Álgebra Lineal

Una matriz numérica de dimensión m × n es un conjunto de números reales dispuestos en m filas y n columnas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriz nula

Cuando todos los valores de la matriz son 0, se denomina matriz nula

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices

Suma

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{n \times m}$$

Producto de un número escalar k por una matriz

$$kA = (ka_{ij})$$

Dimensiones producto de matrices

$$\begin{array}{ccccc} A & \cdot & B & = & A \cdot B \\ m \times n & & n \times p & & m \times p \end{array}$$

Propiedades a recordar

Asociativa

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot B \cdot C$$

Distributiva respecto de la suma de matrices

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$$

Siendo A una matriz de *n x m*

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{I}_m \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$$

El producto de matrices no es conmutativo

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$$

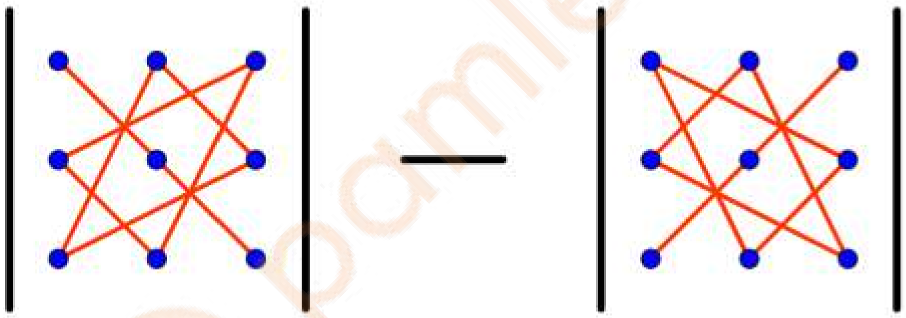
Determinantes

El resultado del determinante de una matriz es un número escalar

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Dibujo para memorizar el proceso



- si |A|=0, las filas o columnas son linealmente dependientes (hay alguna combinación lineal)
- si |A|≠ 0, las filas o columnas son linealmente independientes

Menor de una matriz

Se llama menor de una matriz A al determinante de cualquier submatriz cuadrada de A.

Adjuntos de una matriz

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$$

Matriz adjunta

$$A^* = (A_{ij}) \qquad \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Matriz inversa

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$$

Propiedades

- $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
- $(\lambda \cdot A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1}$, amb $\lambda \neq 0$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- $\left(A^{\mathsf{T}}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{\mathsf{T}}$
- $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$

Cálculo de la matriz inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A^*)^{\mathsf{T}} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(A^{\mathsf{T}}\right)^*$$

Rango de una matriz

Se dice que una matriz A de dimensión m × n tiene rango p, y se escribe Rango A = p, si tiene al menos un menor de orden p diferente de cero y todos los menores de orden superior a p son cero o bien no existen

$$0 \leq \operatorname{rang} A \leq \min(n, m)$$

Sistemas de ecuaciones

Teorema de Rouché-Frobenius

A = matriz formada por los coeficientes de las incógnitas

A' = matriz formada por A y los términos independientes (matriz ampliada)

n= número de incógnitas del sistema

Rang A = Rang A' = n	*Sistema Compatible Determinado (solución única)*
Rang A = Rang A' < n	*Sistema Compatible Indeterminado con n – Rang A grados de libertad*
Rang A < Rang A'	*Sistema incompatible*

<u>Métodos para solucionar sistemas</u>

- *Substitución*
- *Reducción*
- *Igualación*
- *Método de Gauss*
- *Regla de Kramer*

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

$$\Delta = |M| = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & m_{12} & m_{13} \\ b_2 & m_{22} & m_{23} \\ b_3 & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} m_{11} & b_1 & m_{13} \\ m_{21} & b_2 & m_{23} \\ m_{31} & b_3 & m_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & b_1 \\ m_{21} & m_{22} & b_2 \\ m_{31} & m_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

IMPORTANTE: cuando un sistema es compatible indeterminado, asignamos un valor λ a alguna de las variables