sobre el cuerpo en reposo, este inicie su movimiento.

El valor de la fuerza de rozamiento dinámica o cinética es:

$$\boxed{|\vec{F}|_{roz.din.} = |\vec{F}|_{roz.cin.} = \mu_d \cdot |\vec{N}| = \mu_c \cdot |\vec{N}|} \quad ó \quad bien \quad \boxed{F_{roz.din.} = F_{roz.cin.} = \mu_d . N = \mu_c . N}$$

Siendo:

$\mu_e = \mu_c$ una constante característica que sólo depende de la naturaleza de las superficies puestas en contacto y que se denomina *coeficiente de rozamiento dinámico o cinético.*

$\vec{N}$ es la fuerza normal con la que se aprietan ambas superficies.

COMENTARIOS

1º.- Ambos coeficientes de rozamiento son adimensionales, es decir, carecen de unidades puesto que se obtienen dividiendo el módulo de dos fuerzas.

2º.- El coeficiente de rozamiento estático es ligeramente mayor que el dinámico ó cinético. Esto significa que se necesita aplicar más fuerza a un cuerpo en reposo para que inicie su movimiento que, una vez en movimiento, mantenga su velocidad constante:

$$\boxed{\mu_e > \mu_c \quad \Rightarrow \quad F_{roz.est.máx.} > F_{roz.cin.}}$$

3º.- Ambos coeficientes de rozamiento se pueden calcular experimentalmente del siguiente modo:

Para calcular el coeficiente de rozamiento estático entre un cuerpo y la superficie sobre la que se apoya se va elevando poco a poco la superficie hasta localizar el ángulo para el cual el cuerpo inicia su movimiento. Con esta inclinación se ha alcanzado el valor máximo de la fuerza de rozamiento estática que coincidirá con la componente paralela del peso y por tanto:

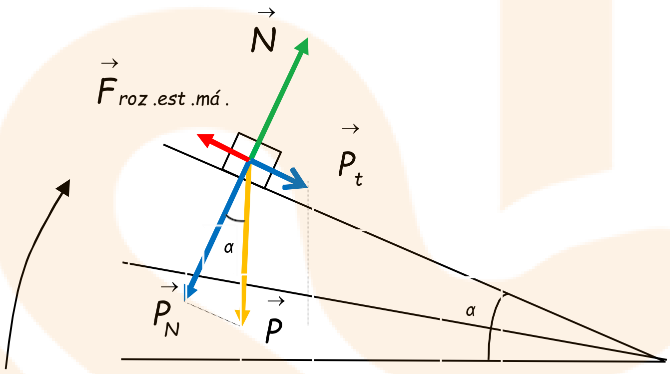
$$F_{roz.est.máx.} = P_t$$

$$\mu_e . N = P . sen\alpha$$

$$\mu_e . P_N = P . sen\alpha$$

$$\mu_e . P . cos\alpha = P . sen\alpha$$

$$\boxed{\mu_e = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} = tg\alpha}$$



Siendo α el ángulo para el cual el cuerpo inicia el deslizamiento por la superficie.

Con la inclinación anterior el cuerpo deslizará con movimiento acelerado ya que la fuerza de rozamiento dinámica, que es inferior a la de rozamiento estática máxima, será inferior a P_t. Si queremos que deslice con MRU debemos disminuir levemente la inclinación hasta conseguir el equilibrio entre la fuerza de rozamiento dinámica y P_t. Para esta nueva inclinación se cumplirá:

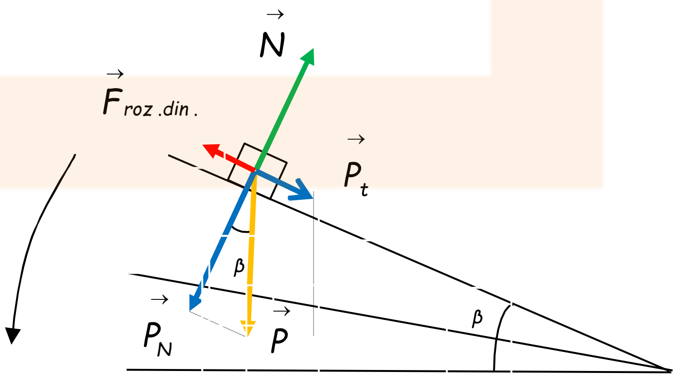
$$F_{roz.din.} = P_t$$

$$\mu_c . N = P . sen\beta$$

$$\mu_c . P_N = P . sen\beta$$

$$\mu_c . P . cos\beta = P . sen\beta$$

$$\boxed{\mu_c = \frac{sen\beta}{cos\beta} = tg\beta}$$



Siendo β el ángulo de inclinación para el cual el cuerpo desliza con velocidad constante (MRU).

EJEMPLO 8º

Considera uno cualesquiera de los objetos que en este momento tienes encima de la mesa (un cuerpo en reposo apoyado sobre una superficie horizontal). Analiza las fuerzas que actúan sobre él.

EJEMPLO 9º

Considera el mismo cuerpo del ejemplo anterior pero ahora le aplicas una fuerza $\vec{F}$ horizontal. Analiza las fuerzas que actúan sobre él y si se moverá o no en los siguientes casos:

a) Si no existiese rozamiento entre el cuerpo y la superficie de la mesa.
b) Considerando la situación real.

EJEMPLO 10º

Haz lo mismo que en el ejemplo anterior suponiendo que la fuerza $\vec{F}$ que se aplica forma un ángulo α con la horizontal.

EJERCICIO 10º

Sobre un cuerpo de 20 Kg, apoyado en una superficie horizontal con rozamiento (μ_c = 0,25), se aplica una fuerza horizontal de 100 N. Calcular:

a) La fuerza de rozamiento que actúa.
b) La aceleración con la que se mueve el cuerpo.
c) La velocidad del cuerpo al cabo de 3 s si inicialmente estaba en reposo.

SOLUC: a) 49 N b) 2,5 m/s² c) 7,5 m/s

EJERCICIO 11º

Se aplica una fuerza de 50 N a un cuerpo de 8 Kg que está apoyado, en reposo, en una superficie horizontal. La fuerza forma un ángulo de 60º con la horizontal y el coeficiente de rozamiento cinético entre el cuerpo y la superficie vale 0,1. Calcula la aceleración con la que se mueve el cuerpo.

SOLUC: 2,7 m/s²

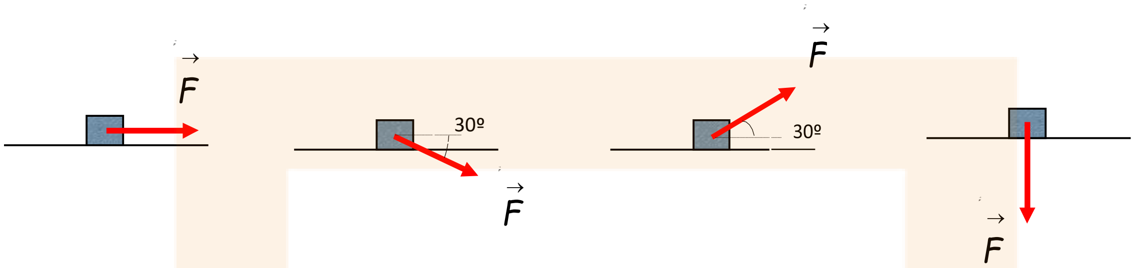
EJEMPLO 11º

Se deposita a un cuerpo de masa m sobre un plano inclinado de ángulo de inclinación α y comienza a deslizar. Analiza las fuerzas que actúan sobre el cuerpo y comprueba que la aceleración de descenso es independiente de la masa del cuerpo, en los siguientes casos:

a) No hay rozamiento.
b) Sí hay rozamiento

EJEMPLO 12º

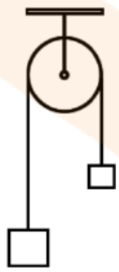
Sobre un cuerpo de 5 Kg de masa, inicialmente en reposo, actúa una fuerza $\vec{F}$, cuyo módulo es 10 N. Si el coeficiente de rozamiento estático entre el cuerpo y la superficie vale 0,4, calcula el valor de la fuerza de rozamiento que actúa y su valor máximo en cada una de las situaciones dibujadas:



SOUC: a) 10 N; 19,6 N b) 8,7 N; 21,6 N c) 8,7 N; 17,6 N d) 0 N; 23,6 N

EJEMPLO 13º

Dos masas están enlazadas mediante una cuerda que pasa por la garganta de una polea (máquina de Atwood). Analiza las fuerzas que actúan sobre cada masa.



EJERCICIO 12º

Se deja caer un cuerpo de 20 Kg. por un plano inclinado 30º con respecto a la horizontal desde 2 m de altura, siendo el coeficiente de rozamiento dinámico entre el cuerpo y el plano es μ_d =0,4.

a) Calcula la aceleración con que desciende.

b) La velocidad con la que llega a la base del plano.

SOLUC: A) 1,5 m/s^2 B) 3,46 m/s

EJERCICIO 13º

Se observa que un cuerpo desliza con velocidad constante por un plano inclinado. Basándote en el primer principio de la Dinámica razona si hay o no rozamiento entre el cuerpo y la superficie.

EJERCICIO 14º

Un cuerpo de 15 kg. se deja caer por un plano inclinado de 60º respeto a la horizontal, desde una altura de 2 m. Hallar:

a) La aceleración de descenso si no hay rozamiento entre el cuerpo y el plano.

b) El tiempo que tarda el cuerpo en llegar a la base del plano y la velocidad que tendrá en ese momento si partió del reposo.

SOLUC: A) a = 8,5 m/s² B) 0,73 s y 6,2 m/s

EJERCICIO 15º

Desde la base de un plano inclinado se lanza hacia arriba a un cuerpo de masa m. Demuestra que la aceleración de ascenso es independiente de la masa tanto si hay rozamiento como si no lo hay.

EJERCICIO 16º

Desde la base de un plano inclinado de 30º se lanza hacia arriba a un cuerpo de masa m con una velocidad de 12 m/s. Calcula la aceleración de ascenso, el tiempo que está ascendiendo y la altura máxima alcanzada en los siguientes casos:

a) No hay rozamiento.
b) El coeficiente de rozamiento dinámico vale 0,18.

SOLUC: a) a = -4,9 m/s² t = 2,45 s h = 7,35 m b) a = -6,43 m/s² t = 1,87 s h = 5,62 m

EJERCICIO 17º

Aplicamos horizontalmente una fuerza $\vec{F}$ a un mueble de 60 Kg. de masa, que está en reposo sobre una superficie horizontal con rozamiento siendo los coeficientes de rozamiento: $\mu_e = 0.4$ y $\mu_c = 0.3$.

Determina si se moverá o permanecerá en reposo y calcula la fuerza de rozamiento que está actuando en cada uno de los siguientes casos:

A) $\vec{F} = 200$ N B) $\vec{F} = 250$ N

SOLUC: A) no se mueve; $F_{roz} = 200$ N B) si se mueve; $F_{roz} = 176,4$ N

EJERCICIO 18º

Se quiere determinar el coeficiente de rozamiento estático y cinético entre una caja y tablón. Al elevar poco a poco el tablón se observa que la caja comienza a deslizar cuando la inclinación es de 28º. En estas mismas condiciones la caja recorre 3 m en 3 s. Calcula ambos coeficientes.

SOLUC: $\mu_e = 0,53$ $\mu_c = 0,455$

EJERCICIO 19º

Un esquiador, al descender, partiendo del reposo, por una pendiente de 213 m de longitud y un desnivel del 3%, emplea un tiempo de 61 s. Si se cambia de esquíes, el mismo esquiador invierte un tiempo de 42 s. Determina el coeficiente de rozamiento entre la nieve y los esquíes, en cada caso.

SOLUC: $\mu_{c1} = 0018$ $\mu_{c2} = 0,005$

EJERCICIO 20º

Un cuerpo desliza libremente por un plano inclinado de 30º con velocidad constante. Una vez en la base del plano, se lanza hacia arriba con una velocidad de 10 m/s.

a) Calcula el tiempo que tardará en detenerse y la altura a la que lo hará.
b) Una vez se detenga, ¿volverá a deslizar hacia abajo por sí mismo? Razona la respuesta.

SOLUC: a) 1,02 s 2,55 m b) ¿?

EJERCICIO 21º

Se desea subir un cuerpo de 5 Kg. por un plano inclinado 30º con respecto a la horizontal. Si el coeficiente de rozamiento cinético es 0,4, calcula:

a) La fuerza paralela al plano que tenemos que aplicarle para que suba con una aceleración de 0,5 m/s^2.
b) La altura alcanzada por el cuerpo a los 2 s suponiendo que partió del reposo.

SOLUC: a) 44,05 N b) 0,5 m

EJERCICIO 22º

Dos masas de 1 y 3 Kg cuelgan de los extremos de una cuerda que pasa por una polea . Despreciando la masa de la cuerda y de la polea, calcular:

a) La aceleración del sistema.
b) La tensión de la cuerda.

SOLUC: a) a = 4,9 m/s^2 b) T = 14,7 N

EJERCICIO 23º

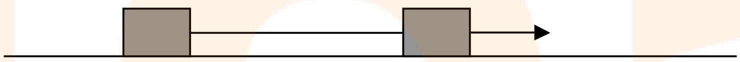
Un cuerpo de 6 Kg. de masa resbala sobre una mesa horizontal, (cuyo coeficiente de rozamiento es 0,25), resbala por la acción de una cuerda a la que está unido, esta cuerda pasa por la garganta de una polea a otro cuerpo de 4 Kg. que cuelga.Calcular:

a) la aceleración con que resbala la masa que está sobre la mesa.
b) La tensión de la cuerda en cada uno de los extremos de la cuerda.

SOLUC: a) 2,45 m/s² b) 29,4 N

EJERCICIO 24º

Dos cuerpos de 4 y 6 kg. están apoyados sobre una superficie horizontal sin rozamiento y unidos mediante una cuerda de masa despreciable e inextensible. Del cuerpo de la derecha se tira con una fuerza F horizontal de 20 N hacia la derecha. Calcular:



a) La aceleración del sistema.
b) La tensión de la cuerda.

SOLUC: A) a = 2 m/s² B) T = 8 N

EJERCICIO 25º

Repite el problema anterior suponiendo que la fuerza F se aplica formando un ángulo de 30º con la horizontal.

SOLUC: A) a = 1,74 m/s² B) T = 6,96 N

EJERCICIO 26º

Repite el problema nº 24 suponiendo que hay rozamiento siendo $\mu_1 = 0,1$ y $\mu_2 = 0,15$.

SOLUC: A) a = 0,73 m/s² B) T = 6,84 N

EJERCICIO 27º

Repite el problema nº 26 suponiendo que hay rozamiento siendo $\mu_1 = 0,1$ y $\mu_2 = 0,15$.

SOLUC: A) a = 0,62 m/s² B) T = 6,4 N

13. FUERZA CENTRÍPETA

Un cuerpo con movimiento curvilíneo siempre tiene aceleración centrípeta ya que la dirección de su velocidad va cambiando continuamente.

El cuerpo por tanto no está en equilibrio y debe de actuar sobre él una fuerza responsable de dicha aceleración que ha de tener la misma dirección y sentido que la aceleración centrípeta, es decir, dirigida hacia el centro de la trayectoria. A esta fuerza responsable de la aceleración centrípeta de los cuerpos se le denomina fuerza centrípeta.

En la gráfica siguiente se muestra la fuerza centrípeta en un MCU:

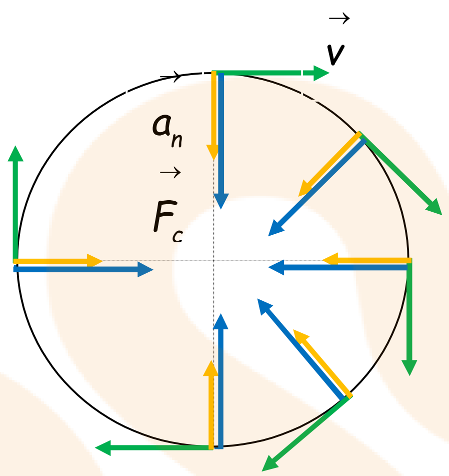


Figura 1.6
Vectores velocidad lineal, aceleración normal y fuerza centrípeta en un MCU

COMENTARIOS:

1º.- La fuerza centrípeta es sólo un nombre, no es una fuerza más que añadir al movimiento.

2º.- La fuerza centrípeta puede ser de muy diferente naturaleza: gravitatoria, eléctrica, de rozamiento, tensión, etc.

3º.- El módulo de la fuerza centrípeta, aplicando la 2ª Ley de Newton es:

$$\vec{F}_c = m.\vec{a}_c \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_c = m.a_c = m.\frac{v^2}{R}}$$