

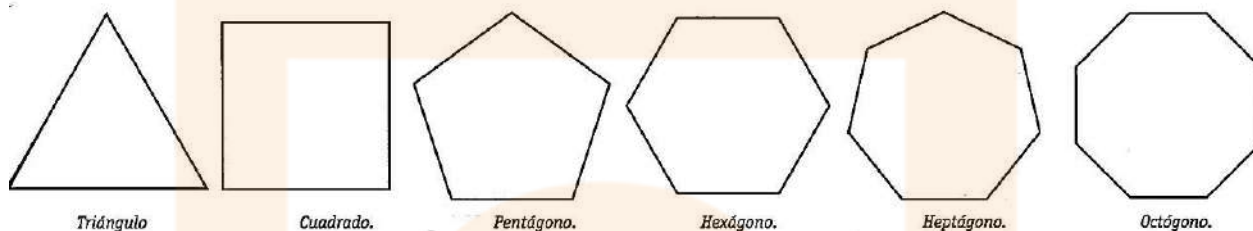
A) GEOMETRÍA PLANA

TEMA 1.-POLÍGONOS

Los polígonos son figuras planas delimitadas por rectas que se cortan dos a dos. Los puntos donde se cortan las rectas se llaman **vértices**, y los segmentos que los unen se denominan **lados**. Respecto a este tema, conviene repasar los conceptos ya estudiados el curso pasado.

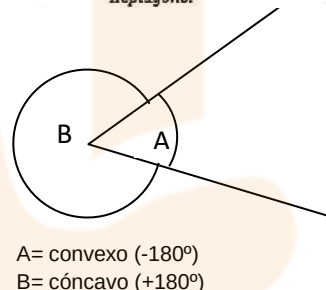
Clasificación

-Según el número de lados



-Según la forma de los ángulos interiores

- Polígonos convexos:** todos sus ángulos son convexos
- Polígonos cóncavos:** alguno de sus ángulos es cóncavo



Otras clasificaciones:

- Polígonos equiángulos:** todos sus ángulos son iguales
- Polígonos equiláteros:** todos sus lados son iguales
- Polígono regular:** todos sus lados y sus ángulos son iguales
- Polígono irregular:** no todos sus lados y ángulos son iguales

Algunas propiedades de los polígonos

-Un polígono **convexo** se descompone en tantos triángulos como lados tiene menos dos, y la suma de sus ángulos interiores es igual a 180° por el número de lados menos dos.

-El valor del **ángulo central** de un polígono regular se obtiene dividiendo 360 entre el número de lados.

-En un polígono regular de un **número par de lados**, las mediatrices de los lados coinciden con la del lado opuesto. En un polígono regular de un **número impar de lados**, la mediatriz de un lado coincide con el vértice opuesto.

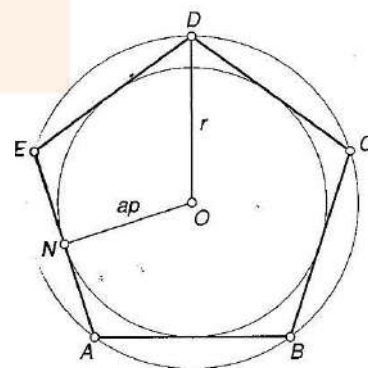
-Un polígono **circunscrito** a una circunferencia tiene todos sus lados tangentes a la misma.

-Un polígono **inscrito** en una circunferencia tiene todos sus vértices sobre dicha circunferencia

-En un **polígono regular** siempre existe:

-Una **circunferencia circunscrita**, cuyo radio es el segmento que une el centro O (punto interior del polígono que equidista de los vértices) con uno cualquiera de los vértices.

-Una **circunferencia inscrita**, cuyo radio es la **apotema**, segmento que une el centro del polígono con el punto medio de cualquiera lado.

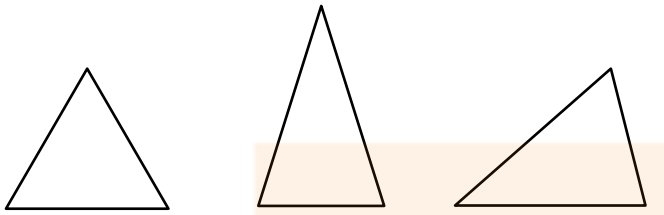


1.1.-Triángulos

Son figuras planas limitadas por tres rectas o lados que se cortan en unos puntos llamados vértices

Clasificación:

Según sus lados

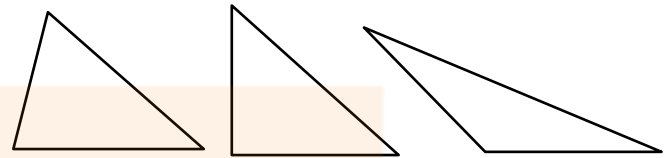


Equilátero: $a=b=c$

Isósceles: $a=b \neq c$

Escaleno: $a \neq b \neq c$

Según sus ángulos



Acutángulo ($<90^\circ$)

Rectángulo ($=90^\circ$)

Obtusángulo ($>90^\circ$)

Propiedades

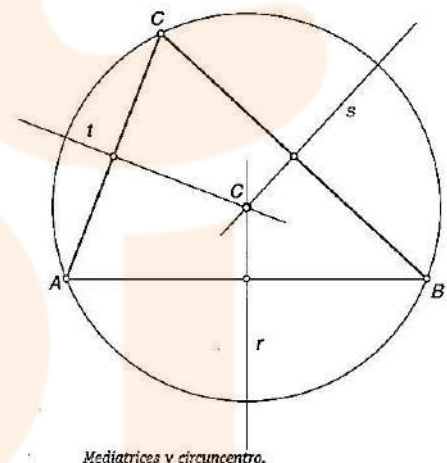
Los ángulos interiores de un triángulo siempre suman 180° , como consecuencia:

- Un triángulo no puede tener más de un ángulo obtuso o un ángulo recto.
- En un triángulo **rectángulo**, los dos lados agudos son complementarios
- La **hipotenusa** de un triángulo rectángulo es mayor que cada uno de sus catetos

-Cualquiera de los lados de un triángulo es menor que la suma de los dos restantes, pero mayor que su diferencia.

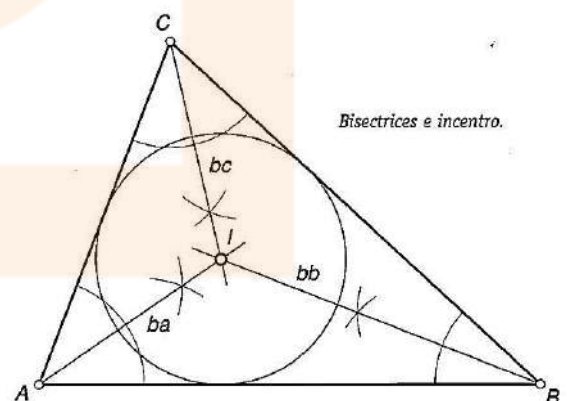
Rectas y puntos notables en el triángulo

-Las **mediatrices** de un triángulo son las rectas perpendiculares a cada uno de los lados trazados en su punto medio. Las tres mediatrices se cortan en un punto denominado **circuncentro**. Este punto es además el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo



Mediatrices y circuncentro.

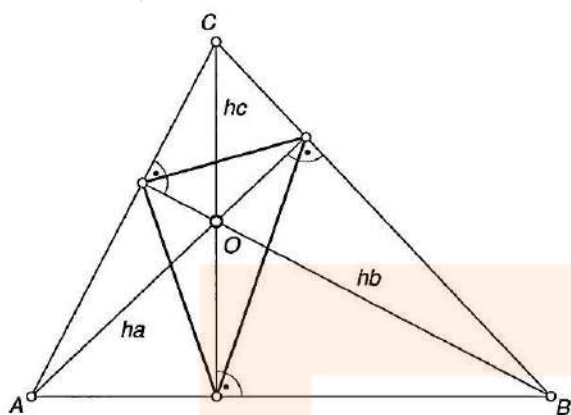
-Las **bisectrices** son las rectas que pasado por los vértices de los ángulos dividen a cada uno de ellos en dos partes iguales, y se cortan en un punto llamado **incentro**. Este punto es además el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.



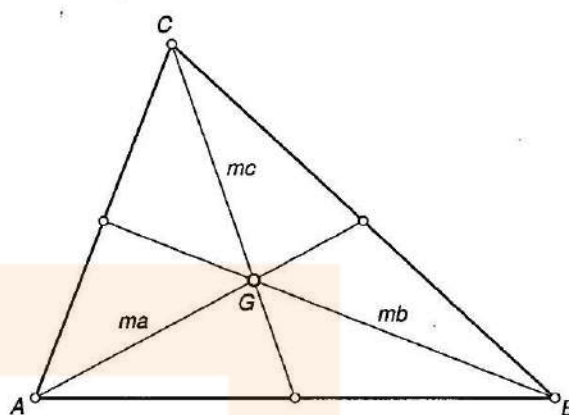
Bisectrices e incentro.

-Las **alturas** son las rectas perpendiculares trazadas desde cada vértice a su lado opuesto. El punto donde se cortan estas rectas se llama **ortocentro**.

-Las **medianas** son las rectas que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto. El punto donde se cortan se llama **baricentro**.

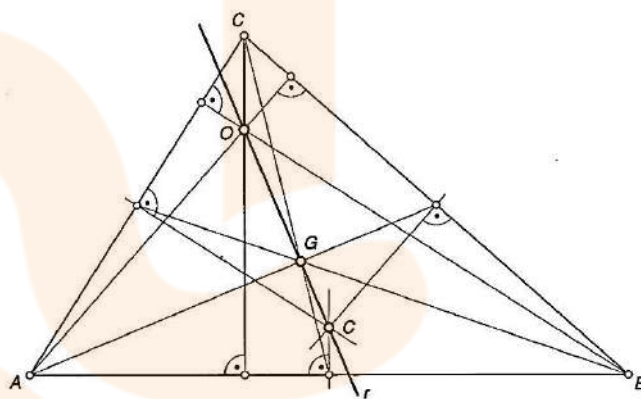


Alturas, ortocentro y triángulo órtico.



Medianas y baricentro.

-**Recta de Euler:** se verifica que en cualquier triángulo el **baricentro**, el **ortocentro** y el **circuncentro** están alineados. La recta que une estos tres puntos se denomina **recta de Euler**.



ALGUNAS CONSTRUCCIONES DE TRIÁNGULOS

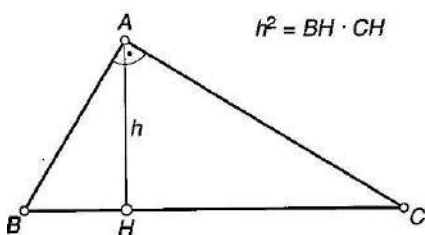
Construcciones de triángulos rectángulos

Los triángulos rectángulos pueden construirse conociendo solo dos de todos sus datos, dado que sabemos que tienen un ángulo recto y dos agudos. También es importante conocer las relaciones métricas existentes entre sus componentes, como los siguientes teoremas:

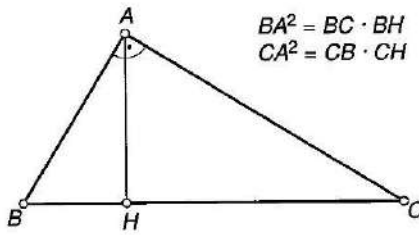
Teorema de la altura: la altura trazada desde el vértice opuesto a la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos en que la divide $h = \sqrt{a \cdot b}$

Teorema del cateto: en todo triángulo rectángulo, cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y la proyección de ese cateto sobre ella.

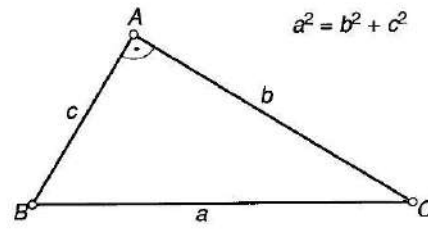
Teorema de Pitágoras: la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa: $b^2 + c^2 = a^2$, o lo que es lo mismo: $a = \sqrt{b^2 + c^2}$



Teorema de la altura.



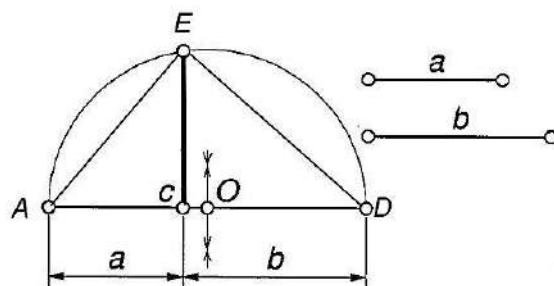
Teorema del cateto.



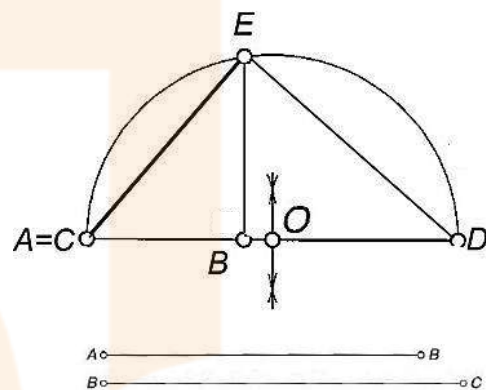
Teorema de Pitágoras.

Los teoremas del cateto y de la altura nos proporcionan un método para trazar el segmento **media proporcional** de dos segmentos dados:

-Según el **teorema de la altura**: llevamos los dos segmentos dados uno a continuación del otro sobre una recta auxiliar. Trazamos una semicircunferencia con centro en su punto medio con diámetro AD. Por el punto común C trazamos una perpendicular que corta a la semicircunferencia en el punto E. El segmento CE resultante es la **media proporcional**.

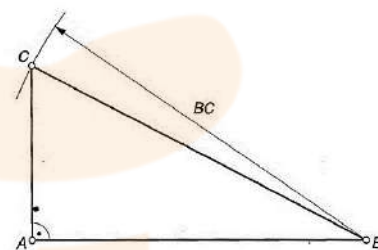


-Según el **teorema del cateto**: superponemos los dos segmentos AB y CD. Trazamos la semicircunferencia de diámetro AD, desde su punto medio. Por el punto B, trazamos una perpendicular que corta a la semicircunferencia en E. El segmento AE resultante es la **media proporcional**.



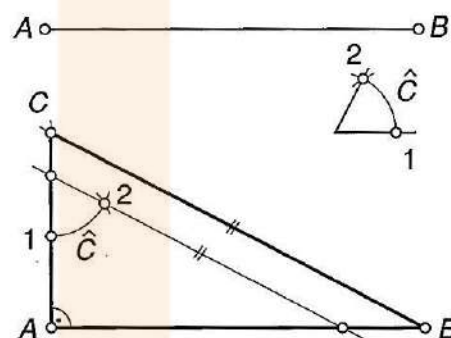
Construir un triángulo rectángulo conociendo un cateto y la hipotenusa

-Trazamos sobre una recta auxiliar el cateto AB. Levantamos una perpendicular desde A y un arco con la medida de la hipotenusa desde B que la corte.



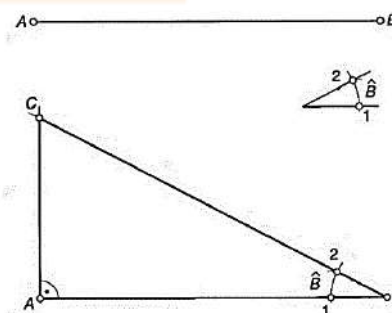
Conociendo un cateto y el ángulo opuesto

-Trazamos el cateto AB, y una perpendicular desde A. Tomamos un punto cualquiera de la perpendicular y construimos un ángulo C' igual al dado. Desde B trazamos una paralela al lado de ese ángulo C' que en su corte con la perpendicular desde A nos da el vértice C.



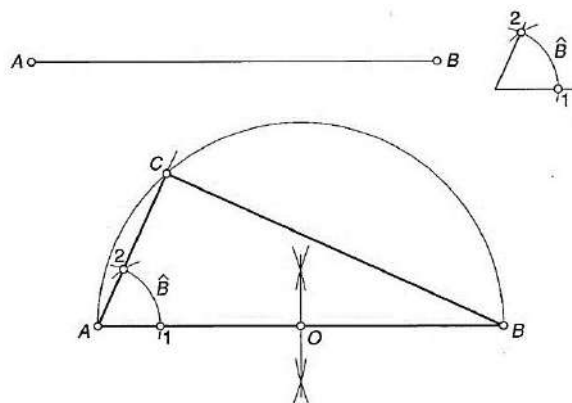
Conociendo un cateto y un ángulo contiguo

-Trazamos el cateto AB y una perpendicular desde A. Desde B construimos el ángulo dado cuyo lado, en su corte con la perpendicular, nos dará el vértice C.



Conociendo la hipotenusa y un ángulo contiguo

-Trazamos la hipotenusa AB, hallamos su centro y trazamos una semicircunferencia de diámetro AB (en realidad, estamos construyendo el **arco capaz** del ángulo recto). Desde A construimos el ángulo dado, cuyo corte con la semicircunferencia es el vértice C.



Otras construcciones de triángulos

A pesar de ser el polígono con menor número de lados, resulta sorprendente la cantidad de problemas que pueden plantearse con todos sus elementos. Su conocimiento en profundidad es básico, puesto que los polígonos con mayor número de lados siempre pueden descomponerse en triángulos, y es a través de éstos como muchas veces operamos.

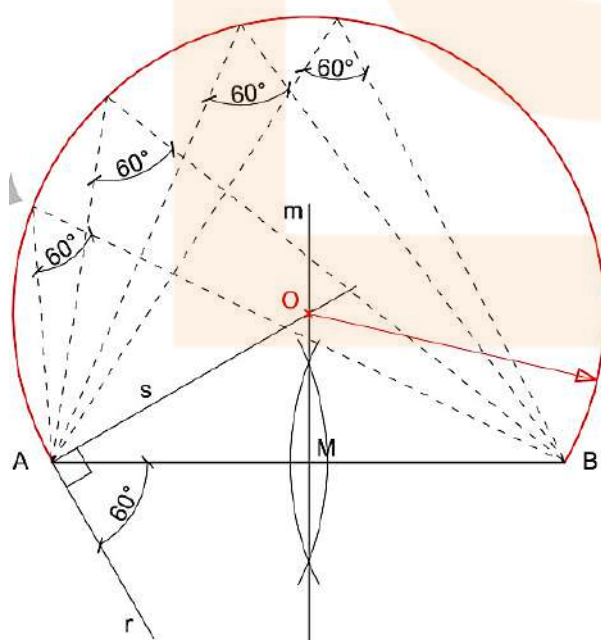
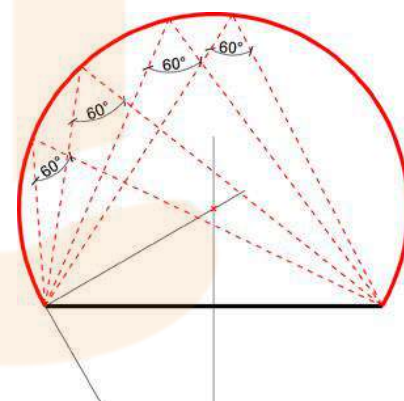
Construcciones usando el arco capaz

Arco Capaz es el lugar geométrico de los puntos del plano desde los cuales se ven los extremos de un segmento desde un mismo ángulo.

Trazado del Arco Capaz

Dado un segmento AB se pide hallar su Arco Capaz de 60° .

1. Dibuja la mediatriz **m** del segmento **AB**.
2. En un extremo del segmento, dibuja una recta **r** que forme un ángulo de 60° con el segmento.
3. Desde ese mismo extremo, dibuja una recta **s** perpendicular a **r**, que cortará a la mediatriz **m** en el punto **O**.
4. El punto **O** es el centro de un arco que pasa por **A** y por **B** y desde cuyos puntos se ven **A** y **B** con un ángulo de 60° . Es decir, **O** es el centro del Arco Capaz de 60° del segmento **AB**.

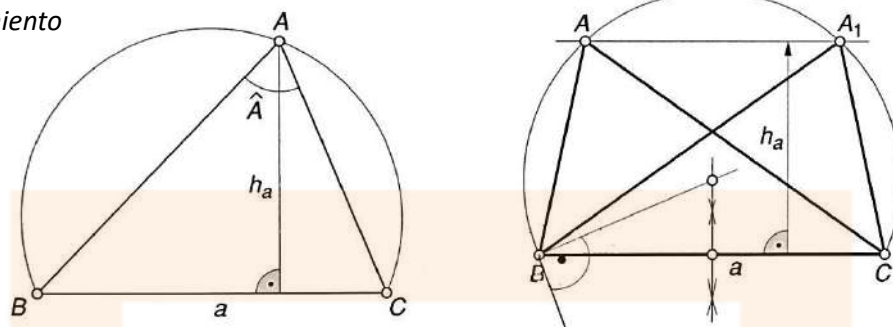


*Como puedes observar, desde cualquier punto del arco de circunferencia se ven los extremos **A** y **B** del segmento con un ángulo de 60 grados.*

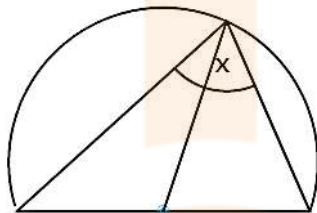
Construir un triángulo dados un ángulo A , el lado opuesto (BC) y la altura sobre él (h)

-Trazamos el lado dado BC y construimos su arco capaz. A partir de B, trazamos una paralela a BC con la medida de la altura dada. En los puntos de corte de esa paralela con el arco capaz están los dos posibles vértices A.

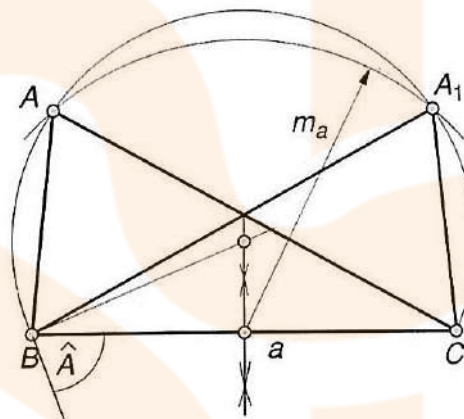
Planteamiento



Construir un triángulo conocidos un ángulo, el lado opuesto y la mediana en él

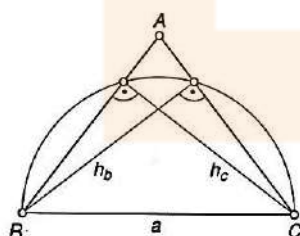


Planteamiento del problema

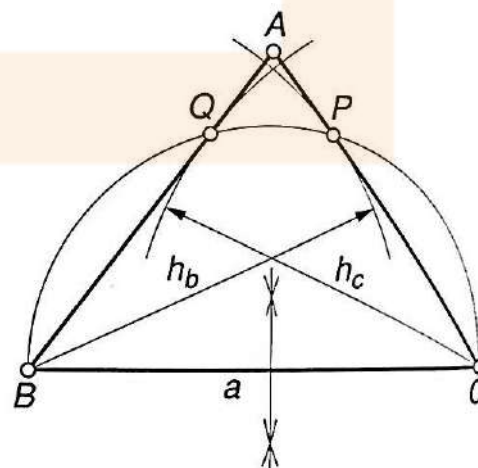


-Trazamos el lado BC y hallamos el arco capaz con el ángulo dado. Dibujamos una circunferencia de radio la mediana y centro en la mediatriz del lado BC. Los cortes de este arco con el arco capaz nos ofrecen dos posibles vértices A.

Construir un triángulo conocido un lado y las alturas que parten de sus extremos: Trazamos el lado dado BC y su arco capaz de 90° . Desde los puntos B y C trazamos arcos con la medida de la altura, que determinan los puntos P y Q en sus cortes con el arco capaz. Unimos B con Q y C con P, y el corte de sus prolongaciones no da el vértice A buscado.

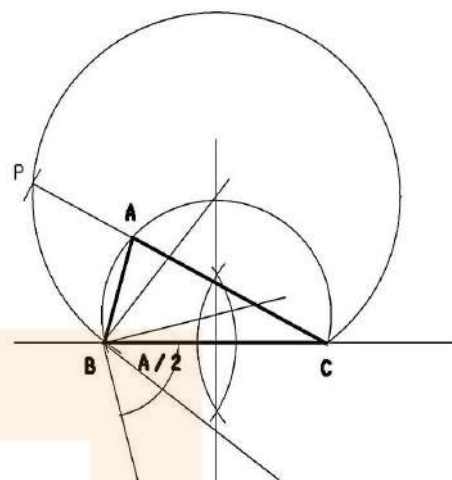
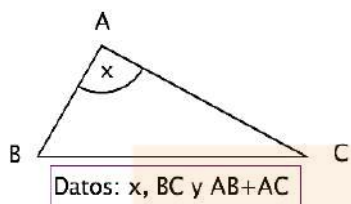


Planteamiento del problema



Construir un triángulo conocidos uno de los lados, su ángulo opuesto y la suma de los otros dos

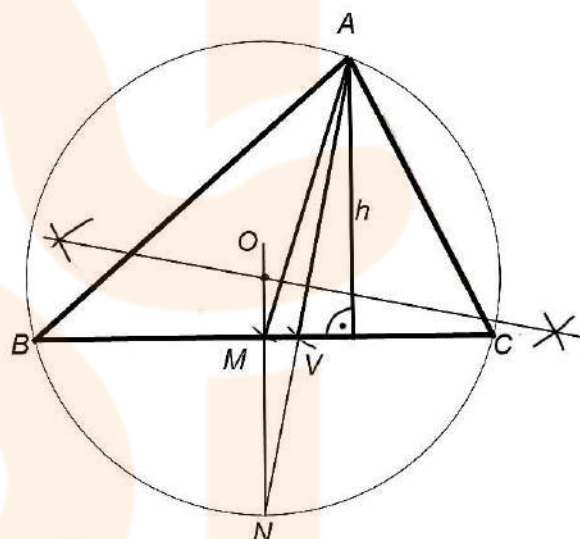
-Trazamos el lado dado, BC, un arco capaz con el ángulo dado, y otro con la mitad de éste. Con la medida de la suma de los dos lados, hacemos un arco desde C, que cortará al arco capaz de la mitad del ángulo en P. Uniendo P con C, obtenemos el vértice restante A, en su corte con el otro arco capaz.



Otros casos

Construir un triángulo dadas la altura, la mediana y la bisectriz

-Dibujamos la altura (con lo que tenemos ya el vértice A) y una perpendicular a su otro extremo. Con centro en A, trazamos arcos con las medidas de la mediana y la bisectriz que corten a esa perpendicular, que nos dan los puntos M y V respectivamente. Levantamos una perpendicular por M (*mediatriz* del triángulo), y la cortamos con la prolongación de AV, obteniéndose el punto N, situado en la circunferencia que circunscribe al triángulo buscado. Trazamos la mediatriz de AN, cuyo corte con la prolongación de la perpendicular MN nos da el centro O de la circunferencia circunscrita (el *circuncentro*), que dibujamos con radio ON. B y C estarán en el corte de la perpendicular a la altura que trazamos al principio con esta circunferencia.

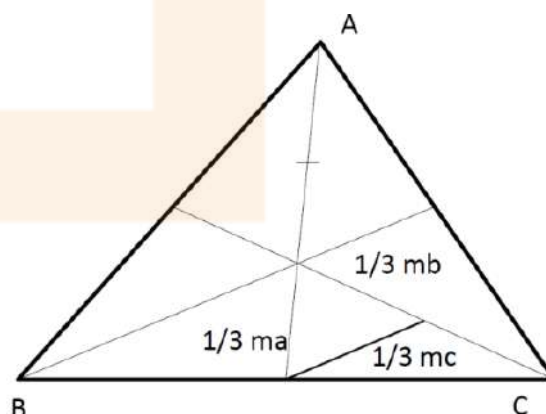


Triángulo conocidas las tres medianas:

Para construir este triángulo hay que tener en cuenta que el **baricentro** siempre está en cada mediana a $\frac{2}{3}$ del vértice y a $\frac{1}{3}$ del punto medio del lado, y que es el vértice de un triángulo cuyos lados son $\frac{1}{3}$ de cada mediana.

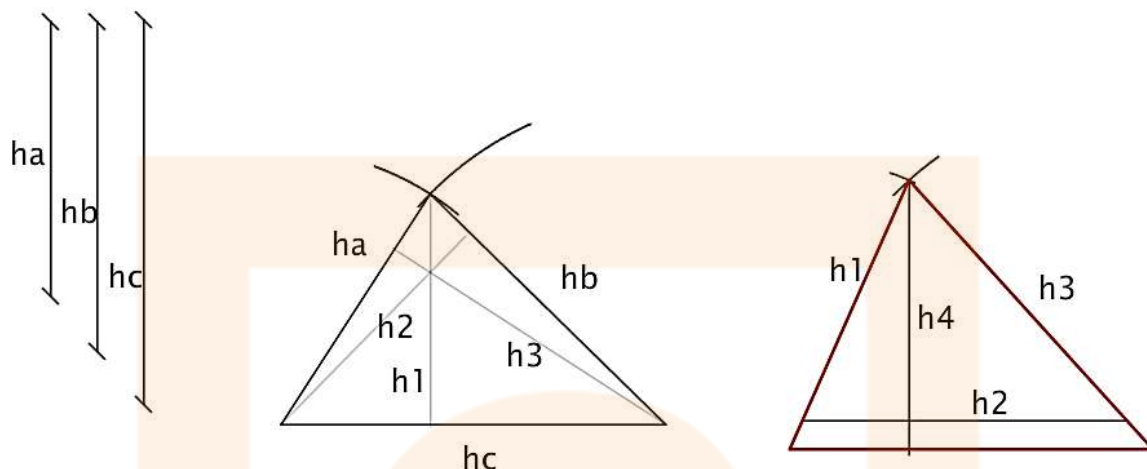
-Dibujamos un triángulo con $\frac{1}{3}$ de cada mediana, y decidimos que uno de los vértices sea el baricentro. Prolongamos uno de los lados $\frac{2}{3}$, situando ahí el vértice A.

-A los dos lados de mb trazamos $\frac{1}{3}$, obteniéndose C y el otro extremo de la mediana. Unimos A y C con los otros pies de las medianas; su intersección nos da el vértice restante B.



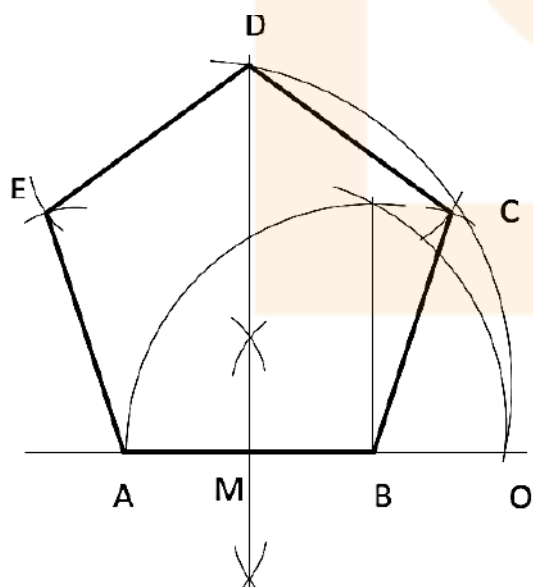
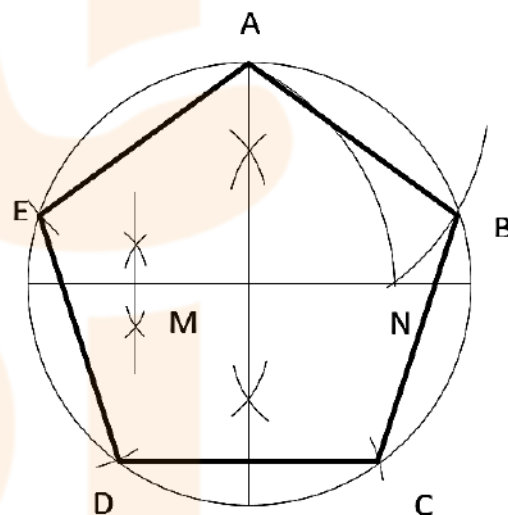
Construir un triángulo, conocidas las tres alturas: Para resolver este ejercicio aplicaremos proporcionalidad y semejanza:

-Construimos un triángulo con las alturas dadas (h_a, h_b, h_c), y le trazamos a su vez sus alturas. Dibujamos a continuación otro triángulo con esas alturas obtenidas, h_1, h_2 y h_3 , que será semejante al buscado. Le trazamos una altura cualquiera, por ejemplo h_4 , y la prolongamos desde el vértice superior hacia abajo, hasta que mida la altura dada (h_a en este caso). Por semejanza obtenemos el triángulo solución, prolongando dos lados del triángulo, también hacia abajo.



1.2. Construcción del pentágono (repaso 1º)

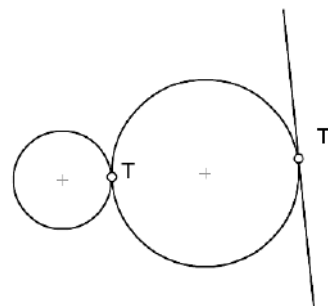
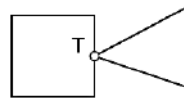
Pentágono, dado el radio de la circunferencia circunscrita: Trazar la circunferencia de radio r . Hallar la mediatriz del diámetro, que nos dará, en su corte con la circunferencia, el vértice A . Hallar a su vez la mediatriz de la mitad del diámetro, que nos dará M . Con centro en M y radio MA , trazar un arco que corte el diámetro en N . Dibujando un arco con centro en A y radio AN , obtenemos sobre la circunferencia el lado.



Construir un pentágono dado el lado: Se traza AB en una recta. Se halla la mediatriz de ésta. Desde B , trazamos una perpendicular con la distancia AB . Con centro en la mediatriz y radio en esta perpendicular, hallamos O sobre la recta. Con centro en A y radio en AO , hallamos el vértice D en el corte con la mediatriz. Ya solo resta hallar E y C trazando arcos con la distancia AB desde A y D y desde B y C .

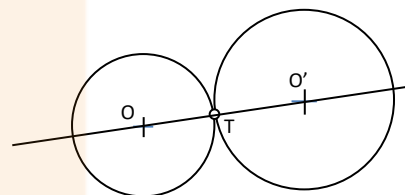
TEMA 2.-TANGENCIAS (repaso y ampliación 1ª)

Dos figuras planas son **tangentes** cuando tienen un solo punto en común (**punto de tangencia**). La tangencia puede producirse entre cualquier tipo de figura plana (recta, polígono, circunferencia...) pero las más habituales son las generadas entre rectas y circunferencias y entre éstas entre sí.

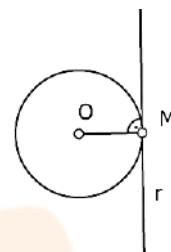


Las siguientes 2 **reglas básicas** se cumplen **siempre** en los ejercicios de tangencias y son básicas para resolverlas:

1.-Dos circunferencias tangentes tienen **siempre** sus **centros alineados con el punto de tangencia**.



2.-El punto de tangencia de una recta con una circunferencia se encuentra **siempre** en la perpendicular a la recta tangente que pasa por el centro de la circunferencia.

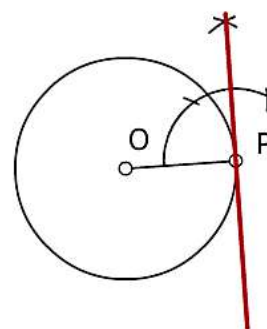


Y, muy importante, en todo ejercicio de tangencias deberás indicar **siempre** indicar el **punto de tangencia** y el **centro** de las circunferencias tangentes. Un ejercicio de tangencias no está resuelto hasta que se indican estos elementos. ¡No lo olvides! Los ejercicios de tangencias son precisos. No vale un "más o menos por aquí está el punto de tangencia".

2.1.-CONSTRUCCIÓN DE TANGENCIAS ENTRE RECTAS Y CIRCUNFERENCIAS

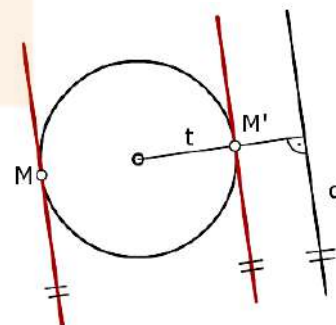
Dibujar una recta tangente a una circunferencia en un punto de ella

Trazar el radio que une el centro con el punto P, y dibujar la recta perpendicular al radio que pase por P, que será la solución.

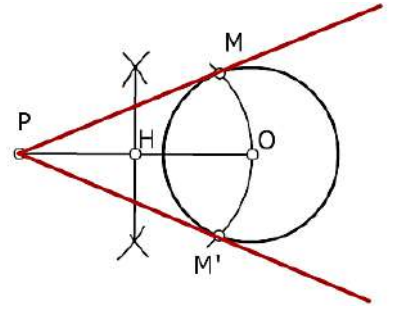


Trazar dos rectas tangentes a una circunferencia y paralelas a una dirección

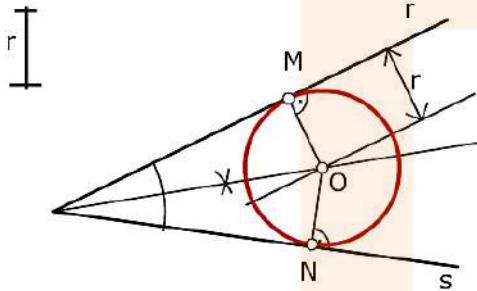
Se resuelve de forma similar al anterior: trazar por el centro de la circunferencia una recta t perpendicular a la dirección dada, lo que determinará los puntos de tangencia M y N. Solo resta trazar paralelas a la dirección dada que pasen por los puntos de tangencia.



Trazar dos rectas tangentes a una circunferencia desde un punto exterior a ella: Se une el punto P con el centro de la circunferencia y se halla su mediatriz. Con centro en ésta (H) y radio HO se traza un arco que corte a la circunferencia en M y M' , que son los dos puntos de tangencia buscados. Puede pasar que sólo nos pidán una recta; como es lógico, se resuelve igual.



Circunferencias tangentes a 2 rectas: Una circunferencia tangente a 2 rectas **siempre** tiene su centro en la bisectriz del ángulo que forman las rectas. Así que, ese es el primer paso para todos los casos. Veremos tres casos:

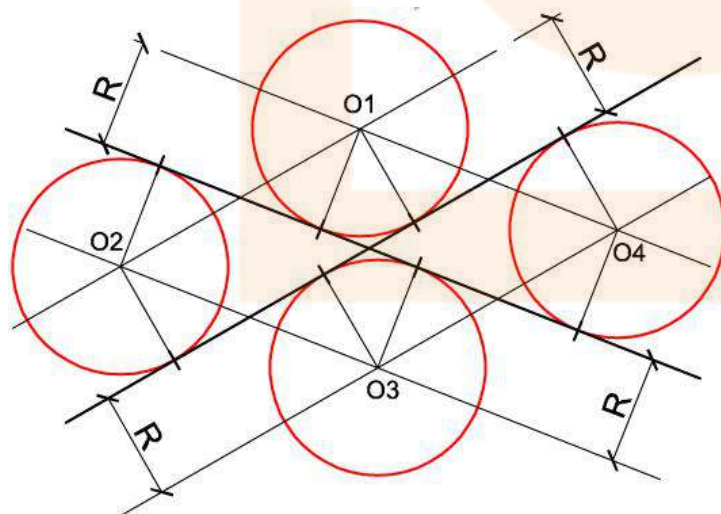
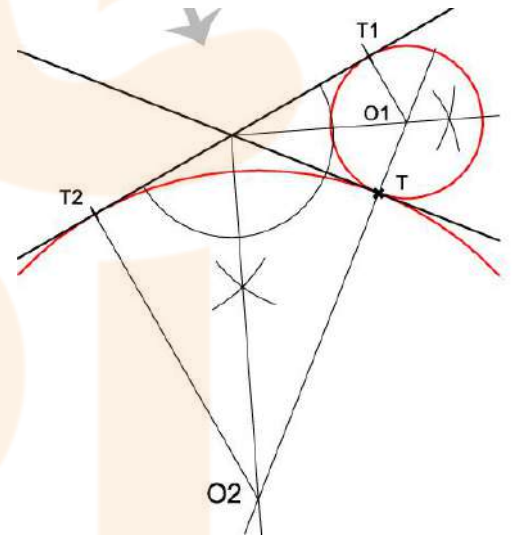


Hallar una circunferencia tangente a dos rectas convergentes, dado el radio

Dibujar la bisectriz del ángulo que determinan r y s . Trazar una paralela a r ó s a la distancia del radio. El corte de ésta con la bisectriz determina el centro de la circunferencia. Trazando desde ésta perpendiculares a r y a s , hallamos los puntos de tangencia M y N .

Circunferencias tangentes a 2 rectas por un punto de tangencia:

Traza una perpendicular a la recta dada por el punto de tangencia T . La intersección de esta perpendicular con la bisectriz define el centro de la circunferencia. No te olvides de que hay dos posibles soluciones. Y dibuja el punto de tangencia sobre la otra recta.



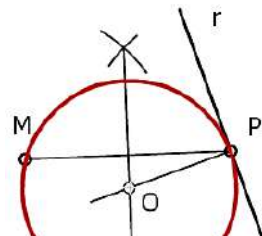
Circunferencias tangentes a 2 rectas dado el

radio: Dibuja las paralelas a ambas rectas por ambos lados a una distancia igual al radio. La intersección de estas rectas determina los centros de la circunferencia. Deberán coincidir con las bisectrices. Dibuja los puntos de tangencia.

R

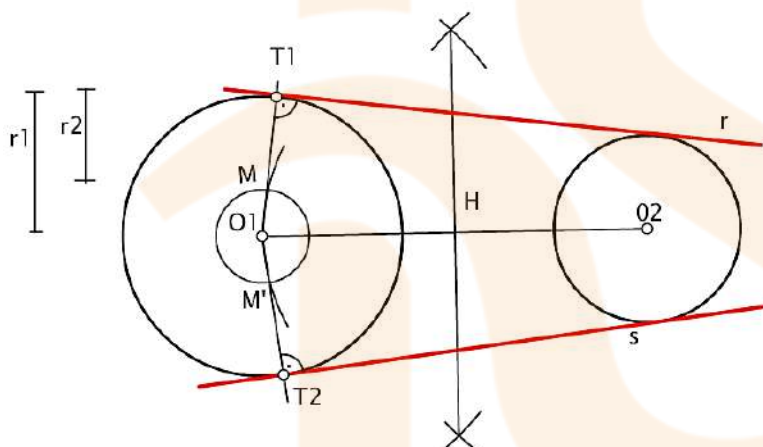
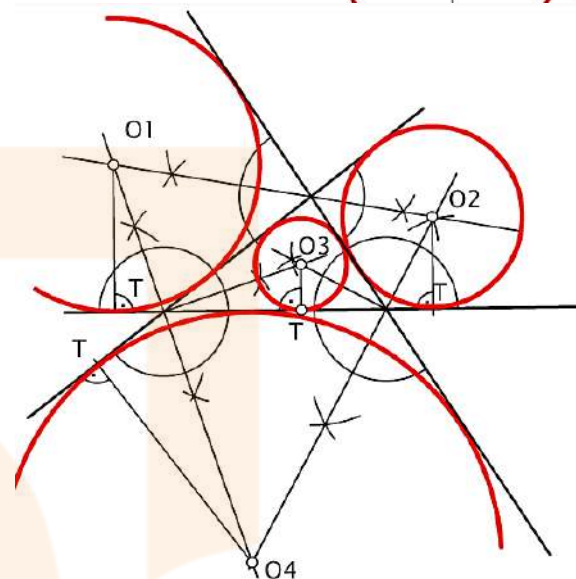
Hallar una circunferencia que pase por un punto M y sea tangente a una recta por un punto dado P

Unir M con P y trazar su mediatriz. Dibujar una perpendicular a la recta r dada que pase por P. El corte de la mediatriz con ésta nos dará el centro de la circunferencia.



Hallar una circunferencia tangente a tres rectas que se cortan dos a dos.

Hay cuatro posibles soluciones. Para hallar los centros de las cuatro circunferencias, trazar las bisectrices de los ángulos que determinan las rectas al cruzarse, y hallar la intersección entre las dos bisectrices. Los puntos de tangencia se hallan dibujando perpendiculares a las rectas que pasen por el centro.

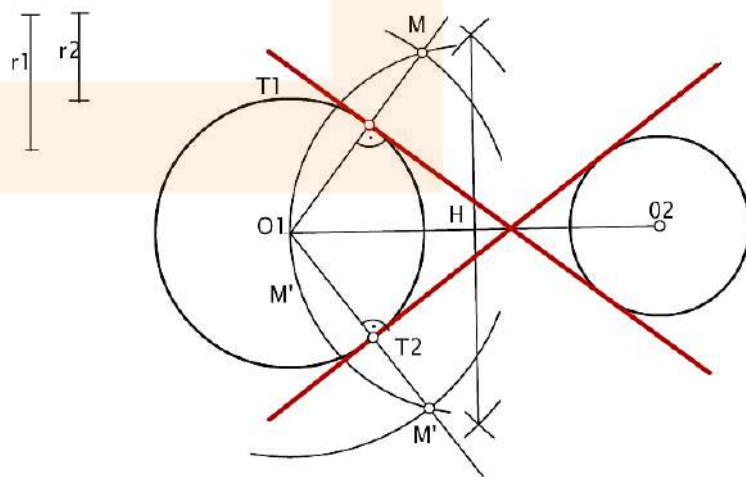


Dadas dos circunferencias de distinto radio, hallar dos rectas tangentes exteriores a ambas

Unir los dos centros y trazar la mediatriz de este segmento. Trazar una circunferencia concéntrica a la mayor cuyo radio sea la diferencia entre los dos radios dados. Con centro en H y radio HO_1 , trazar un arco que corte a esa circunferencia auxiliar, dando M y M'. Uniendo O_1 con M y con M', obtenemos los puntos de tangencia T1 y T2. Solo resta hallar las perpendiculares a O_1M y a O_1M' que pasen por los puntos de tangencia.

Dadas dos circunferencias de distinto radio, hallar dos rectas tangentes interiores

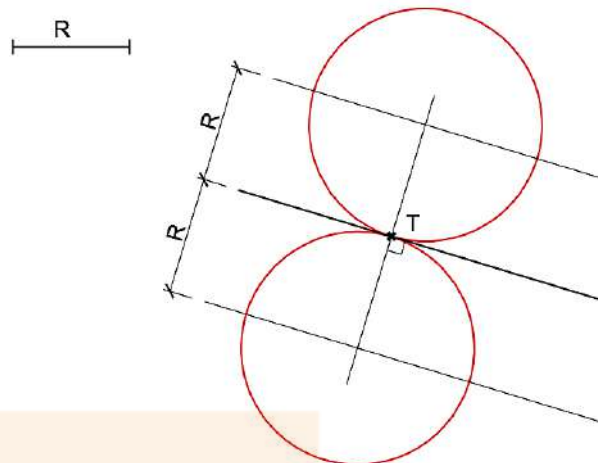
Unir los dos centros y hallar su mediatriz(H). Trazar una circunferencia con radio r_1+r_2 y centro en O_1 . Hallar otra circunferencia con centro en H y radio O_1H , que cortará a la circunferencia en M y M'. Uniendo ambos puntos con O_1 , obtenemos los puntos de tangencia en sus cortes con la circunferencia mayor. Solo resta trazar sendas perpendiculares a O_1M y a O_1M' pasando por los puntos de tangencia.



Construir las circunferencias tangentes a una recta dados el punto de tangencia y el radio

Dibuja una paralela a la recta con una distancia igual al radio. Dibuja la perpendicular a la recta por el punto. En el punto de corte de ambas rectas obtienes el centro O de la circunferencia tangente.

Fíjate que existen dos rectas paralelas a la dada con una distancia determinada, por lo que tienes que dibujar las 2 soluciones.



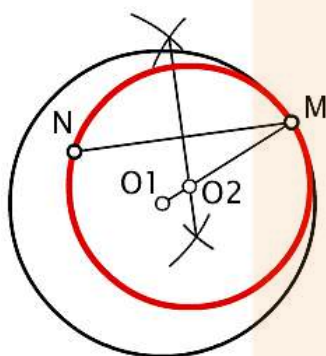
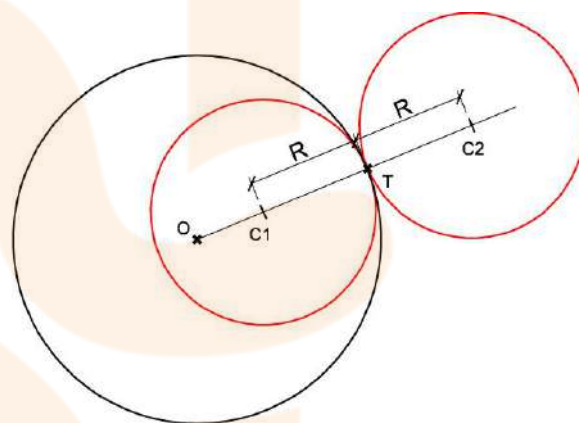
2.2. CONSTRUCCIÓN DE TANGENCIAS ENTRE CIRCUNFERENCIAS

Las circunferencias tangentes pueden ser **interiores o exteriores**. En las **interiores**, la distancia de sus centros es igual a la diferencia de sus radios. En las **exteriores**, a la suma.

Dados el punto de tangencia T y el radio R:

Une el centro de la circunferencia O con el punto de tangencia T . Para dibujar la circunferencia tangente exterior, **suma** el radio dado al de la circunferencia. Para ello toma la medida del radio R con el compás y ponla a continuación del radio dibujado. Esto determinará el centro de la circunferencia tangente exterior.

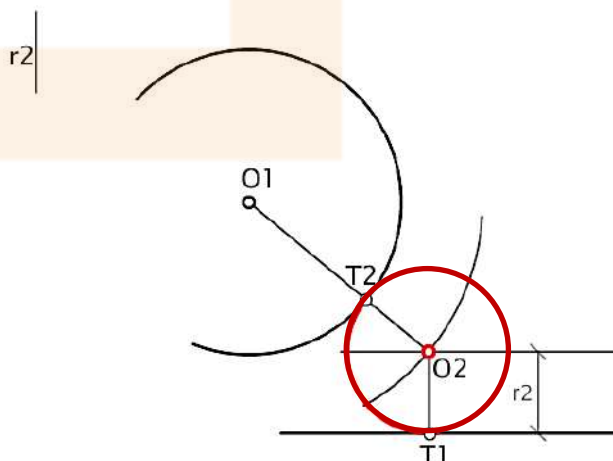
Para dibujar la circunferencia tangente interior, **resta** el radio dado al de la circunferencia. Lleva la medida del radio R hacia el interior de la circunferencia y obtendrás el centro de la circunferencia tangente.



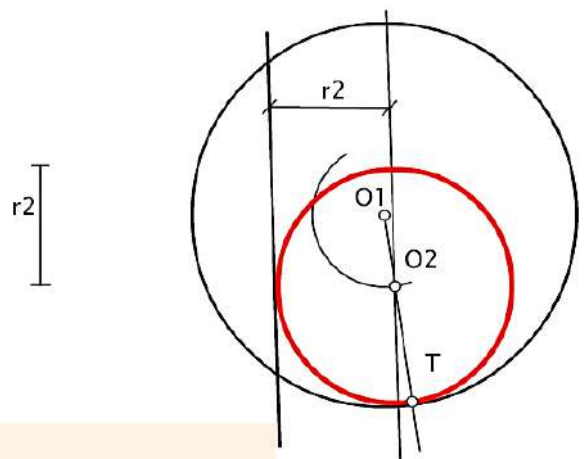
Circunferencia tangente interior a otra por un punto M y pasando por otro punto interior N: Al ser M y N puntos de la misma circunferencia, su centro está en la mediatriz de MN, por lo que se halla ésta, se une O_1 con M y donde corte con la mediatriz estará el centro de la segunda circunferencia.

Circunferencia tangente exterior a otra de radio conocido y a una recta dada:

Se traza un arco desde O_1 con la suma de los dos radios. Se traza una recta paralela a la dada a la distancia del radio dado. El corte de ésta con el arco anterior es el centro de la circunferencia pedida. Para hallar el punto de tangencia, se unen los dos centros.

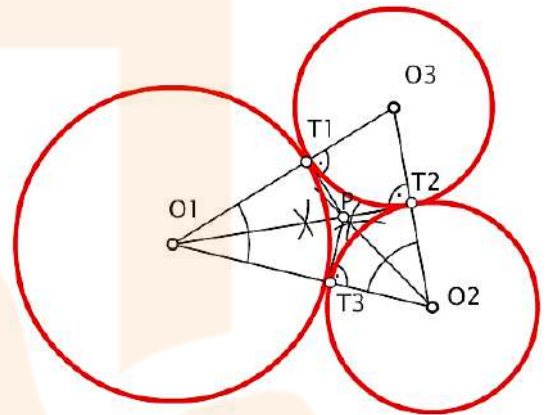


Circunferencia tangente interior a otra de radio conocido y a una recta dada: El procedimiento es similar al del caso anterior, pero en lugar de sumarse los radios para construir el arco, se restan.



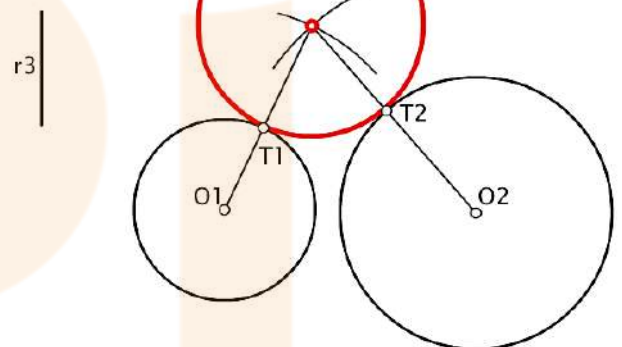
Trazar 3 circunferencias tangentes entre sí, conociendo sus centros

Unir los tres centros, formando un triángulo. Hallar las bisectrices de dos de los ángulos, cuyo cruce determina P . Trazando perpendiculares a los tres lados del triángulo que pasen por P , hallamos los puntos de tangencia T_1 , T_2 y T_3 .



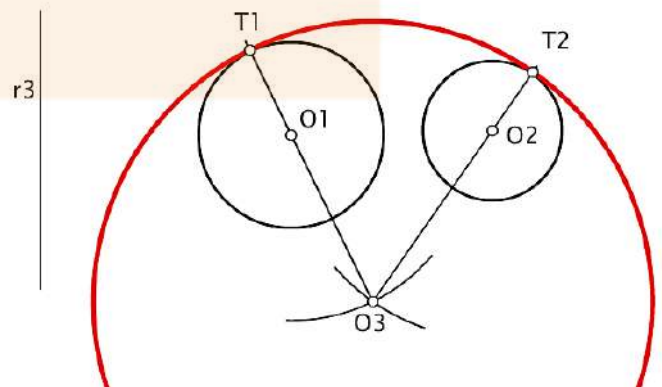
Hallar una circunferencia tangente a otras dos dadas, conociendo su radio.

Desde O_1 y O_2 , se trazan arcos con la suma del radio de cada circunferencia más el radio dado r . El corte de ambos arcos determina el centro de la circunferencia buscada. Uniendo O_1 y O_2 con O_3 , hallamos los puntos de tangencia T_1 y T_2 .



Hallar una circunferencia tangente interior a dos circunferencias dadas, conocido su radio

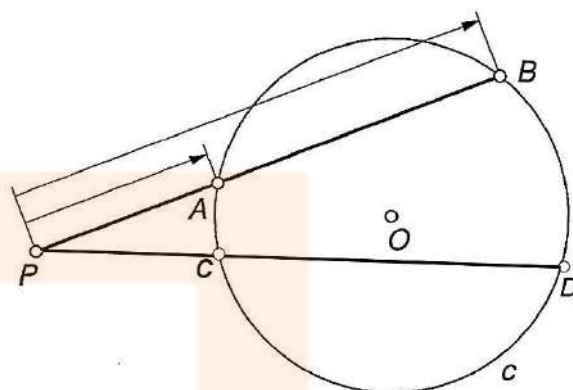
Desde O_1 y O_2 , trazar arcos con la diferencia del radio dado con el radio de cada circunferencia. El corte de ambos arcos no da O_3 . Uniendo O_3 con O_1 y O_2 y prolongándolos, los cortes con la circunferencia nos da los puntos de corte M y N .



Tema 3.- POTENCIA. APLICACIÓN A LOS PROBLEMAS DE TANGENCIAS

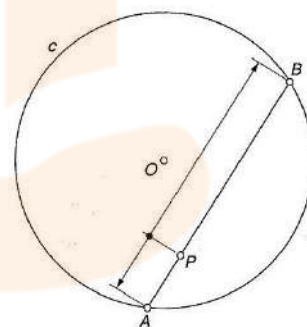
Con el estudio de esta relación matemática, que se apoya en la proporcionalidad inversa, desarrollaremos casos de tangencia que no se vieron en 1º de Bachillerato. Normalmente, cuando nos dan el radio de la circunferencia tangente se resuelve de la forma vista en los distintos procedimientos del tema anterior. Cuando nos dan el punto de tangencia, mediante potencia.

Potencia de un punto respecto de una circunferencia: si desde un punto P trazamos secantes a una circunferencia, el producto de distancias de dicho punto a los de intersección de cada secante es una constante. Es decir, que si designamos estos puntos como A, B y C, D, se cumple que $p = PA \times PB = PC \times PD = K$ (constante). En otras palabras, **cualquier recta tangente o secante a la circunferencia que tracemos desde P mantendrá la misma proporción en las distancias desde el punto a los puntos de corte con la circunferencia.**



-Si el punto P es **exterior** a la circunferencia, la potencia es **positiva**, ya que los dos segmentos están orientados en el mismo sentido.

-Si el punto P es **interior**, la potencia será **negativa**, ya que tienen diferentes sentidos.

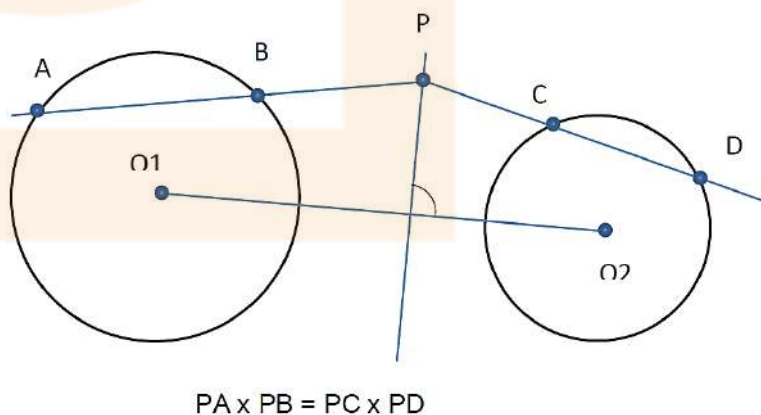


-Si el punto P **pertenece** a la circunferencia, la potencia es igual a 0, dado que uno de los dos segmentos vale 0.

En el caso de la **potencia positiva**, podemos tomar la tangente como secante extrema.

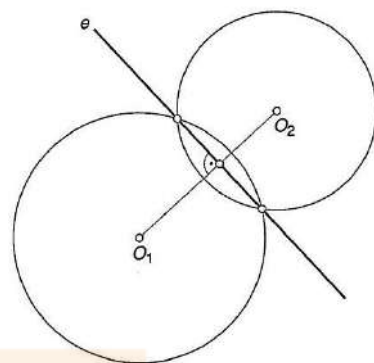
Eje radical de dos circunferencias

Una vez establecido el concepto de potencia respecto a una circunferencia, si tomamos dos o más circunferencias, habrá puntos que tengan la misma potencia respecto a las dos. Estos puntos pertenecerán a lo que se denomina **eje radical** de las dos circunferencias, que podemos definir como "el lugar geométrico de todos los puntos del plano que tienen la misma potencia respecto de las circunferencias", y es siempre una **recta perpendicular** a la que une los centros de las circunferencias.

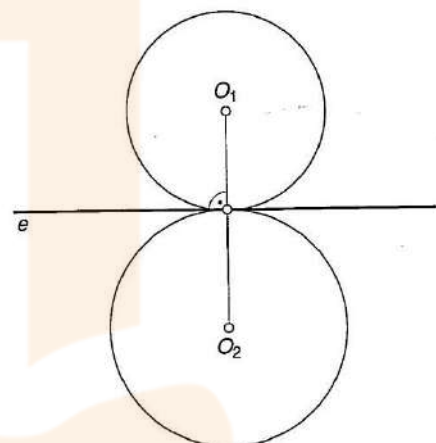


Determinación del eje radical: según las posiciones que ocupen las circunferencias entre sí, su eje radical queda definido de forma diferente:

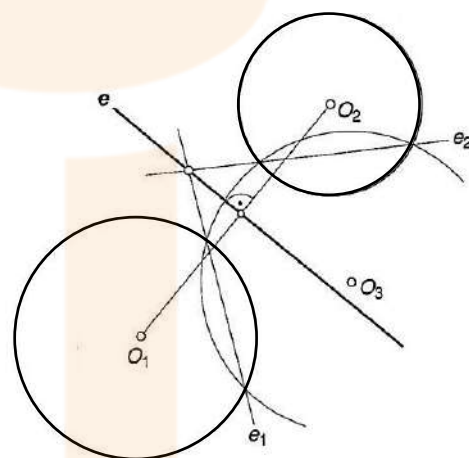
-Eje radical de dos circunferencias secantes: Se halla trazando la recta secante común a ambas circunferencias



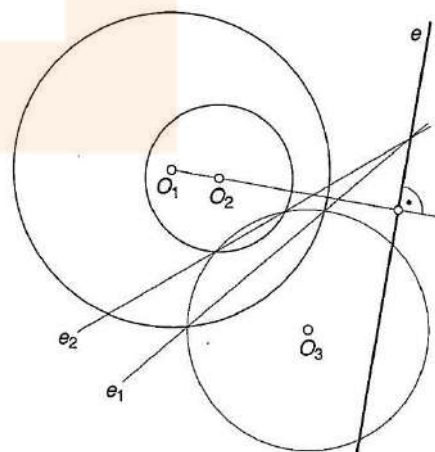
-Eje radical de dos circunferencias tangentes: se halla trazando la recta tangente común a ambas circunferencias, que es siempre perpendicular al segmento que determina la unión de sus dos centros.



-Eje radical de dos circunferencias exteriores: se traza una circunferencia auxiliar que corte a las dos circunferencias dadas (cualquiera que no tenga el centro alineado con los de las circunferencias dadas). Se determinan los ejes radicales de cada una con la auxiliar. Por donde se cortan los dos ejes radicales, se traza una perpendicular a la recta que une los centros de las circunferencias.

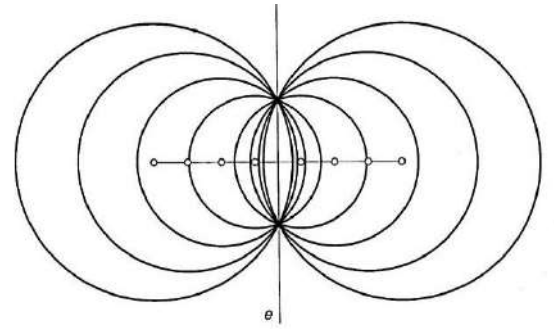


-Eje radical de dos circunferencias interiores: se procede de forma similar

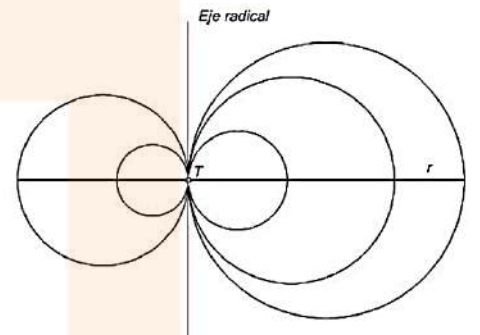


Se llama **haz coaxial** al conjunto de circunferencias que tienen el mismo eje radical.

-Se denomina **haz secante** al conjunto de circunferencias secantes con el mismo eje radical. Lógicamente, tienen todos sus centros alineados en la recta perpendicular a la secante

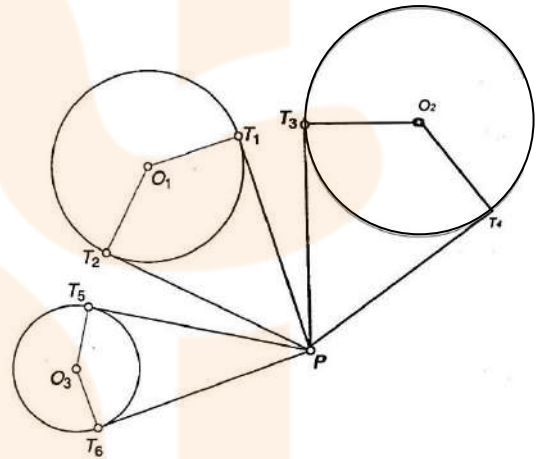


-En un **haz tangente**, todas las circunferencias comparten el mismo eje radical, que pasa por el punto de tangencia T . Todas las circunferencias que tengan su centro sobre la recta r y pasen por el punto T , pertenecerán a este haz tangente.



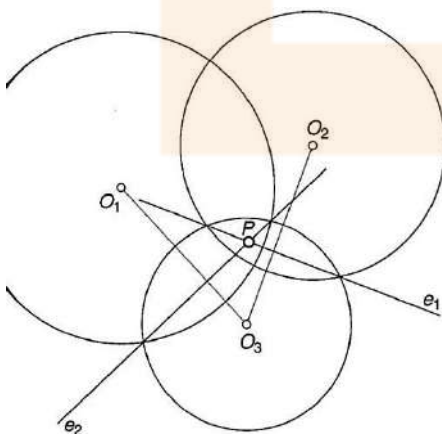
Centro radical de tres o más circunferencias

Dadas tres circunferencias de centro O_1 , O_2 y O_3 , se llama **centro radical** al punto P que tiene la misma potencia respecto de las tres circunferencias. El centro radical será el punto de intersección de los ejes radicales de las circunferencias tomadas de dos en dos. Si se trazan las tangentes a las circunferencias desde este punto, la distancia hasta los puntos de tangencia de cada una de las circunferencias es siempre la misma.

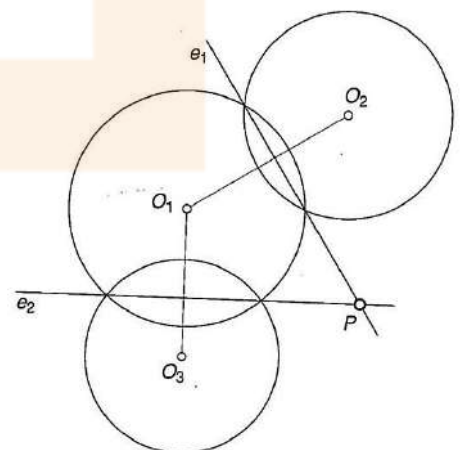


Las tangentes trazadas hacia tres circunferencias desde su centro radical definen puntos de tangencia equidistantes entre sí

Determinación del centro radical: como regla general, el centro radical será el punto de intersección de los ejes radicales de las circunferencias tomadas dos a dos, pero según como estén colocadas entre sí, será más o menos inmediata su determinación.

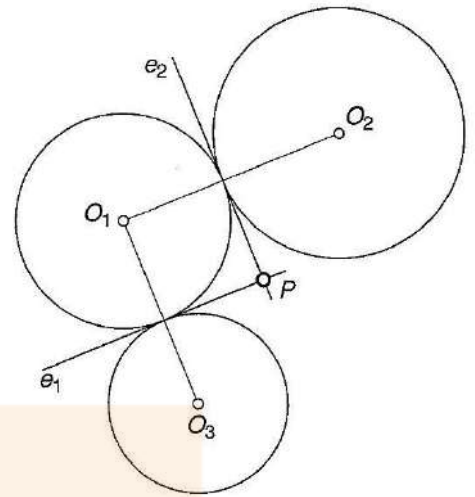


Centro radical de tres circunferencias secantes entre sí

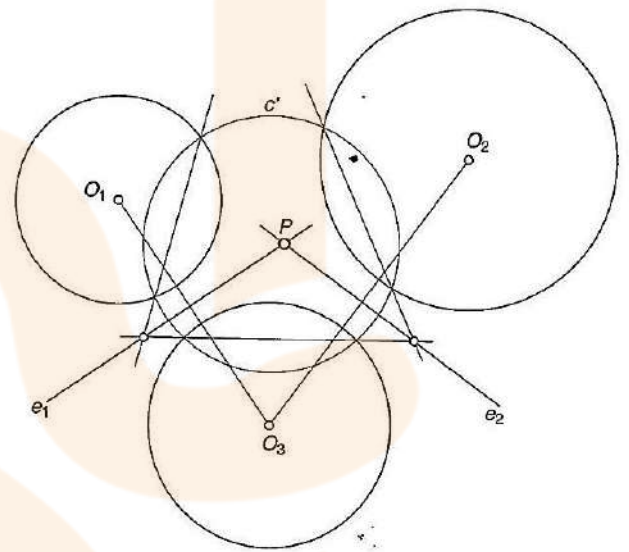


Centro radical de tres circunferencias secantes entre sí dos a dos

Centro radical de tres circunferencias tangentes entre sí



-Centro radical de tres circunferencias exteriores:
trazamos una circunferencia auxiliar que corte a las tres dadas. Determinamos dos ejes radicales de dos de las circunferencias dadas, y donde se corten éstas obtenemos el centro radical.

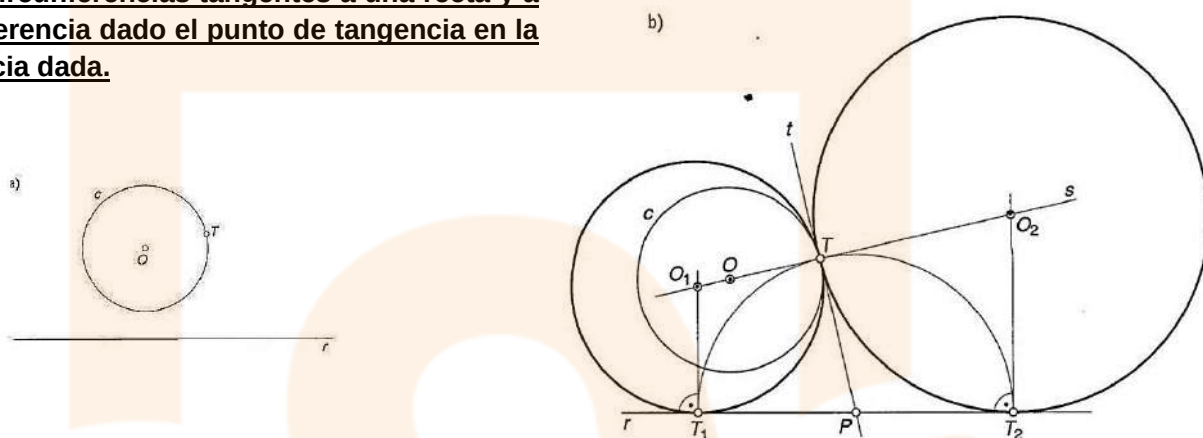


Aplicación de la potencia a la resolución de problemas de tangencia

Premisas: Para resolver los ejercicios de tangencia mediante potencia, hay que recordar en todo momento las siguientes premisas:

- -Los centros de las circunferencias tangentes están siempre alineados con el punto de tangencia; por tanto, hay que unir siempre el centro con el punto de tangencia
- -Los radios que contienen los puntos de tangencia son siempre perpendiculares a la recta de tangencia.
- -Los puntos de tangencia están siempre a la misma distancia del centro radical.

Hallar dos circunferencias tangentes a una recta y a otra circunferencia dado el punto de tangencia en la circunferencia dada.



-Unimos el punto de tangencia con el centro de la circunferencia dada. Sobre esa recta estarán los centros de las circunferencias solución, *dado que los centros de las circunferencias tangentes están siempre alineados con el punto de tangencia.*

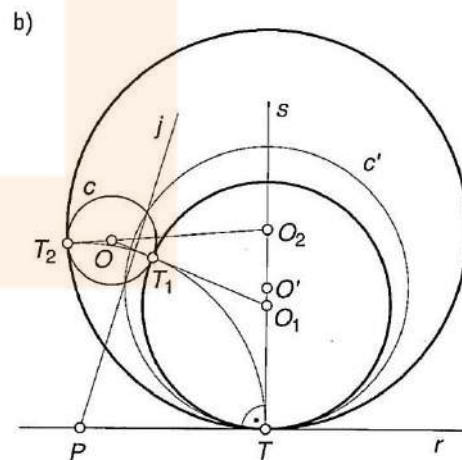
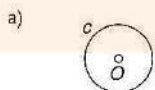
-Trazamos el **eje radical** t , perpendicular a la recta anterior, y donde corte a la recta dada obtendremos el **punto potencial** P (centro radical).

-Haciendo centro en P y radio PT , dibujamos un arco que corta a la recta r en T_1 y T_2 , puntos de tangencia de las circunferencias con la recta. Trazamos por estos puntos las perpendiculares a r (*dado que los radios que contienen los puntos de tangencia son siempre perpendiculares a la recta de tangencia*), que en su corte con s determinan los centros de las circunferencias. Solo resta dibujarlas con radios O_1T_1 y O_2T_2 .

Circunferencias tangentes a una recta y a una circunferencia, dado el punto de tangencia T de la recta

-Trazamos una perpendicular a r desde el punto de tangencia, donde van a estar los centros de las circunferencias buscadas. Nos servimos de una circunferencia auxiliar que corte a la dada y sea tangente a r en T . La recta r será así el eje radical de ésta y las circunferencias solución.

-Trazamos el eje radical j entre la circunferencia dada y la auxiliar, y obtenemos también en su corte con r el punto potencial P . Con centro en P y radio PT hacemos un arco que determina los puntos de tangencia T_1 y T_2 sobre la circunferencia dada.



Uniendo estos puntos con el centro de la circunferencia dada, y prolongando hasta la perpendicular desde T , obtenemos los centros de las circunferencias solución, que se trazan con radios O_1T_1 y O_2T_2 .

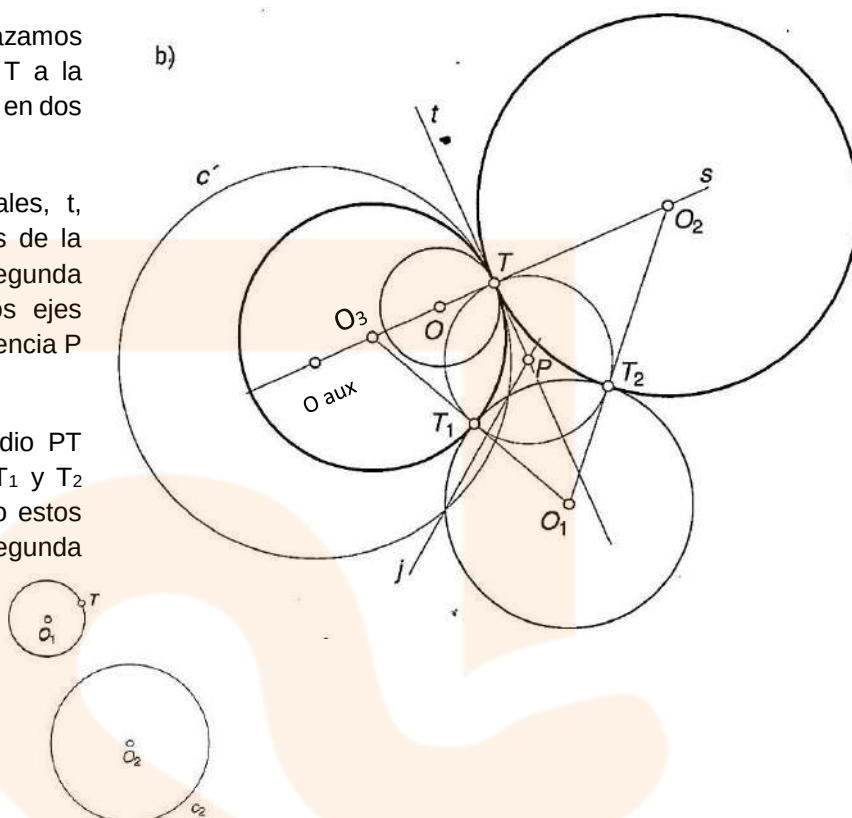
Circunferencias tangentes a dos circunferencias dado el punto de tangencia en una de ellas

-Dibujamos la recta s que une el centro de la primera circunferencia con el punto de tangencia: en esta recta estarán situados los centros de las circunferencias buscadas, ya que, como en casos anteriores, los centros de las circunferencias tangentes han de estar alineados con el punto de tangencia.

-Con centro en la recta OT , Trazamos una circunferencia auxiliar tangente por T a la primera circunferencia y que corte a la otra en dos puntos.

-Obtenemos los dos ejes radicales, t , tangente por T y j , en las intersecciones de la circunferencia auxiliar y la segunda circunferencia. Donde se corten los dos ejes radicales, t y j , obtenemos el punto de potencia P (centro radical).

-Haciendo centro en P y con radio PT determinamos los puntos de tangencia T_1 y T_2 sobre la segunda circunferencia. Uniendo estos puntos con el centro de la segunda circunferencia, O_1 , y prolongando hacia s , obtenemos los centros buscados, O_2 y O_3 . Solo nos resta trazar las circunferencias con radios O_2T y O_3T .



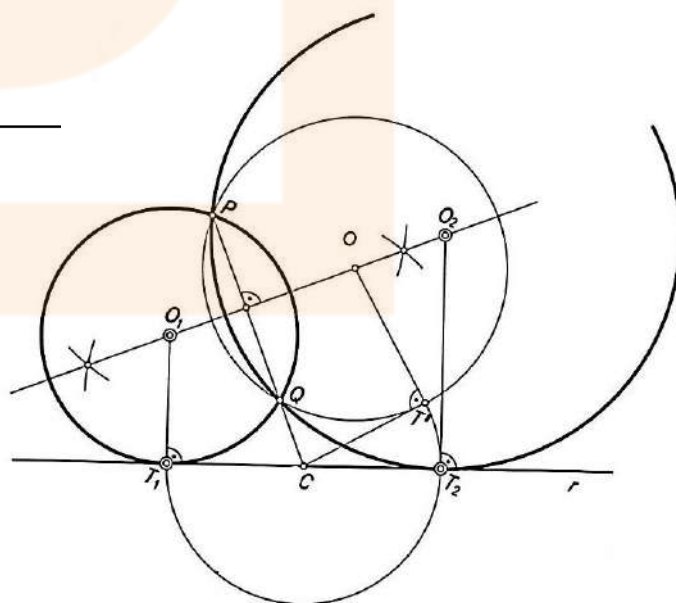
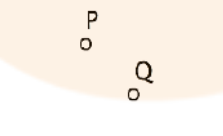
Planteamiento

Circunferencias tangentes a una recta y que pasen por dos puntos P y Q

Se trata de hallar los puntos de tangencia de las circunferencias buscadas con la recta r , por lo que habrá que hallar el centro radical entre estas circunferencias y r . Además, todas las circunferencias que pasan por los puntos P y Q han de tener su centro en la mediatriz del segmento que los une y como eje radical esa misma recta PQ . Por otra parte, el eje radical de una circunferencia y una recta es la propia recta. Por tanto, el punto C , donde la recta PQ corta a r , es el centro radical de todas las circunferencias que pasan por P y Q y la recta r . En definitiva:

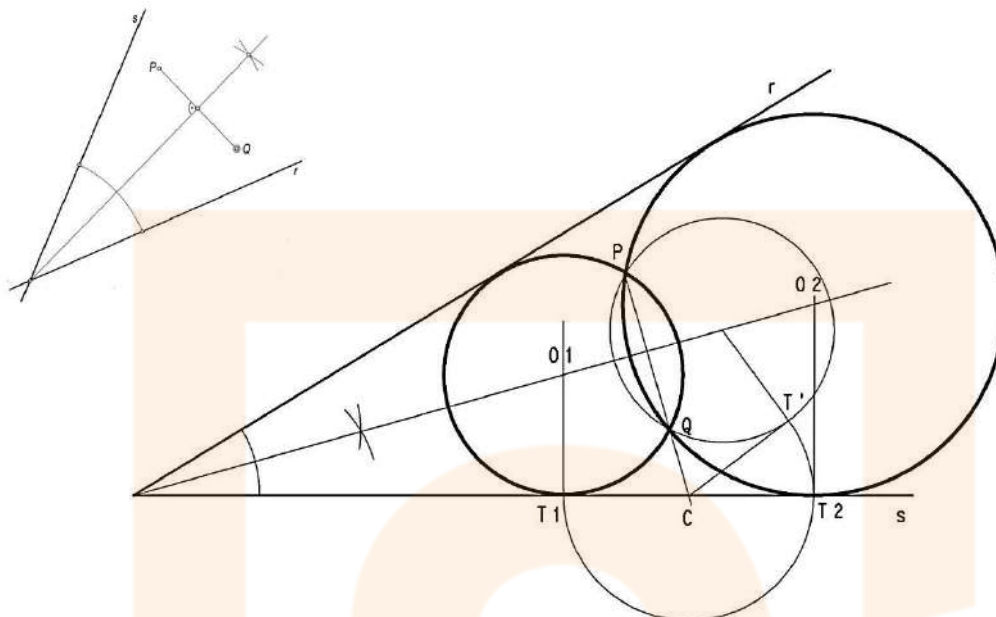
-Unimos P y Q y prolongamos hasta r , obteniéndose el punto C , centro radical de las circunferencias. Trazamos la mediatriz del segmento PQ , donde estarán los centros de las circunferencias buscadas.

-Dibujamos una circunferencia auxiliar con centro en esa mediatriz que pase por P y Q . Hallamos la tangente T' a esa circunferencia auxiliar desde el punto C . Haciendo centro en C y radio CT' , obtenemos sobre la recta r los dos puntos de tangencia buscados, T_1 y T_2 . Solo resta trazar perpendiculares a r por estos puntos de tangencia para hallar los centros en sus cortes con la mediatriz de PQ .



Trazar las circunferencias tangentes a dos rectas r y s que se cortan y pasan por un punto P dado

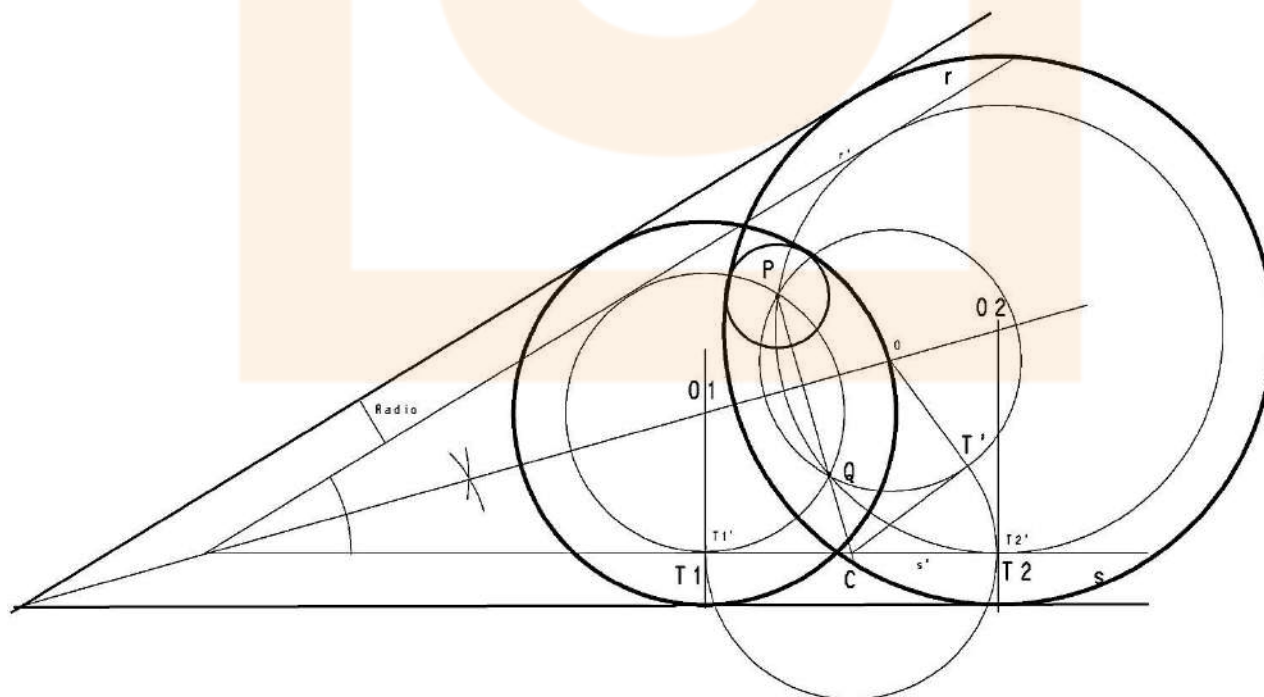
Los centros de las circunferencias buscadas van a estar en la bisectriz del ángulo que forman las rectas. Si estas circunferencias pasan por P, pasarán también por un punto Q simétrico al anterior respecto a la bisectriz. El problema se convierte así en el caso anterior.



Circunferencias tangentes a dos rectas r y s que se cortan y a una circunferencia dada

Este problema tiene dos soluciones, las circunferencias exteriores a la dada y las interiores, y se resuelve de forma parecida a los dos anteriores.

-Para resolverlo, se aplica una “*dilatación negativa*” (o lo que es lo mismo, una *contracción*) de la circunferencia igual a su radio, con lo que la convertimos en un punto, su propio centro P. Y para mantener la equivalencia con los datos iniciales, las rectas r y s se dilatan también negativamente la misma magnitud (en realidad, para operar, solo hace falta dilatar una). De esta forma, el problema se convierte en el caso anterior de hallar las circunferencias tangentes a dos rectas que pasan por un punto. Solo hay que, una vez resuelto, prolongar las rectas que unen los centros de las circunferencias obtenidas con los puntos de tangencia hasta la recta original, para hallar los puntos de tangencia T_1 y T_2 .



A detailed geometric diagram illustrating the intersection of two cylinders. The diagram shows the development of a cone, with various points and lines labeled. Key labels include 'radio' (radius), 'T1', 'T1'', 'T2', 'T2'', 'T3', 'T4', 'P', 'Q', 'O1', 'O', and 'O2'. The diagram demonstrates the construction of the intersection curve and the resulting shape of the cone's surface.

Como hemos visto en casos anteriores, todas las circunferencias que pasen por los puntos P y Q han de tener sus centros en la mediatriz del segmento PQ y su eje radical es la misma recta PQ.

-En consecuencia, la potencia de ese punto respecto a todas ellas es la misma, y la longitud del segmento CT_1 también (los puntos de tangencia T_1 y T_2 se hallan, como ya hemos visto, trazando perpendiculares a un radio de la circunferencia dada que pasen por C).

TEMA 4.- TRANSFORMACIONES ANAMÓRFICAS

Las transformaciones geométricas son una parte de la **geometría proyectiva**, que estudia las propiedades geométricas que se obtienen a partir de una proyección. Esta geometría se basa en determinadas operaciones que se realizan sobre formas geométricas concretas, el estudio de diversas transformaciones y la introducción sistemática de los elementos geométricos situados en el infinito. El concepto de **proyectividad** es el fundamento de los diferentes sistemas de representación (diédrico...) que componen la **geometría descriptiva**, que más adelante estudiaremos. La geometría proyectiva se distingue de la **geometría métrica o euclídea**, que estudia las operaciones y las transformaciones que conservan las características métricas, como el paralelismo, los ángulos, el área, la distancia... Las transformaciones isométricas e isomórficas corresponden a la geometría métrica, Las anamórficas, a la proyectiva.

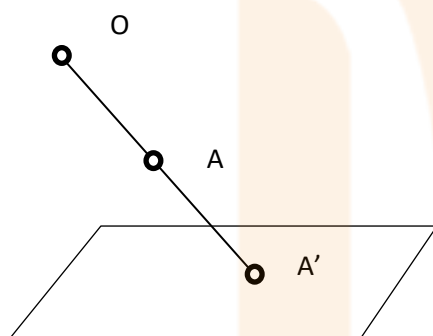
Algunos fundamentos

-Se denominan **elementos dobles o invariantes** a aquellos a los que al aplicarles una transformación se transforman en sí mismos, es decir, que el elemento original y su homólogo coinciden o, en otras palabras, mantienen el mismo lugar geométrico. Elementos dobles serían, por ejemplo el centro de simetría en una simetría central, el eje de simetría en una axial o el centro de giro en un giro.

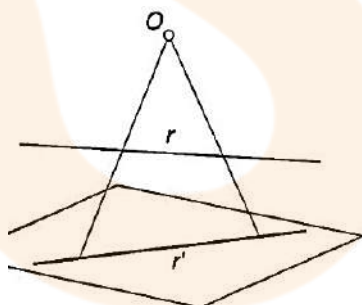
-**Proyectar un punto A** desde otro punto O consiste en trazar la recta a que pasa por ambas, y que recibe el nombre de **recta o rayo proyectante**. Generalmente, se denota con la misma letra que el punto, pero en minúscula.

Proyectar una recta r desde un punto O que no pertenece a ella, consiste en trazar el plano α definido por ambos, y denominado plano proyectante. La proyección de la recta r desde O es r' , y la obtenemos al trazar el plano que pasa por el punto O y la recta r, y cuya intersección con el plano de proyección es la recta r' .

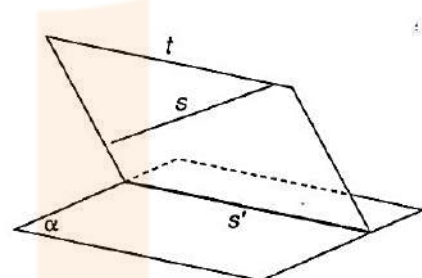
La proyección de la recta s desde la recta t se determina por la intersección del plano definido por t y s con el de proyección, y es s' .



Proyección de un punto desde un punto sobre un plano



Proyección de una recta desde un punto a un plano



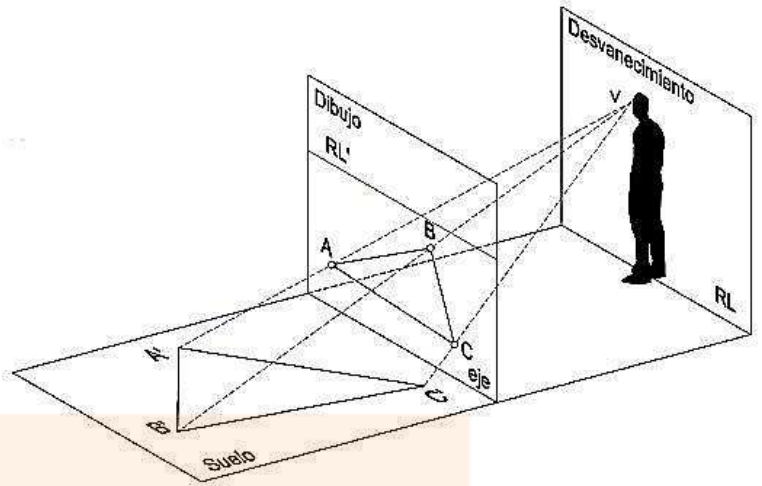
Proyección de una recta desde otra recta sobre un plano.

4.1. HOMOLOGÍA

En una **homología**, a cada uno de los puntos y rectas de una forma plana inicial le corresponden, respectivamente, un punto o una recta de su forma homóloga, cumpliendo unas determinadas condiciones que a continuación veremos. La homología puede ser en el espacio (la trataremos en el tema correspondiente a la perspectiva cónica) o en el plano (homología plana).

Homología en el espacio

Es una transformación proyectiva cuyo centro es un punto propio V . Si cortamos la radiación de vértice V mediante dos planos, el del suelo y el del dibujo, como vemos en la figura, obtendremos sobre cada uno de ellos una sección plana ABC y $A'B'C'$ respectivamente.



Ambas secciones son figuras homológicas en el espacio, y cumplen las siguientes condiciones:

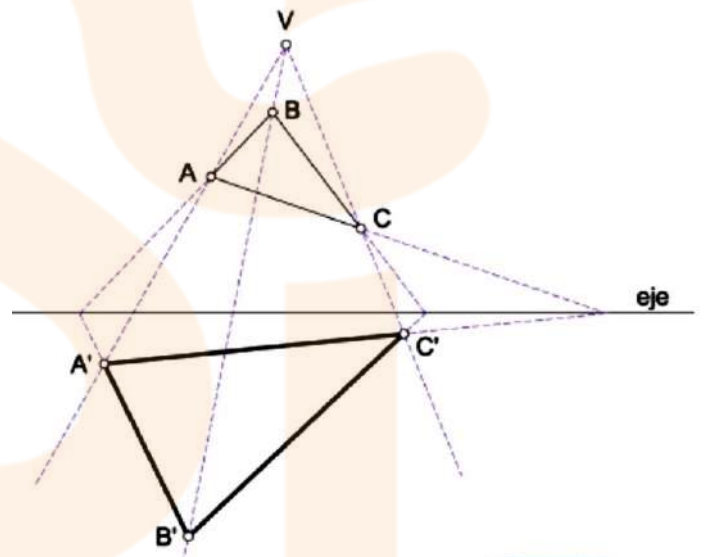
- Todos los rayos que parten de V generan puntos homólogos sobre cada uno de los planos ($A-A'$, $B-B'$...)

- Todos los puntos del eje de homología (en este caso, la intersección entre el plano del dibujo y el del suelo, son **puntos dobles**.

- En esta homología no se conservan algunas propiedades métricas como el paralelismo o la perpendicularidad, ni las medidas de segmentos y ángulos.

Homología plana

Al proyectarse una homología sobre un plano tenemos una homología plana o de dos dimensiones. Por ejemplo, si en la figura anterior abatimos el plano del dibujo respecto a su intersección con el plano del suelo, las dos formas planas serán **coplanarias** (es decir, que están en un mismo plano), y ambas definen la homología plana de la siguiente figura:



Entre ambas figuras se cumplen las siguientes relaciones:

- Los **puntos homólogos** están alineados con el **centro de homología** (que se suele denominar O ó V)

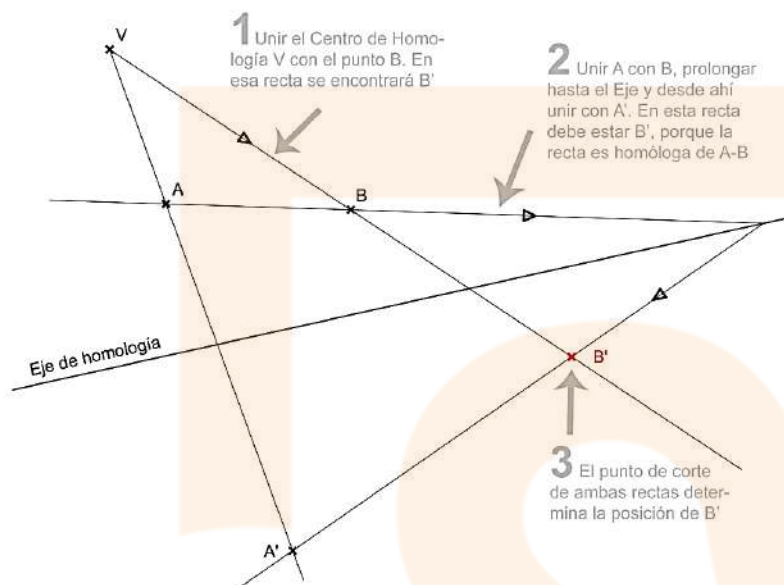
- Las **rectas homólogas** se cortan en un mismo punto (homólogo de sí mismo, es decir, punto doble), situado en el **eje de homología** (que también es doble)

Determinación: Una homología queda determinada si conocemos:

- El centro, el eje y un par de puntos homólogos
- El centro, el eje y un par de rectas homólogas
- Dos triángulos homológicos

El ejemplo más sencillo: dados un par de puntos homólogos A-A', un Eje de Homología, un Centro de Homología V y el punto B, se pide: Determinar el punto homólogo del B dado.

Ya hemos dicho que "los puntos homólogos están alineados con uno llamado centro de homología". Por tanto, el punto homólogo de B debe estar en la recta que une el centro V con B. Y atendiendo a la segunda parte de la definición "Rectas homólogas se cortan en puntos de una recta llamada eje de homología", la recta A-B debe cortarse con su homóloga en el Eje de Homología.



Así que unimos A con B y prolongamos hasta el Eje. Desde ahí unimos con A' y sabemos que en esa recta va a estar B'. La intersección de las dos rectas anteriores determina la posición del punto B' homólogo de B.

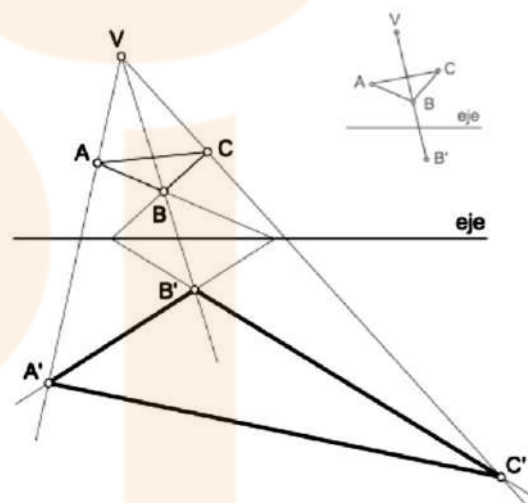
Obtener la figura homóloga a la dada dados el vértice, el eje y el punto homólogo de uno de la figura

Si nos dan el centro O, el eje e y el punto B y su homólogo B', y tenemos que hallar la figura homóloga de ABC:

-Unimos los puntos ABC con el centro de homología, pues en estas rectas, prolongadas, van a estar los puntos homólogos.

-Prolongamos las rectas AB y BC hasta que corten al eje, ya que en estos puntos se cortarán sus homólogos A'B' y B'C'.

-Donde AB corta con el eje unimos con B', que ya tenemos, obteniéndose en el corte con la recta de unión de V con A el punto A'. De la misma forma procedemos para hallar C'. Uniendo los puntos obtenemos la figura.



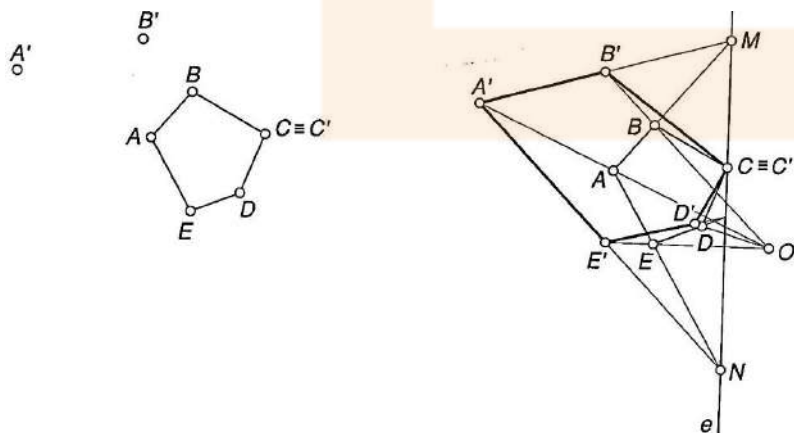
Obtención de la figura homóloga a la dada conocidos tres puntos homólogos:

-Determinamos el centro de homología, que estará en la intersección de las rectas AA' y BB'.

-Como el punto C es doble, pertenece al eje. La intersección de AB con A'B' nos da el punto M, también doble y perteneciente también al eje: uniendo C con M obtenemos éste.

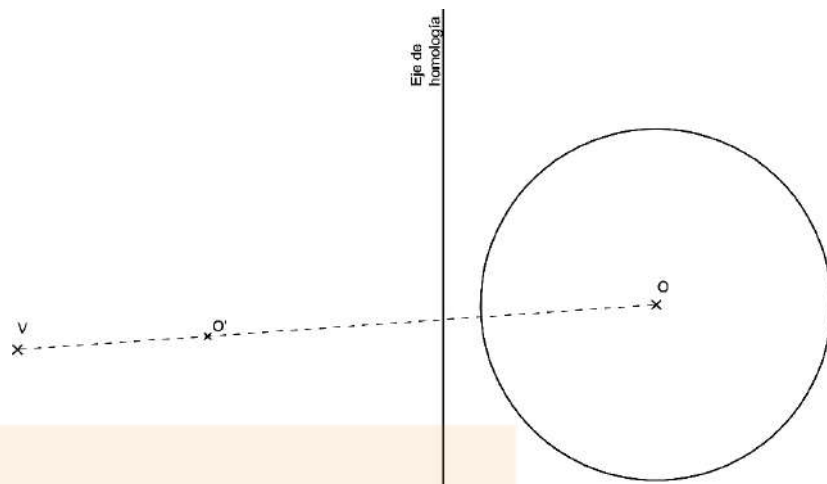
-Unimos los vértices restantes, E y D, con O, pues en esa recta estarán sus homólogos.

-Por último, buscamos puntos dobles en el eje para determinar las rectas homólogas. Prolongando AE sobre el eje, obtenemos N. Unimos N con A', y su corte con OE nos da E'. Operamos igual para obtener D'.



La circunferencia en homología:

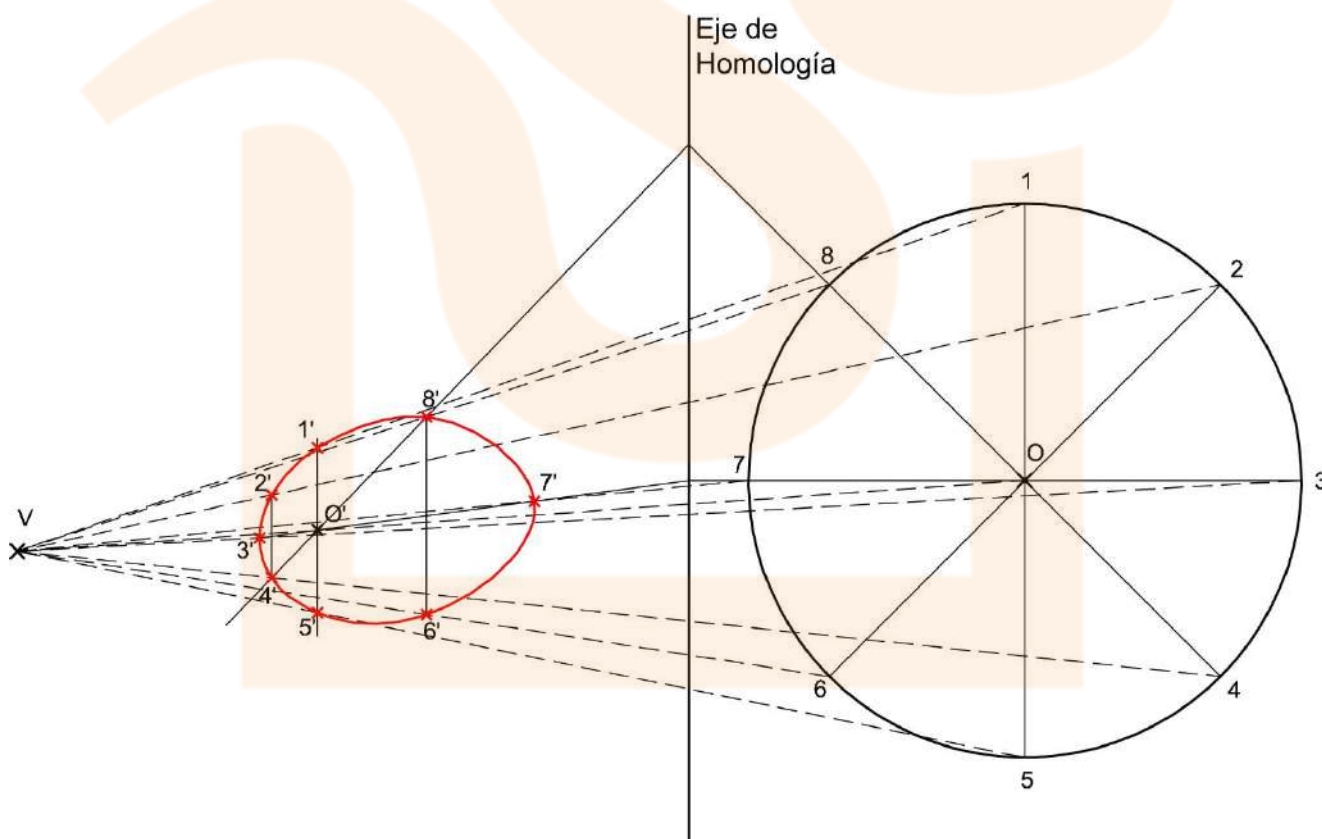
Consideremos el caso de que nos dan una homología definida por el Eje de Homología, el Centro Homología y un par de puntos homólogos, en este caso el centro de la circunferencia y su homólogo.



El método más sencillo para dibujar la figura homóloga de la circunferencia es dividiendo la circunferencia en 8 partes iguales, utilizando un diámetro paralelo al eje de homología, otro perpendicular y los dos últimos formando 45° .

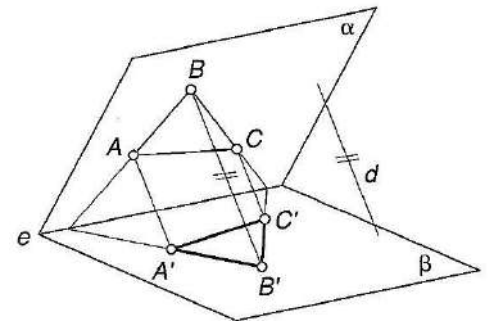
El diámetro 1-5, puesto que es paralelo al eje, también lo será su homólogo desde el punto O' . Al encontrar el diámetro homólogo de 4-8, mediante paralelas al eje también podemos encontrar los puntos $2'$ y $6'$. Por último, encontrar el homólogo de 3-7.

Existen otras formas para encontrar ejes conjugados, el centro de la elipse, etc., pero por lo general, para el nivel de 2º de Bachillerato no serán necesarios.

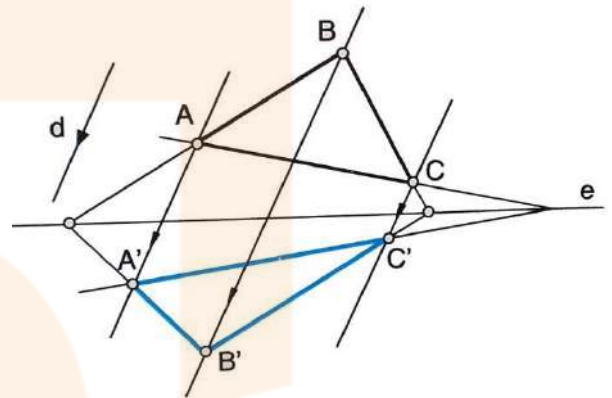


4.2 AFINIDAD

La afinidad es un caso particular de homología donde el centro de homología es impropio. Al estar el centro en el infinito, todas las rectas que unen los pares de puntos homólogos son paralelas, y por tanto paralelas a una **dirección de afinidad** d . Esta dirección de afinidad puede ser oblicua, perpendicular o paralela al eje



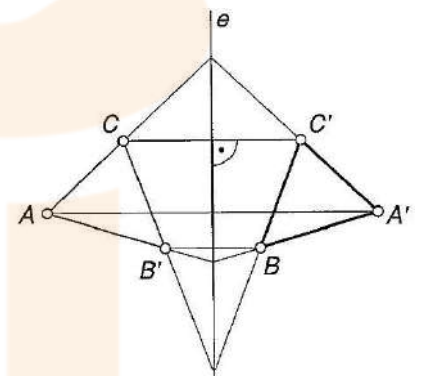
En la afinidad no existe centro de homología: el eje de homología se convierte en **eje de afinidad** y el centro de homología se sustituye por la **dirección de afinidad**.



Dos figuras planas son afines si se cumple que:

- Los puntos afines están alineados según la dirección de afinidad
- Las rectas afines se cortan en puntos del eje de afinidad

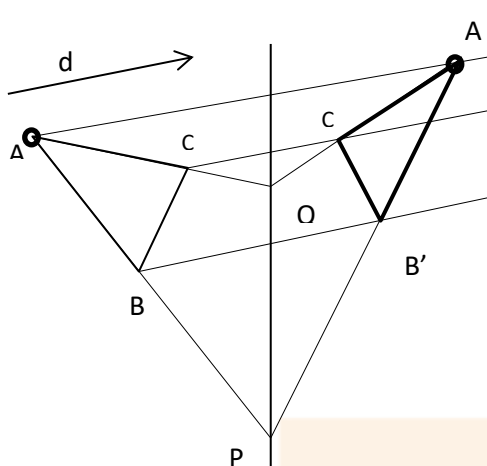
La **simetría axial** es un caso particular de afinidad, en la que se cumple que la dirección de afinidad es perpendicular al eje de afinidad, y las parejas de puntos afines están a la misma distancia del mismo.



Determinación de una afinidad

Una afinidad queda determinada si conocemos:

- El eje y dos puntos afines, ya que la recta que los une determina la dirección de afinidad
- Un punto del eje y un par de rectas afines
- Dos figuras afines



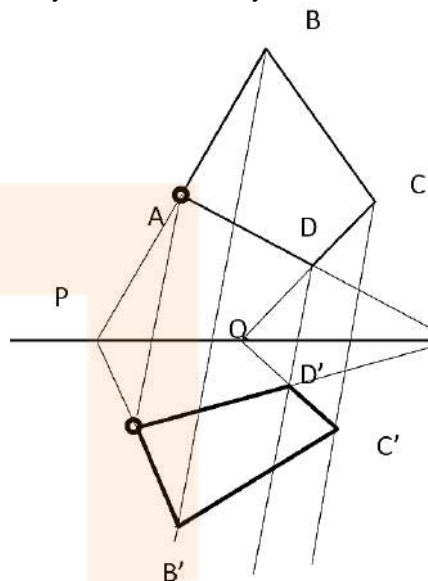
Construir la figura afín del triángulo ABC dados el eje de afinidad y un punto afín A'

-Prolongamos el segmento AB hasta cortar al eje en el punto doble P. Unimos P con A'. Prolongamos AC hasta el eje, obteniendo Q, que unimos con A'. Trazamos las paralelas a la dirección de afinidad desde B y C, que en su corte con PA y PQ nos dan B' y C'.

Construir la figura afín de un cuadrilátero dados el eje de afinidad y un punto afín:-

Trazamos paralelas a AA' desde todos los vértices. Prolongamos

AB hasta cortar el eje en P. Unimos P con A'. B' estará en el corte de la paralela trazada desde B y PA'. Prolongamos AD, obteniendo el punto R sobre el eje, y unimos con A', obteniéndose D', en el corte con la paralela desde D. Los nuevos puntos homólogos obtenidos se pueden ir utilizando de la misma forma que se ha hecho con A'.



Obtener la figura afín de un pentágono dado el eje y un par de puntos afines

-Por todos los vértices trazamos rectas paralelas a AA', dirección de afinidad

-Prolongamos segmentos del pentágono dado hasta que corten al eje, obteniéndose los puntos dobles de esas rectas. Los nuevos puntos homólogos obtenidos se pueden ir utilizando de la misma forma que se ha hecho con A'.

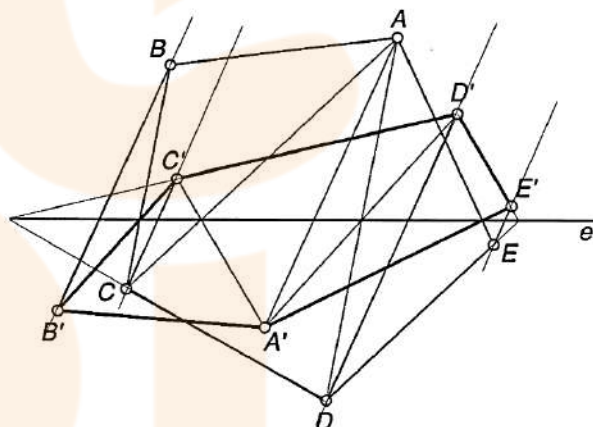
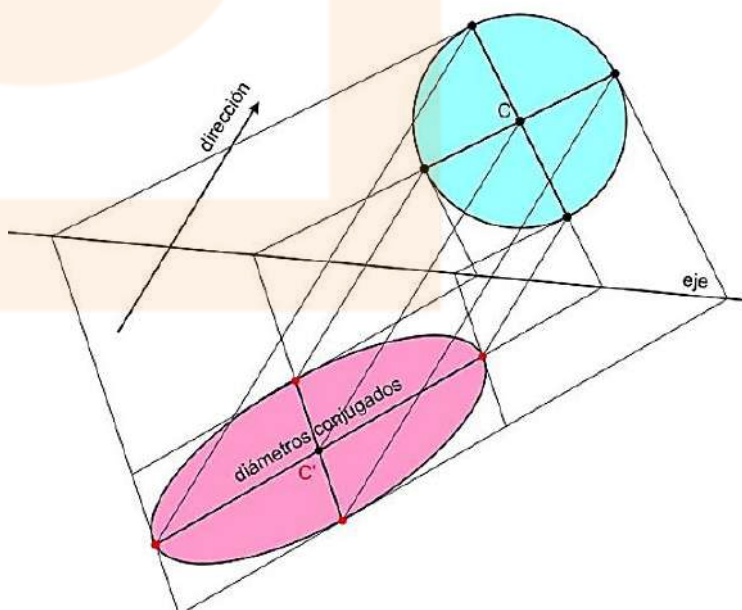
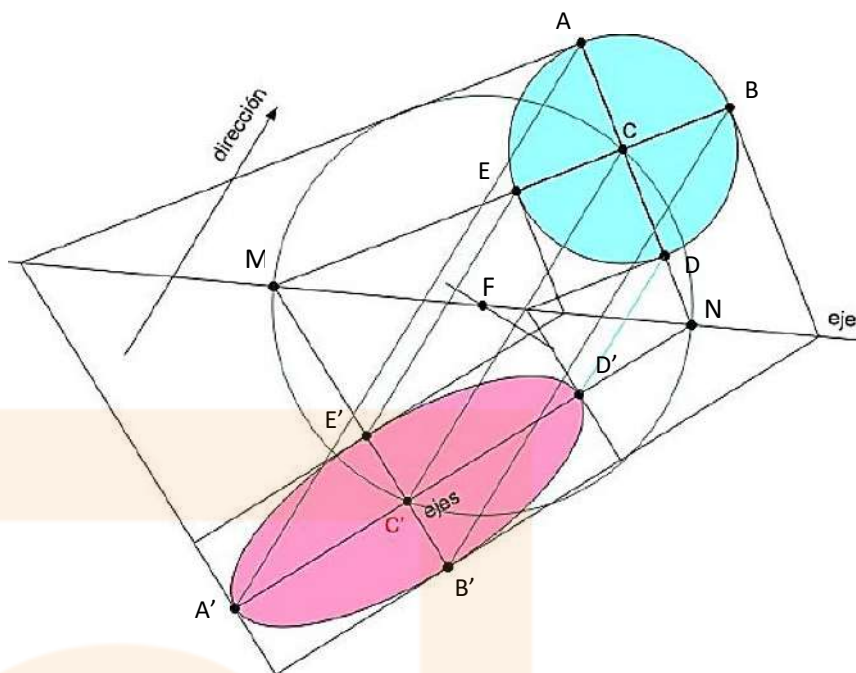


Figura afín de una circunferencia

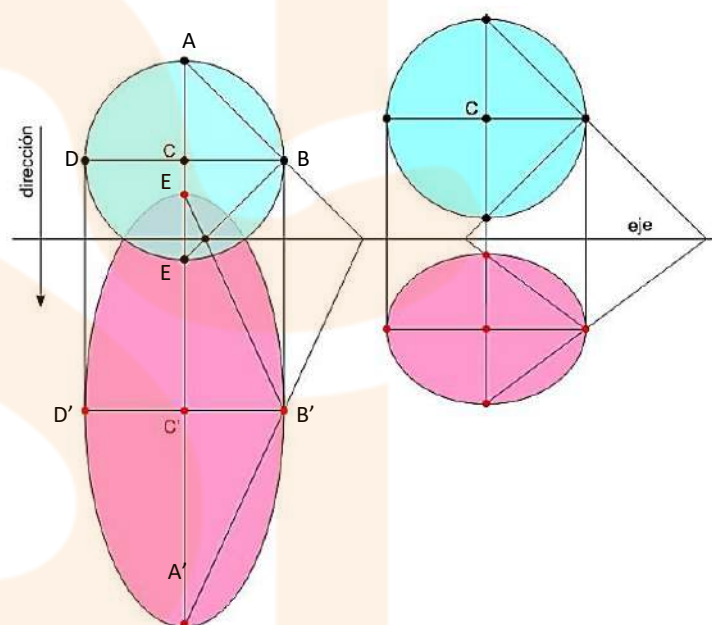
Como se ha indicado antes, la afín de una circunferencia siempre es una elipse. Para encontrarla, basta con hallar los afines de dos diámetros perpendiculares, que serán dos diámetros conjugados de la elipse. Así, si nos dan C y C':



Si además pretendemos conseguir que los diámetros conjugados de la elipse sean los ejes (diámetros conjugados perpendiculares) deberemos elegir los diámetros de la circunferencia de forma que ellos y los ejes de la elipse vean ambos el mismo arco capaz de 90° . Para ello, unimos los dos centros C - C' y hallamos la mediatriz de esta recta. En el corte de esa mediatriz con el eje (F), trazamos una circunferencia que pase por los dos centros C y C' . Los puntos de corte M y N con el eje nos determinan los ejes al unirlos con los centros.



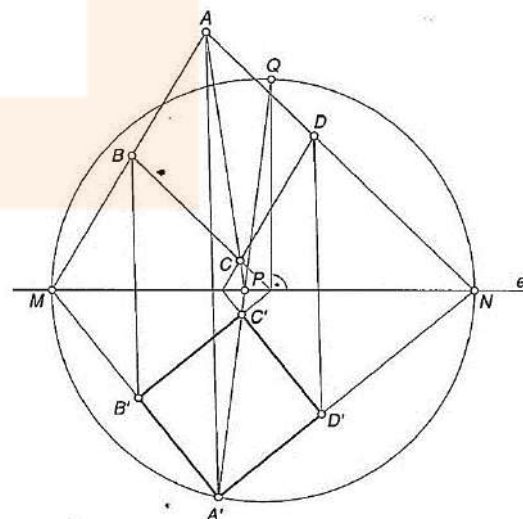
Si la afinidad es ortogonal, siempre podemos conseguir los ejes de la elipse tomando en la circunferencia un diámetro en la dirección de la afinidad y el otro en la dirección del eje:



La afin de una elipse siempre es otra elipse. Para encontrarla basta con aplicar la afinidad a un par de diámetros conjugados, que serán también diámetros conjugados en la elipse afín. En general, la afin de una curva cónica siempre es otra curva cónica del mismo tipo (elipse, parábola, hipérbola).

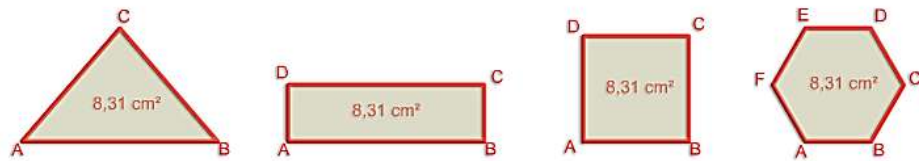
Transformación de un paralelogramo en un cuadrado, conociendo el eje e

-El ángulo que deben formar los lados de un cuadrado es de 90° . Operaremos con A , por lo que prolongamos los lados que lo forman hasta cortar al eje en M y N . Trazamos por debajo del eje el arco capaz de 90° de MN , pues sobre él estará A' . Para hallarlo, prolongamos la diagonal AC hasta el eje, obteniéndose P . Desde la prolongación de BC levantamos una perpendicular al arco capaz por arriba, que nos da Q . Uniendo Q con P y prolongando obtenemos A sobre el arco capaz de abajo. -Unimos A' con M y N , pues sobre estas rectas estarán dos de los lados del cuadrilátero. Desde los cortes de BC y CD con el eje trazamos paralelas a MA' y NA' respectivamente, lo que nos da los vértices B' C' y D' .

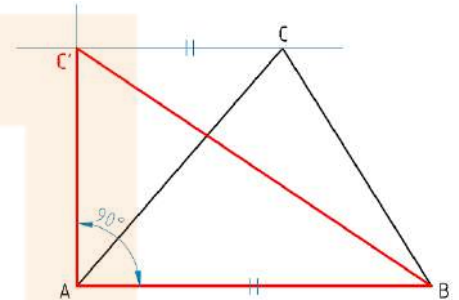


Tema 5.-EQUIVALENCIA

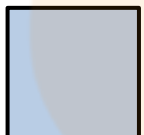
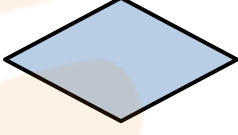
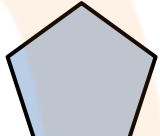
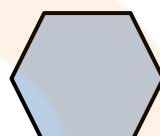
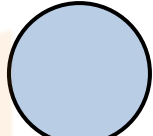
Dos figuras planas son equivalentes cuando tienen la misma superficie o área siendo de distinta forma geométrica. Sería el caso de las siguientes figuras: aunque tienen distinto número de lados, todos tienen la misma superficie.



Por ejemplo, estos dos triángulos son equivalentes porque tienen la misma base y la misma altura, y recordemos que el área de un triángulo es $b \times h / 2$



Para realizar equivalencias entre polígonos tenemos que tener claro la fórmula del área de cada uno de ellos:

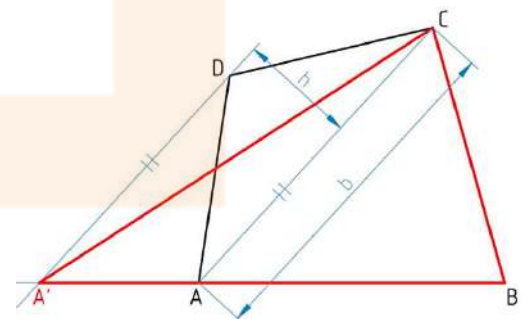
 Triángulo: $b \times h / 2$	 Cuadrado: l^2	 Rectángulo: $b \times h$	 Rombo: $D \times d / 2$
 Romboide: $b \times h$	 Pentágono: $\text{perímetro} \times \text{apotema} / 2$	 Hexágono: $\text{perímetro} \times \text{apotema} / 2$	 Círculo: πr^2

1.-Equivalencia y triangulación

Generalmente la equivalencia entre polígonos se determina mediante triangulación, esto es, descomponiendo el polígono origen en el menor número de triángulos posibles y calculando otro triángulo equivalente de manera que un vértice se suprima, así la figura resultante tendrá un lado menos, pero ocupará la misma superficie.

Así, para construir un triángulo equivalente a un cuadrilátero:

1.- Tenemos el cuadrilátero ABCD. Trazamos la diagonal AC, con lo que se descompone la figura en dos triángulos. Elegimos uno de ellos (ADC en este caso), y trazamos otro equivalente, con la misma base AC, y con su misma altura (h). Para ello, dibujamos una paralela a AC que pase por el vértice superior D y prolongamos AB, hallándose el vértice A'. Obtenemos así el triángulo A'CB, equivalente al cuadrilátero.



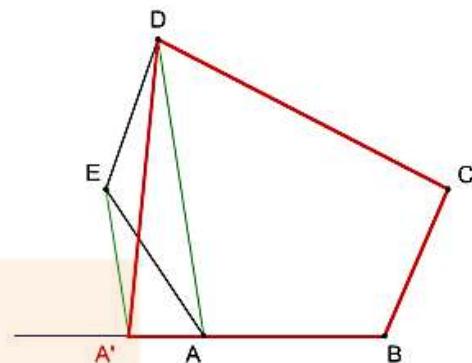
Polígono equivalente a otro dado con un lado menos.

Este es el método general para poder dibujar polígonos equivalentes, está basado en el procedimiento desarrollado anteriormente. Se trata de suprimir un vértice en cada paso, de manera que el siguiente polígono que se determine tendrá un lado menos.

Tenemos el polígono ABCDE y queremos convertirlo en otro del mismo área pero con un lado menos.

1.-Unimos D con A, formándose el triángulo ADE. Prolongamos el lado BA del polígono, y trazamos una paralela a DA desde el vértice E, obteniéndose el punto A'.

2.-Uniéndolo A' con D y B obtenemos el polígono A'BCD, con la misma superficie del dado, pero con un lado menos.



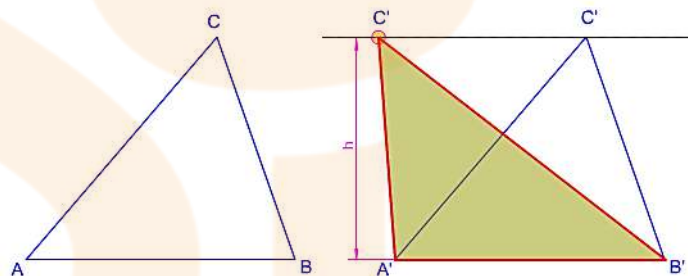
Este es el método general, pero existen métodos particulares para poder trazar polígonos equivalentes de manera que podamos omitir trazados intermedios, por ejemplo, un triángulo equivalente a un hexágono sin necesidad de convertirlo previamente en un pentágono, como veremos más adelante.

2.-Equivalencia entre triángulos

. La construcción de triángulos equivalentes está basada en la relación que existe entre su base y altura, de manera que si la primera aumenta la segunda debe disminuir.

Triángulo equivalente a otro dado de igual base.

Para construir un triángulo equivalente a otro de igual base basta trazar cualquiera con la misma base que tenga también la misma altura: trazamos una paralela desde C a la base, y ponemos el vértice superior C' en cualquier punto de esta paralela.



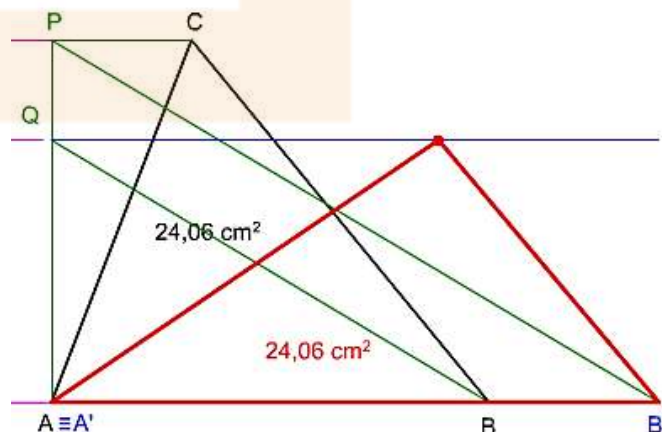
Triángulo equivalente a otro dado de distinta base.

En este segundo caso al modificar la base la altura debe de cambiar también en la misma proporción.

1.-Levantamos una perpendicular desde el vértice A con la medida de la altura, obteniéndose el punto P. Trasladamos la base del nuevo triángulo (A'B') a partir del vértice A.

2.-Unimos el vértice B' de la base con el punto P, y trazamos una paralela a esa recta desde el vértice B del triángulo dado, obteniéndose el punto Q.

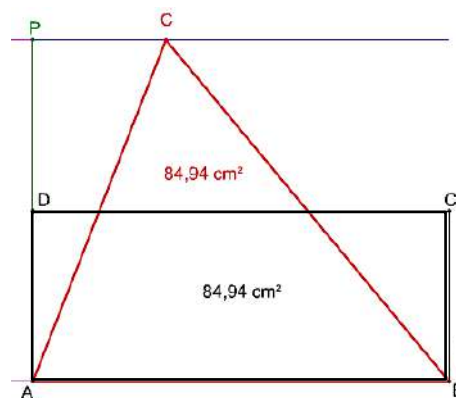
3.-Trazamos una paralela a la base desde ese punto Q: cualquier triángulo que tracemos con vértice en esa paralela tendrá el mismo área que el dado.



Triángulo equivalente a un rectángulo.

Se trata de dibujar un triángulo equivalente a un rectángulo cuya base sea igual al lado mayor del mismo. Relacionamos las fórmulas de ambos polígonos: Si el área de un triángulo = $(base \times altura) / 2$ y la de un rectángulo = $Lado\ mayor \times lado\ menor$, o lo que es lo mismo, $base \times altura$, la altura del triángulo debe de ser igual al doble del lado menor del rectángulo (su altura en este caso).

Prolongamos el lado AD del rectángulo dado hasta el doble de su medida, obteniéndose el punto P. Desde éste, trazamos una paralela a la base. Cualquier triángulo con el vértice en esta paralela tendrá la misma área que el rectángulo dado.

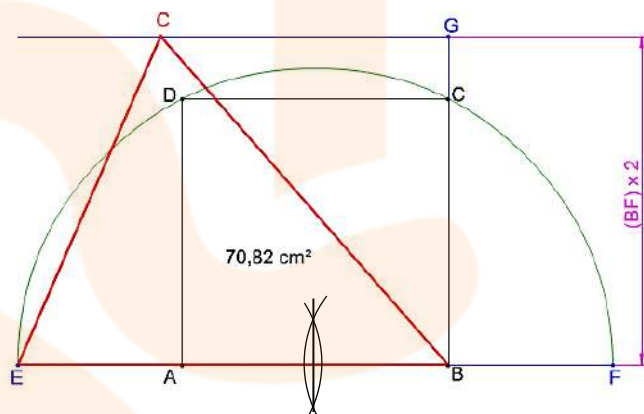


Triángulo equivalente a un cuadrado.

Podemos aplicar el método general estudiado al principio y después transformar el triángulo obtenido en otro de distinta base y altura o, si queremos simplificar el trazado podemos recurrir a un método particular que nos permite dibujar dicho triángulo equivalente de forma directa. Este procedimiento está basado en la **media proporcional** entre segmentos:

1.-Hallamos la mediatriz de la base AB y prolongamos esta base por ambos extremos. Trazamos un círculo desde esa mediatriz que pase por los otros vértices, C y D, obteniéndose los puntos E y F.

2.-Trasladamos sobre uno de los lados verticales (BC) dos veces la medida BF, obteniéndose el punto G. Cualquier triángulo de base EB y con el vértice superior C en la paralela a la base desde ese punto G, será equivalente al cuadrado.



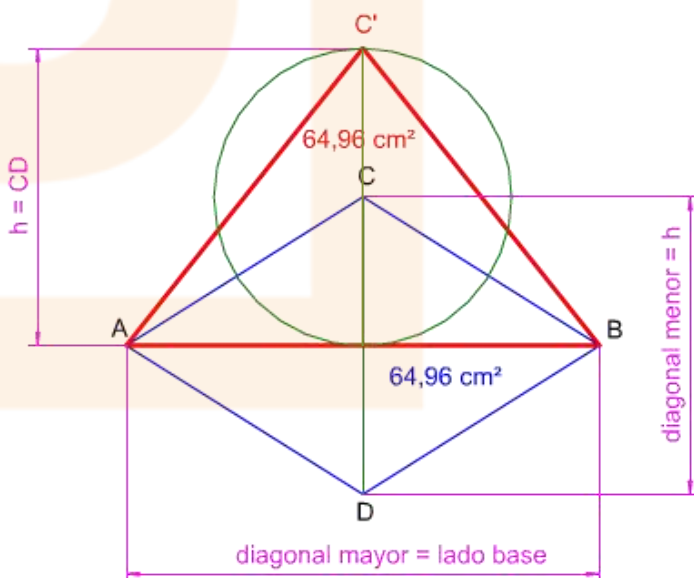
Triángulo equivalente a un rombo de base igual a una de sus diagonales.

Solamente debemos relacionar sus fórmulas:

-Superficie del triángulo = $(base \times altura) / 2$.

-Superficie del rombo = $(diagonal\ mayor \times diagonal\ menor) / 2$

Por lo que podemos deducir que la altura del triángulo debe de tener una longitud igual a la de la otra diagonal. En la imagen de la izquierda puedes ver cómo se ha dibujado un triángulo isósceles equivalente a un rombo dado, de lado base AB igual a la diagonal mayor AB de dicho paralelogramo. La altura del triángulo lógicamente debe de tener una longitud igual a la diagonal menor del rombo.



Triángulo equivalente a un polígono regular (hexágono)

1.-Método general.

En este caso el triángulo equivalente debe de tener la misma altura que el hexágono dado.

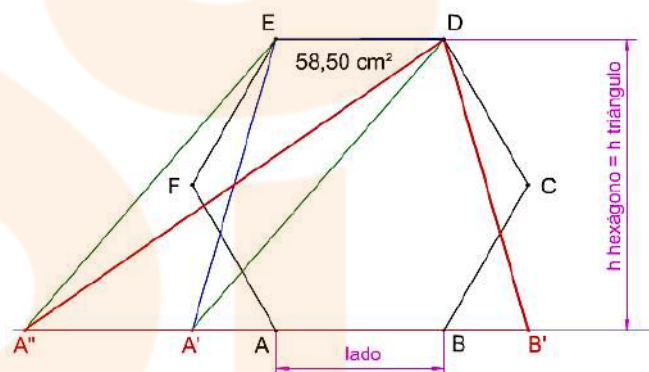
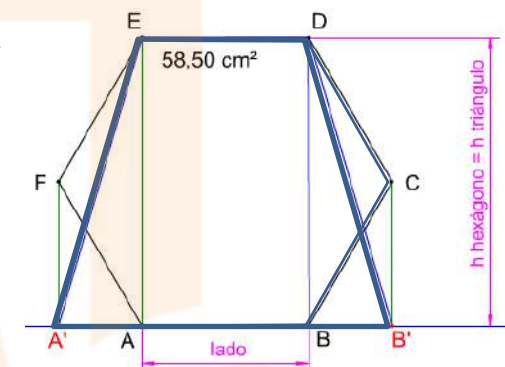
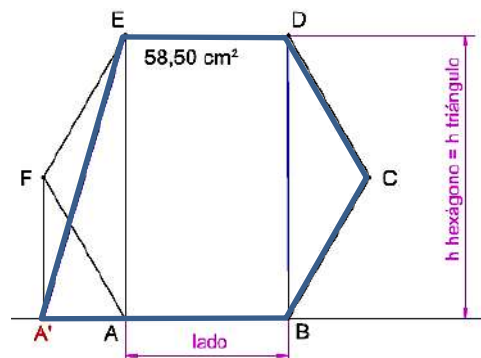
Primero transformamos el hexágono regular ABCDEF dado en un **pentágono irregular** A'BCDE, luego en un **trapezio isósceles** A'B'DE, obteniendo finalmente el **triángulo** equivalente A'B'D de altura igual a la del hexágono ABCDEF dado.

1.-El triángulo equivalente tendrá la misma altura que el hexágono, así que trazamos el segmento BD, altura del hexágono, y prolongamos el lado AB en ambos sentidos. Para suprimir el vértice F unimos E y A y trazamos por F una paralela a dicho segmento, hasta que corte a la prolongación de AB, determinándose el nuevo vértice A'

2.-Unimos A'E, obteniéndose el pentágono irregular A'EDCB, de la misma superficie que el hexágono.

3.-Repetimos la operación anterior respecto al segmento BD y el vértice C, obteniéndose el vértice del trapezio B', que se une con D para obtener el trapezio isósceles A'B'DE, equivalente al pentágono

4.-Para hallar el triángulo equivalente debemos suprimir el vértice E. Para ello, unimos A'y D y trazamos una paralela desde E, obteniéndose A''. El triángulo A'' B'D es el equivalente del hexágono original.

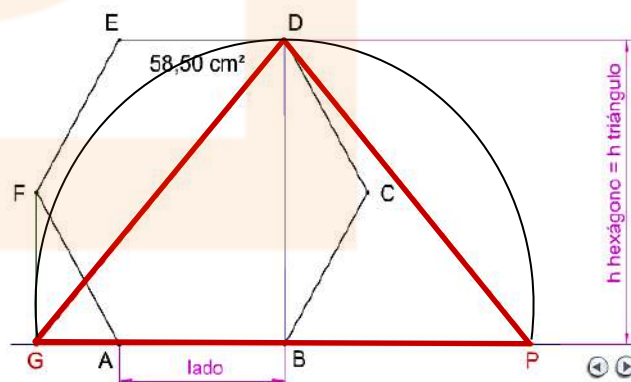


Triángulo equivalente a un hexágono (método específico)

Mediante este método particular, basado también en la media proporcional y el teorema de la altura, simplificamos el trazado, ya que el triángulo equivalente se obtiene de manera directa, sin necesidad de convertir el hexágono en otros polígonos.

1.-Prolongamos AB en ambos sentidos y unimos B con D. Por el vértice opuesto a BD (F), trazamos una perpendicular a AB, obteniéndose el punto G, vértice del triángulo.

2.-Con centro en B, y radio BG trazamos una semicircunferencia, determinándose el punto P. Uniendo G con P y D obtenemos el triángulo.



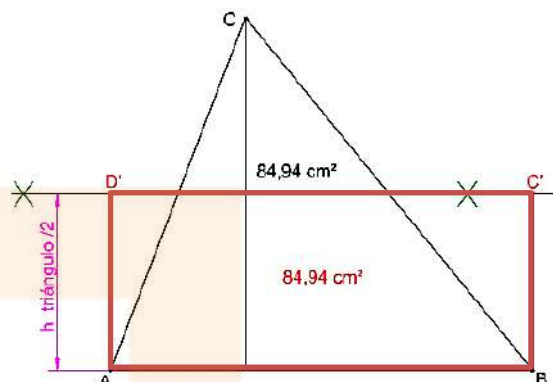
3.-Cuadriláteros

Para dibujar un cuadrilátero equivalente a otro cuadrilátero (paralelogramos, trapecios y trapezoides), a un triángulo, o a un polígono regular o irregular, podemos aplicar el método general de triangulación o, en determinados casos, sobre todo en equivalencias con **polígonos regulares**, podemos simplificar el trazado aplicando la **proporcionalidad** entre segmentos, determinando la **media proporcional**.

Rectángulo equivalente a un triángulo de igual base

Para elaborar este ejercicio debemos de proceder de manera inversa a lo realizado en el apartado. "triángulo equivalente a un rectángulo"

1.-Trazamos la altura del triángulo y su mediatriz, para hallar la mitad de la altura, determinando así la longitud de los lados menores del rectángulo. Solo queda trazar perpendiculares a la base desde A y B para obtener el rectángulo equivalente.



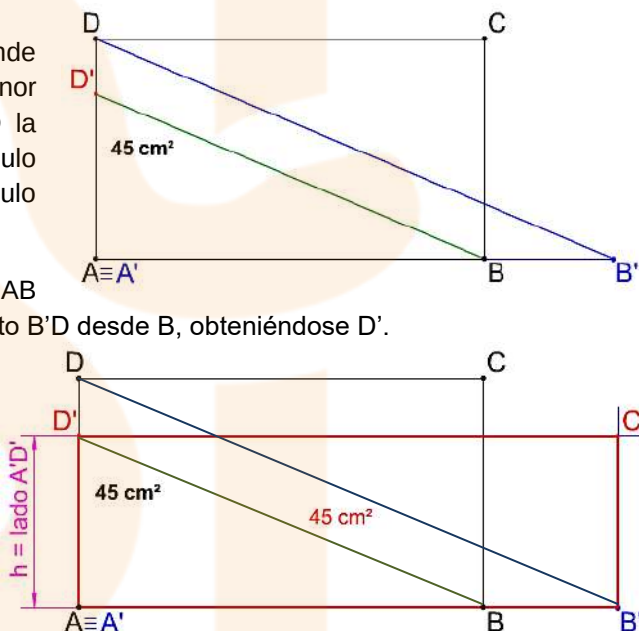
Rectángulo equivalente a otro dado.

Para resolver este ejercicio tenemos que aplicar los conceptos y procedimientos desarrollados en la resolución del "triángulo equivalente a otro dado de distinta base", ya que el rectángulo dado está compuesto por dos triángulos rectángulos.

El lado mayor AB del paralelogramo ABCD dado, se corresponde con el cateto mayor del triángulo rectángulo ABD, su lado menor AD con la altura de dicho triángulo, siendo la diagonal BD la hipotenusa. El lado A'B' del otro paralelogramo rectángulo equivalente A'B'C'D' será el cateto mayor del triángulo rectángulo A'B'D' equivalente al ABD.

1.-Situamos el lado AB del rectángulo a obtener sobre el lado AB dado y unimos B' con D. Trazamos una paralela a ese segmento B'D desde B, obteniéndose D'.

2.-El segmento AD' será el lado menor del nuevo rectángulo, solo resta por tanto trazar una perpendicular desde B' y una paralela desde D' a la base AB para hallar el vértice restante C'

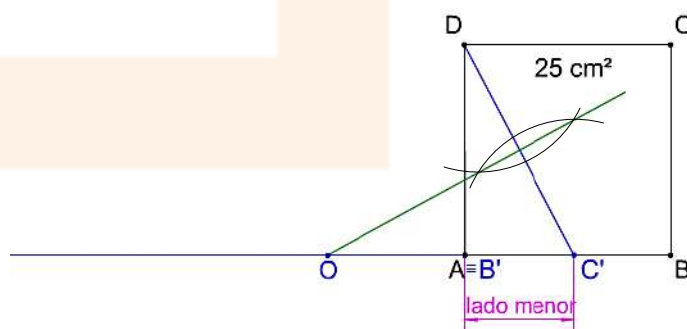


Rectángulo equivalente a un cuadrado.

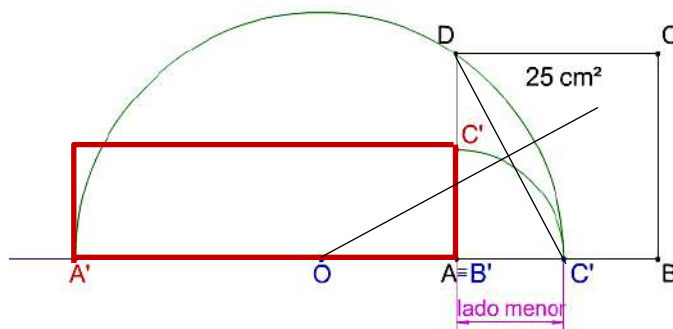
La equivalencia entre un rectángulo y un cuadrado, y viceversa, está basada en la **media proporcional** entre los lados del primero, pues todo cuadrado cuyo lado sea media proporcional de los lados mayor y menor de un rectángulo, resultará equivalente a este.

Para poder dibujar un rectángulo equivalente a un cuadrado dado es necesario conocer un lado. Normalmente será el menor. Para hallar el otro, aplicaremos el teorema de la altura.

1.-Situamos el lado menor del rectángulo buscado (B'C') sobre la base del cuadrado AB, que prolongamos. Unimos C' con el vértice D del cuadrado. Trazamos la mediatriz del segmento DC', que nos dará el punto O.



2.- Desde O, trazamos una semicircunferencia que pase por C' y D, que nos dará el vértice del rectángulo A', y otro arco con centro en A y radio AC'. , que nos dará el vértice C' del rectángulo. Desde aquí trazamos una paralela a la base y una perpendicular desde A, obteniéndose el rectángulo equivalente.

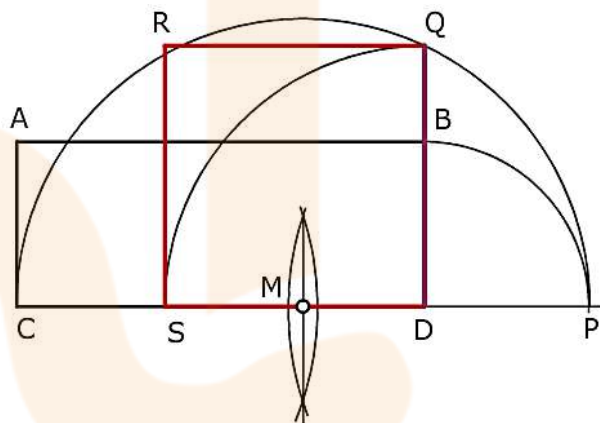


Cuadrado equivalente a un rectángulo.

Para poder dibujar un cuadrado equivalente a cualquier polígono, normalmente primero debemos transformarlo en un rectángulo equivalente. Existen también métodos particulares que nos permiten trazar un cuadrado equivalente de manera directa. Sea cual sea el método elegido, debemos aplicar los conceptos y procedimientos empelados en el dibujo de un segmento **media proporcional**.

Se resuelve de forma similar al anterior, aunque el trazado es más sencillo, ya que solamente debemos determinar la media proporcional de los lados mayor y menor del rectángulo dado. En este caso, aplicando el **teorema de la altura**.

A partir del lado mayor del rectángulo (CD), pasamos el lado menor, obteniéndose el punto P. Trazamos la mediatriz del segmento obtenido CP (M), desde donde dibujamos una semicircunferencia con radio MC. Trazando una perpendicular desde el vértice D, obtenemos el punto Q en su corte con la semicircunferencia, que es el lado del cuadrado.



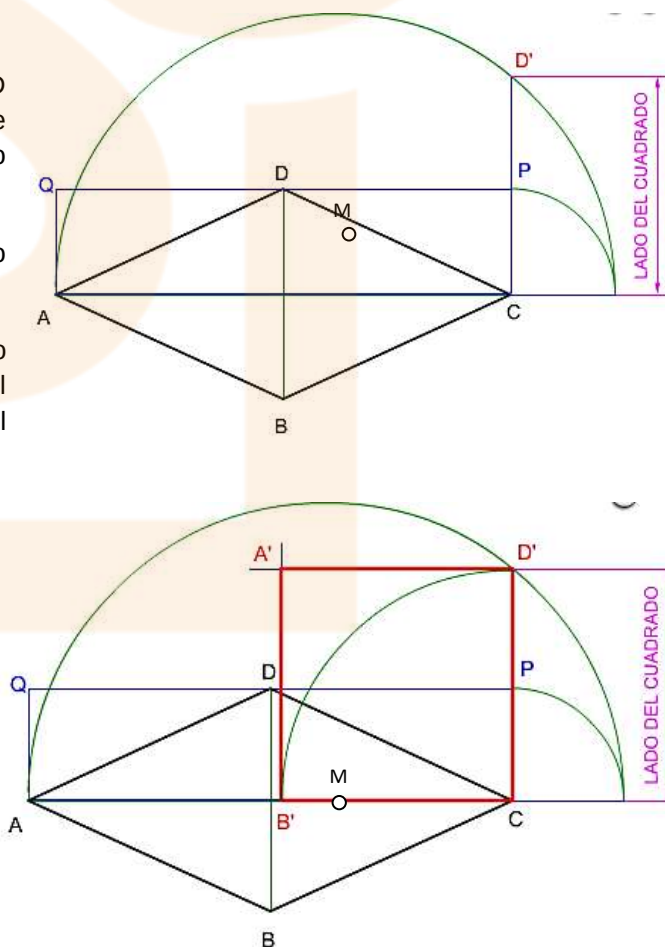
Cuadrado equivalente a un rombo.

En este caso primero debemos transformar el rombo ABCD dado en un rectángulo ACPQ equivalente, para finalmente dibujar, aplicando el teorema de la altura, un cuadrado A'B'CD' equivalente a dicho paralelogramo.

1.-Dibujamos la diagonales del rombo y, aplicando lo visto anteriormente, trazamos el rectángulo equivalente ACPQ.

2.-Mediante el teorema de la altura, como vimos en el ejercicio "rectángulo equivalente a un cuadrado", determinamos el segmento CD', media proporcional de los lados AC y CP del rectángulo, que es el lado del cuadrado.

3.-Pasamos la medida CD' sobre la diagonal del rombo, con lo que tenemos el lado del cuadrado en verdadera magnitud y posición. A partir de ahí trazamos el cuadrado



Cuadrado equivalente a un polígono regular.

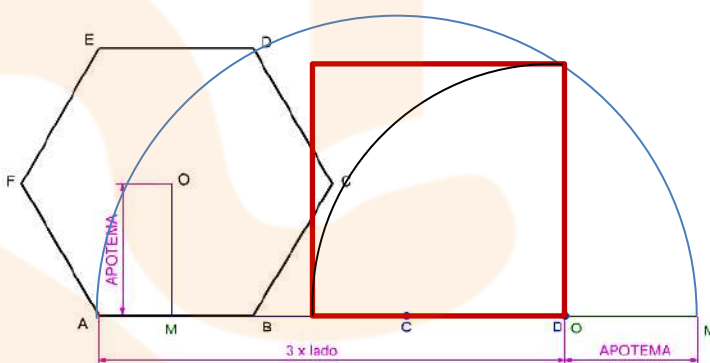
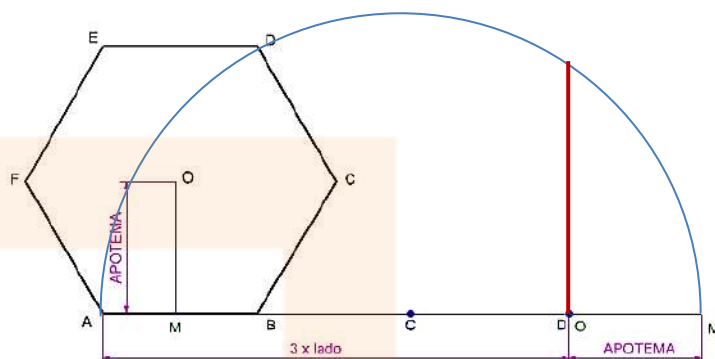
Este método particular nos permite dibujar, de manera directa, un cuadrado equivalente a cualquier polígono regular, por lo que no es necesario convertir previamente dicho polígono en un paralelogramo rectángulo.

Como la superficie de cualquier polígono regular se calcula multiplicando su apotema por el semiperímetro, la **media proporcional** de ambos segmentos, aplicando el teorema de la altura, será el lado del cuadrado equivalente.

1.-Desde la base del hexágono, dibujamos el semiperímetro (tres veces el lado), y le sumamos la apotema.

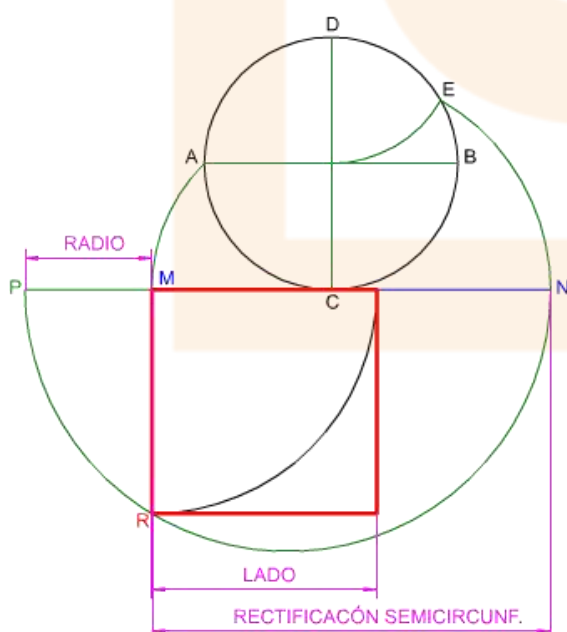
2.-Hacemos centro en el punto medio del segmento AM y, aplicando el teorema de la altura, hallamos la medida del lado del cuadrado en la perpendicular trazada desde O en su corte con la semicircunferencia.

3.-Solo resta pasar la medida del lado sobre el segmento AM y trazar el cuadrado



Cuadrado equivalente a un círculo (cuadratura del círculo).

La cuadratura del círculo es un problema matemático, y geométrico irresoluble, por tanto la solución es aproximada: Se dibuja un rectángulo equivalente, siendo la longitud de su lado mayor igual a la mitad de la rectificación de la circunferencia del círculo, y su lado menor al radio. Finalmente mediante el teorema de la altura determinamos el lado del cuadrado.



- Obtenemos la rectificación de la semicircunferencia determinando el segmento MN.
- Al anterior segmento (MN) le sumamos la longitud del radio de la circunferencia obteniendo el punto P.
- Calculamos la media proporcional de los segmentos PM y MN, obteniendo el segmento MRP.
- El segmento anterior (MR) es el lado del cuadrado buscado.

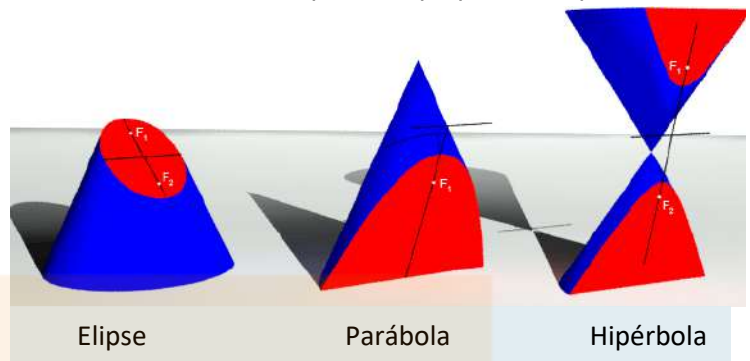
Tema 6.-CURVAS CÓNICAS I (repaso 1º)

Se obtienen al seccionar un cono con un plano secante. La posición de ese plano respecto al eje posibilita diferentes tipos de curvas (además de la circunferencia cuando el plano es perpendicular):

-Elipse: el plano sección es oblicuo y corta todas las generatrices del cono

-Parábola: el plano sección es oblicuo al eje y paralelo a una de las generatrices del cono.

-Hipérbola: el plano sección es paralelo y oblicuo al eje y corta al cono



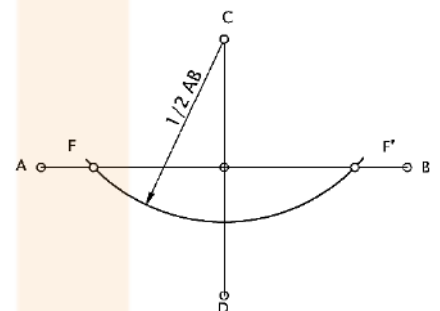
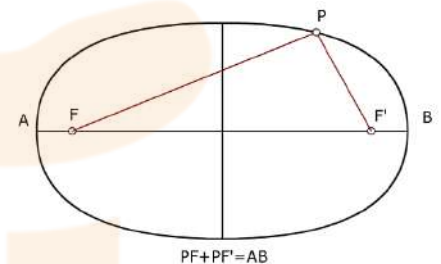
Para construir cualquier curva cónica, el procedimiento es similar: se obtienen puntos que configuran la curva, y se unen, bien a mano alzada, o con plantilla de curvas.

Elementos principales de las curvas cónicas

- **Focos:** son los puntos F y F' , situados en el eje de simetría. La elipse y la hipérbola tienen dos, la parábola uno.
- **Vértices:** puntos extremos de los vértices de la curva.
- **Ejes de simetría:** la elipse y la hipérbola tienen dos, perpendiculares entre sí (eje mayor, denominado real o principal y eje menor o secundario, imaginario en la hipérbola). La parábola solo tiene uno.
- **Circunferencias principales:** circunferencias concéntricas que tienen por diámetro los ejes de la elipse.
- **Distancia focal:** distancia existente entre los dos focos.
- **Circunferencia focal:** circunferencia con centro en un foco y radio el eje mayor AB .

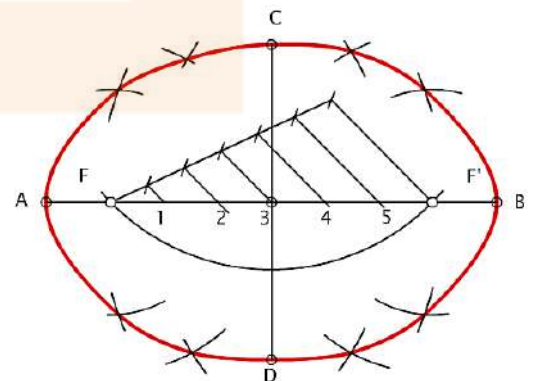
6.1. ELIPSE: figura plana y cerrada, lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya suma de distancias a los focos F y F' es constante e igual al eje mayor AB ($PF+PF'=AB$). (O sea, y esto es importante, **que si nos dan un punto P de la elipse y los focos, sumando sus distancias podemos hallar el eje mayor.**)

Los **focos** en la elipse se hallan haciendo centro en uno de los extremos del eje secundario C o D y radio igual a la mitad del eje real.



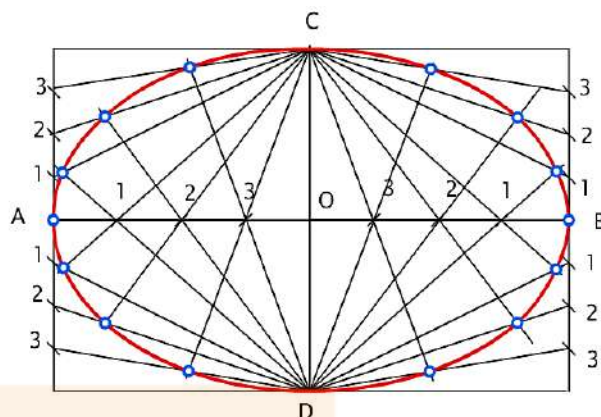
Construir una elipse conociendo sus dos ejes (por puntos)

-Se dibujan los dos ejes AB y CD . Se hallan los focos: con centro en C o D y radio la mitad de AB , se traza un arco que corta a ésta en F y F' . Se divide FF' en cierto número de partes (mientras más partes, más puntos tendremos de referencia). -Para hallar los puntos, con centro en F y radio $1A$ se trazan arcos arriba y abajo del eje y con centro en F' y radio $1B$, se cortan esos arcos; luego, con radio $2A$ y $2B$, $3A$ y $3B$, y así sucesivamente.



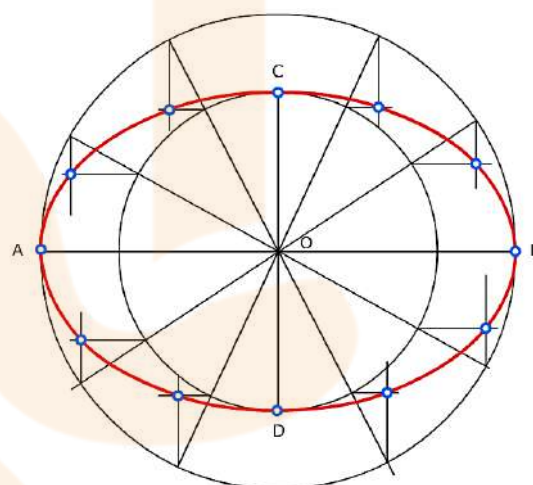
Construir una elipse conociendo los dos ejes, por intersección de rectas o haces proyectivos

Se dibuja un rectángulo con la misma medida de lados que los ejes. Se dividen en n partes los semiejes AO y BO y las mitades del lado del rectángulo EA y FA . Unimos C con todas las divisiones de EA y AB , prolongando, y D con las divisiones de FA y AB . Las intersecciones determinan los puntos de la elipse.

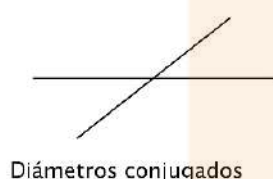


Construir una elipse conociendo sus dos ejes, por circunferencias concéntricas o afinidad.

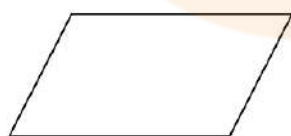
Se dibujan las circunferencias principales, una con el radio de la mitad del eje menor y otra del eje mayor. Trazamos radios comunes a ambas circunferencias. Por los extremos de los radio de la mayor, dibujamos paralelas al eje menor. Por los extremos de los radios de la circunferencia menor trazamos paralelas al eje mayor. El cruce de ambas nos da el punto de corte.



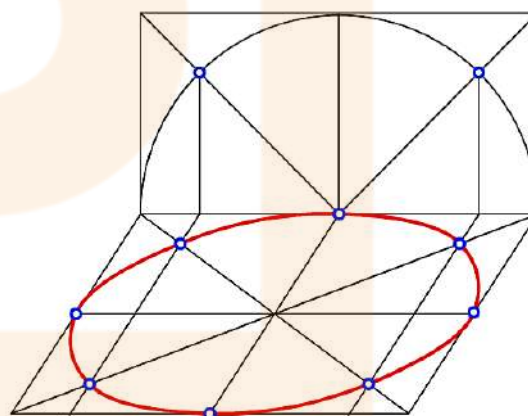
Construir una elipse dados dos diámetros conjugados o la caja axonométrica.



Diámetros conjugados



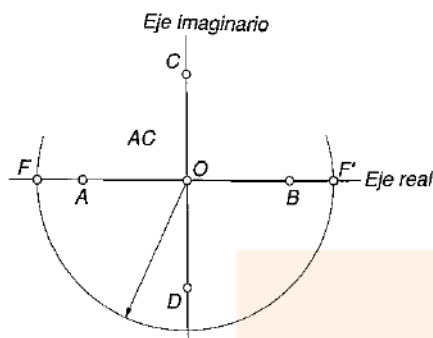
Caja axonométrica



De las dos formas se resuelve igual, y se aplica normalmente para trazar circunferencias en sistemas axonométricos: Si nos dan los diámetros, trazamos sobre éstos la caja, y si nos dan la caja, le trazamos los diámetros, además de las diagonales. A continuación trazamos sobre la caja o bajo ésta una semicircunferencia inscrita en medio cuadrado. Trazando sus diagonales, obtenemos los puntos de intersección que nos faltan, en los cortes con la semicircunferencia que se pasan mediante paralelas a las diagonales de la caja. Solo resta trazar la elipse. Este problema también puede resolverse por haces proyectivos, siendo el procedimiento similar al visto.

6.2. HIPÉRBOLA: curva plana y abierta, lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos F y F' , es constante e igual al eje real AB : $PF - PF' = AB$.

Tiene dos ejes, uno real AB , que contiene a los vértices de cada rama de la curva y otro imaginario CD , perpendiculares entre sí. La hipérbola contiene dos ramas simétricas respecto a los dos ejes.

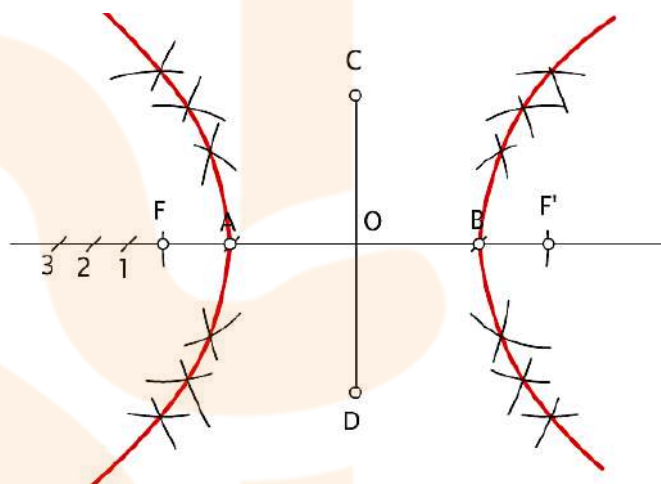


La distancia desde O a cada foco es igual a la distancia AC . Así, si conocemos uno de los ejes y los focos, podemos determinar el otro eje, y si se conocen los dos ejes, los focos. Los focos se hallan, así, haciendo centro en O y radio AC .

Asíntotas: son rectas que pasan por el centro de la hipérbola y son tangentes a ella en el infinito. Son simétricas respecto a los dos ejes.

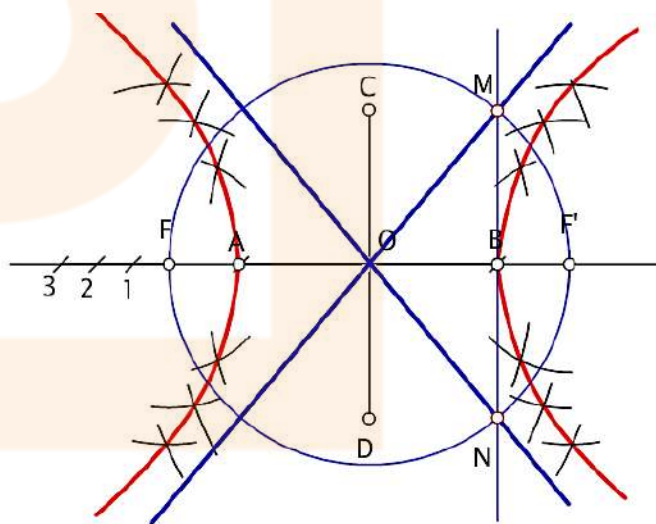
Construir una hipérbola dados los dos ejes, por puntos

Se determinan los focos, con centro en O y radio AC . Se sitúan una serie de puntos arbitrarios a la izquierda de F . Con radio $1A$ y centro en F y F' , se trazan arcos arriba y abajo. Con radio $1B$ y centro en F y F' , se trazan arcos que cortan a los anteriores. Se hace lo mismo con radio $2A$ y $2B$, $3A$ y $3B$... Solo resta unir los puntos con plantilla o a mano alzada.



Trazado de las asíntotas de una hipérbola

Con centro en O y radio OF , trazamos la circunferencia focal. Por A o por B levantamos una paralela al eje imaginario. Los cortes con la circunferencia nos dan M y N . Uniendo M y N con O y prolongando, obtenemos las dos asíntotas.

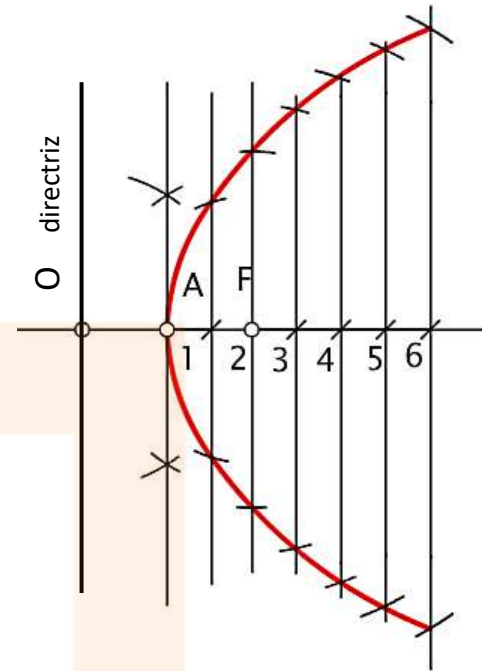


6.3.-PARÁBOLA: Curva plana y abierta, lugar geométrico de todos los puntos del plano equidistantes de un punto fijo llamado foco F y de una recta directriz d . ($PF=FD$). Solo tiene un eje de simetría, perpendicular a la directriz, y que contiene al vértice y al foco. La distancia entre su **foco** y su **directriz** se denomina **parámetro**.

Construcción de una parábola conociendo la directriz y el foco (por puntos)

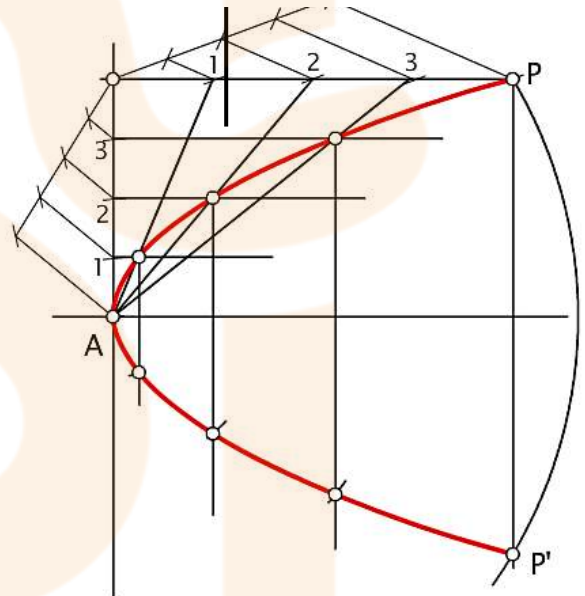
-Hallar el punto medio del segmento OF , que nos da el vértice A . A partir de A , se sitúan puntos arbitrarios 1, 2, 3... y por ellos se trazan paralelas a la directriz.

-Tomando como radios las distancias $O1$, $O2$, $O3$, etc, y haciendo centro siempre en F , se trazan arcos que cortan a las paralelas, obteniéndose los puntos de la parábola.



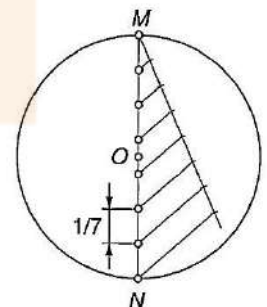
Parábola conociendo el vértice, el eje y un punto P de la curva

Se determina P' , simétrico de P . Por el vértice A se traza una perpendicular y por P una paralela al eje. El cruce de ambas nos da M . Dividimos MA y MP en el mismo número de partes iguales. Trazamos paralelas al eje desde las divisiones de MA y unimos las divisiones de MP al vértice. Los respectivos cruces nos dan los puntos de la parábola. La parte inferior la hallamos situando los puntos simétricos a los obtenidos.



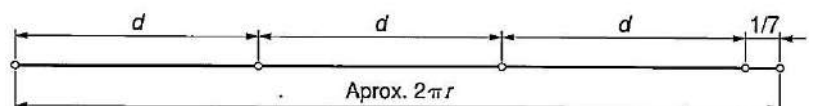
Rectificación de una circunferencia (repaso 1º, veremos sólo los casos principales):

Se denomina **rectificación** a determinar sobre una recta, mediante un procedimiento gráfico, la longitud de una curva, arco o circunferencia. Matemáticamente, sabemos que es la fórmula $2\pi r$. Gráficamente, el procedimiento es aproximado..

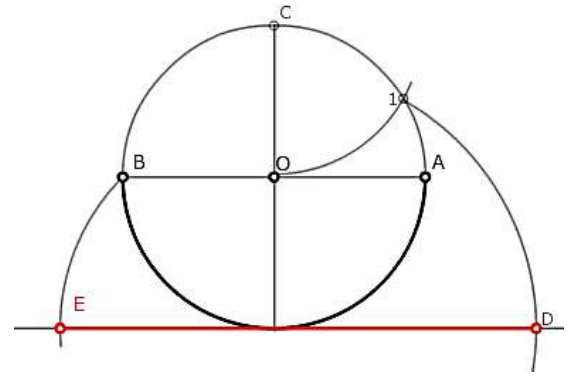


Método de Arquímedes

Sobre una recta auxiliar llevamos, de manera consecutiva, tres diámetros de la circunferencia. Dividimos el diámetro de la circunferencia en 7 partes iguales, tomamos uno y lo sumamos al segmento anterior, obteniéndose la rectificación buscada.

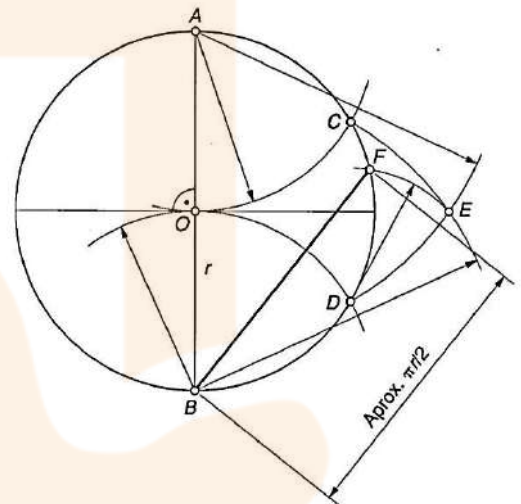


Rectificación semicircunferencia: Trazamos el diámetro vertical de la circunferencia y una perpendicular a ese diámetro. Desde el extremo C trazamos un arco con radio en el centro O, que nos da sobre la circunferencia el punto 1. Desde el otro extremo del diámetro, D, trazamos sendos arcos con radio en B y en el punto 1, lo que nos da sobre la perpendicular el segmento ED, rectificación de la circunferencia



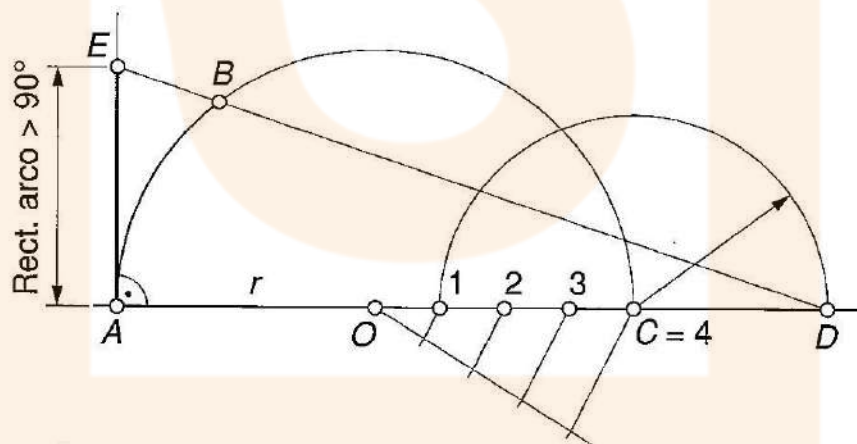
Rectificación de un cuadrante (arco de 90°) (Método Macheroni)

Dibujamos la circunferencia y trazamos su diámetro vertical AB. Con centro en A y en B, y con la medida del radio de la circunferencia, trazamos arcos que nos dan sobre la circunferencia los puntos C y D. Con centro de nuevo en A y radio AD y con centro en B y radio BC, trazamos arcos que en su corte nos dan el punto E. Solo resta trazar un arco con centro en D y radio DE, que en su corte con la circunferencia, no da el punto F, que unido con B es la medida buscada.



Rectificación de un arco menor de 90°

Tenemos el arco AB de una circunferencia de centro O y radio r. Dibujamos sobre una recta auxiliar el diámetro AC. Dividimos el radio OC en 4 partes iguales, y llevamos 3 de esas partes sobre la prolongación a partir de C, obteniéndose el punto D. Trazamos una perpendicular desde A y unimos D con B hasta cortar a esa perpendicular, obteniéndose el punto E. El segmento EA es la rectificación del arco.



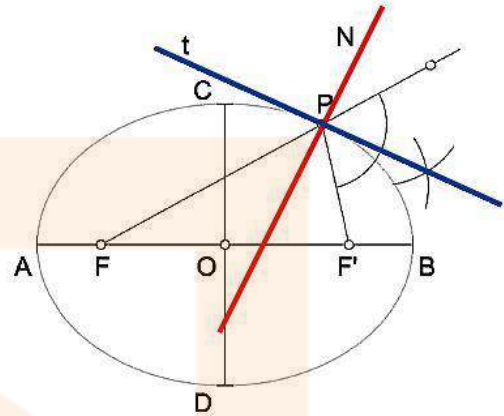
Tema 7.- CURVAS CÓNICAS II

En 1º de Bachillerato se definieron las curvas cónicas y todos sus elementos. En este curso, se completará su estudio con el trazado de **rectas tangentes** y **normales** a estas curvas.

7.1. Tangentes a una elipse

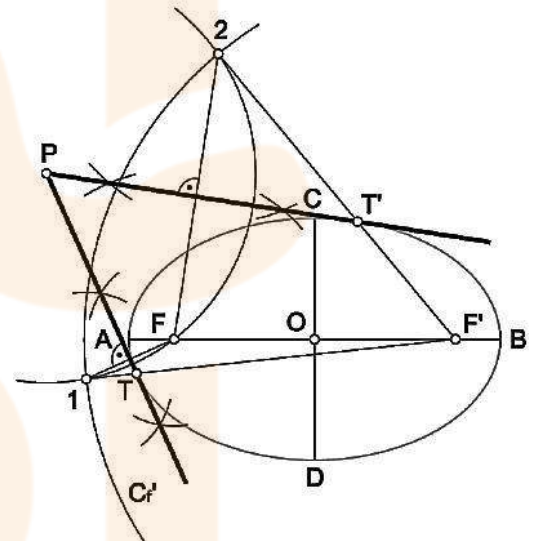
Trazar la recta tangente y la normal a una elipse por un punto P de la curva

-Dibujamos los radios vectores $F'P$ y FP . La **tangente** va a estar en la bisectriz del ángulo exterior a estos vectores. La **normal**, en la perpendicular a la tangente por T.



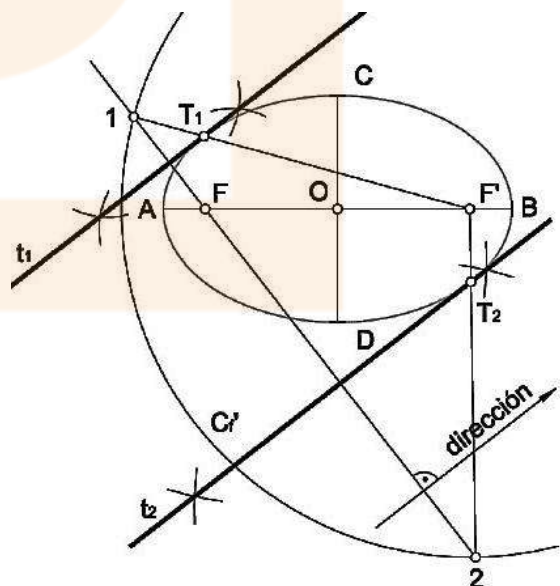
Trazar las rectas tangentes a una elipse desde un punto exterior a ella

Con centro en el punto dado P, trazamos una circunferencia que pase por F, y con centro en el otro foco, F' , trazamos su circunferencia focal (*recordemos que la circunferencia focal se traza desde el foco con radio la medida del eje mayor*). Las intersecciones con la circunferencia anterior nos determinan los puntos 1 y 2. Las mediatrices de los segmentos $1F$ y $2F$ son las tangentes buscadas. (O unir 1 y 2 con F' , lo que nos da el punto de tangencia)



Trazar rectas tangentes a una elipse paralelas a una dirección dada

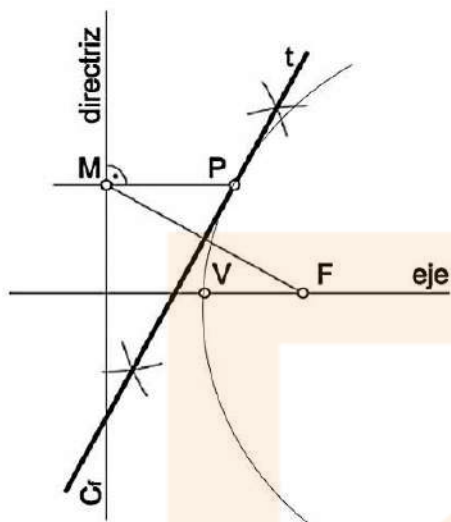
-Con centro en uno de los focos (F' en este caso), trazamos su circunferencia focal, y desde el otro foco, F, trazamos la perpendicular a la dirección dada. Obtenemos dos puntos de corte de la perpendicular con la circunferencia, 1 y 2. Las mediatrices de los segmentos $1F$ y $2F$ son las tangentes buscadas. (O unir 1 y 2 con F' , lo que nos da los puntos de tangencia)



7.1.2. Tangentes a la parábola

La resolución de cada caso es muy similar a los correspondientes de la elipse.

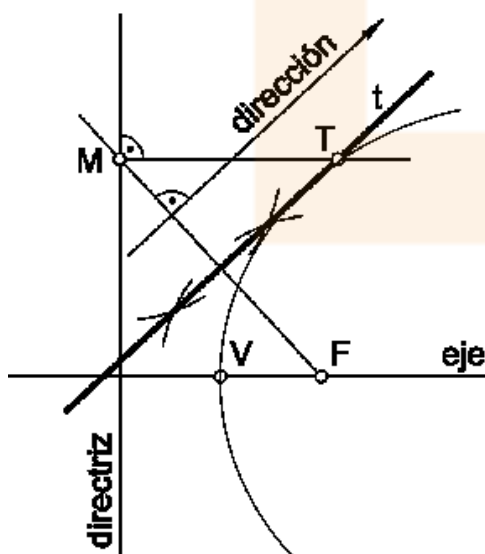
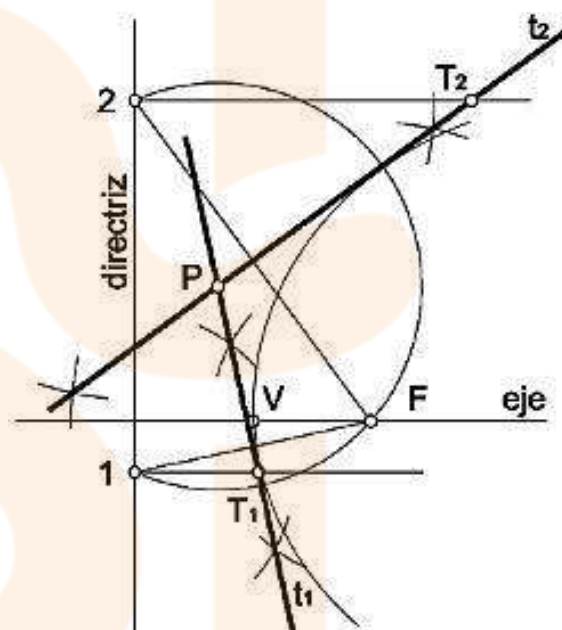
Recta tangente por un punto de la parábola



Desde el punto dado, P, trazamos la perpendicular a la directriz. Obtenemos el punto M, que se une con el foco. La mediatriz de este segmento MF nos da la tangente buscada.

Rectas tangentes desde un punto exterior a la parábola

Trazamos una circunferencia con centro en el punto dado P que pase por el foco, que en su corte con la directriz nos da los puntos 1 y 2. Las mediatrices de los segmentos 1F y 2F nos dan las tangentes buscadas. Los puntos de tangencia están en las paralelas al eje desde 1 y 2, en su corte con la curva.

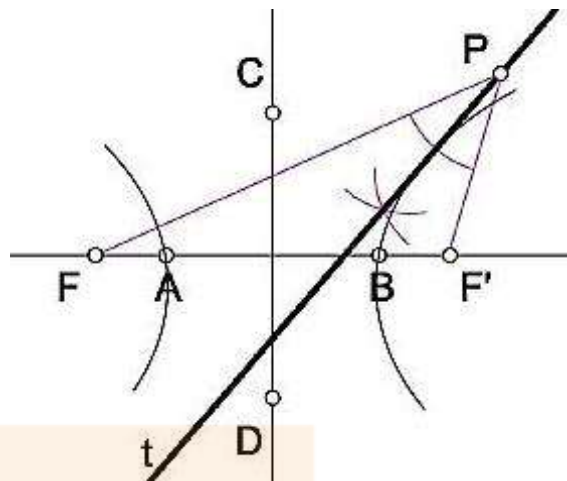


Rectas tangentes paralelas a una dirección dada

Desde el foco, trazamos una perpendicular a la dirección d, cuyo corte con la directriz nos da M. La mediatriz del segmento FM es la tangente buscada.

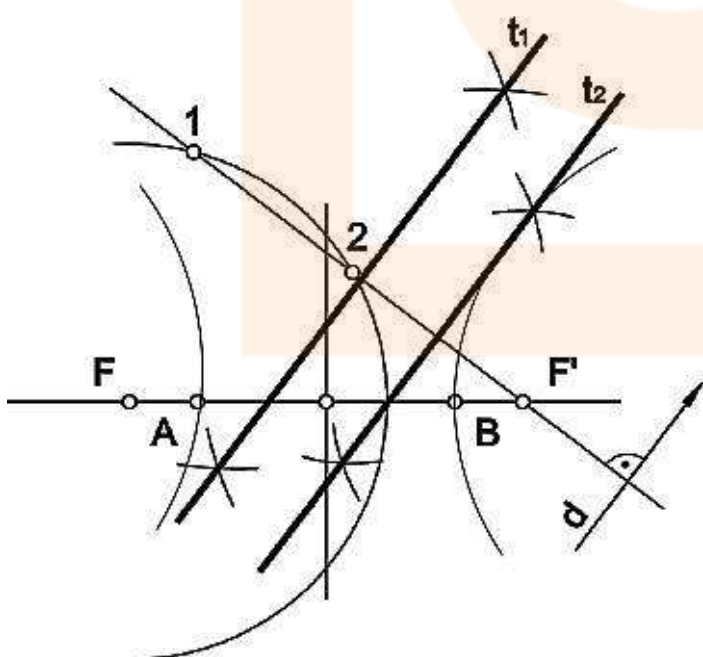
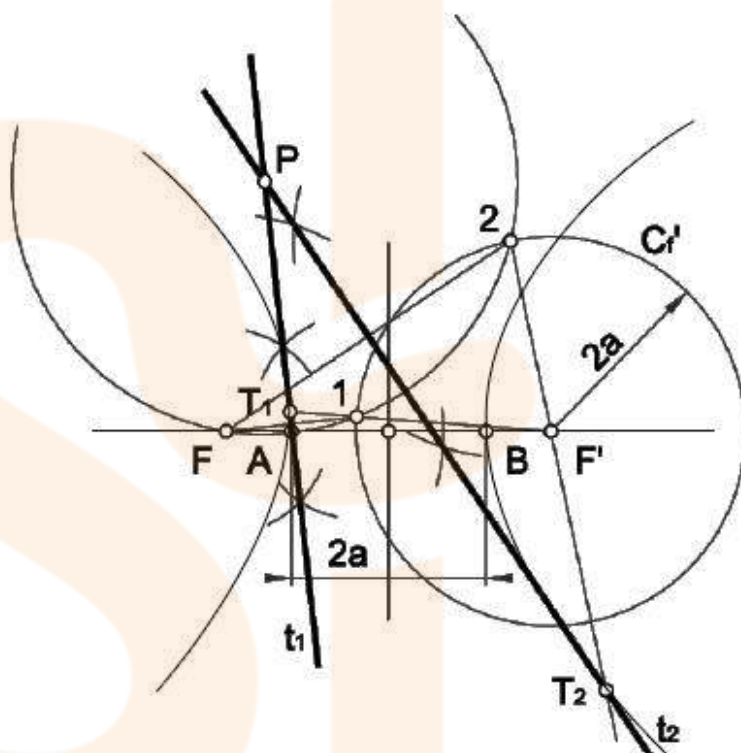
7.1.3.-Tangentes a la hipérbola

Recta tangente por un punto de la hipérbola: Igual que en la elipse, la tangente es la bisectriz del Ángulo formado por los dos radios vectores que unen el punto P con los focos de la hipérbola, segmentos PF y PF'.



Rectas tangentes desde un punto exterior de la hipérbola

Haciendo centro en el punto P, y con radio igual a su distancia a uno de los focos (F), trazamos una circunferencia, que se corta en los puntos 1 y 2 con la circunferencia focal del otro foco (F'). Las tangentes buscadas serán las mediatrices de los segmentos 1F y 2F. Los puntos de tangencia se hallan uniendo F' con 1 y 2 y prolongando.



Rectas tangentes paralelas a una dirección dada:

Desde uno de los focos, F' en este caso, trazamos la perpendicular a la dirección dada. Dibujamos la circunferencia focal del otro foco. Hallamos los puntos de corte 1 y 2 de la perpendicular con la circunferencia. La mediatriz de los segmentos 1F' y 2F' nos dan las tangentes.