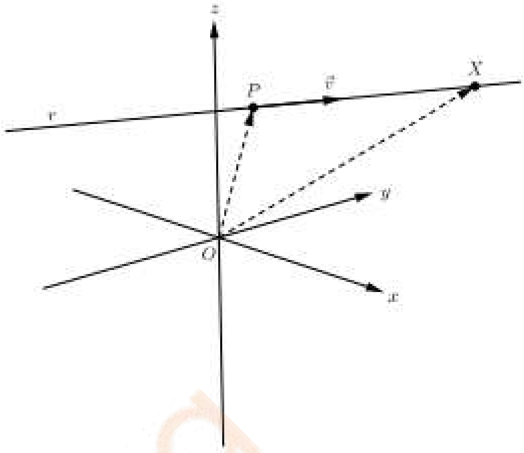
GEOMETRÍA DEL ESPACIO

Ecuaciones de la recta



Ecuación vectorial de una recta

$$\overline{OX} = \overline{OP} + \lambda \cdot \vec{v}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda (v_x, v_y, v_z), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

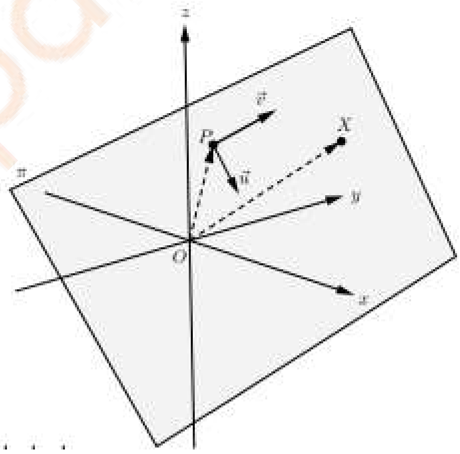
Ecuación paramétrica de una recta

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda v_x \\ y = y_0 + \lambda v_y \\ z = z_0 + \lambda v_z \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Ecuaciones continuas de una recta

$$\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z}$$

Ecuaciones del plano en el espacio



Ecuación vectorial de una plano

$$\overline{OX} = \overline{OP} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda (u_x, u_y, u_z) + \mu (v_x, v_y, v_z) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Ecuaciones paramétricas de un plano

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_x + \mu v_x \\ y = y_0 + \lambda u_y + \mu v_y \\ z = z_0 + \lambda u_z + \mu v_z \end{cases} \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Ecuación general, cartesiana o implícita de un plano

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & u_x & v_x \\ y - y_0 & u_y & v_y \\ z - z_0 & u_z & v_z \end{vmatrix} = 0$$

$Ax + By + Cz + D = 0 \; con \; \vec{n} = (A, B, C) \; vector \; normal \; al \; plano$

Ecuación canónica de un plano

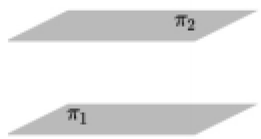
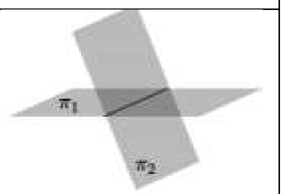
$$\frac{x}{l} + \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 1$$

siendo *(l, 0, 0), (0, m, 0) y (0, 0, n)* intersecciones del plano con los ejes de coordenadas

Posición Relativa de 2 planos

$$\begin{aligned} \pi_1: \quad A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ \pi_2: \quad A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \le \operatorname{rang} M \le 2 \\ 1 \le \operatorname{rang} M' \le 2 \\ \operatorname{rang} M \le \operatorname{rang} M' \end{aligned}$$

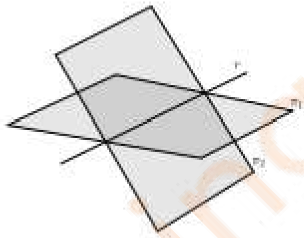
Rang M	Rang M'	n	Sistema	Posición Relativa	
1	1	3	SCI con 2 G.L	Coincidentes	
1	2	3	SI	Paralelos (no coincidentes)	
2	2	3	SCI con 1 G.L	Secantes (intersección es una recta)	

Posición relativa de 2 planos expresados con ecuaciones generales

$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$	Planos son coincidentes
$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$	Planos con paralelos (no coincidentes)
Cualquier otro caso	Se cortan en una recta (secantes)

Recta determinada por dos planos diferentes no paralelos

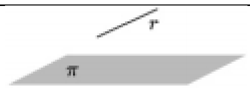
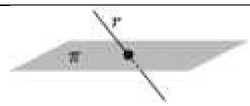
$$r:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$



Posición relativa de una recta y un plano

$$r:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$
$$\pi:\quad A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$$

$2\leq \text{rang}\, M\leq 3$
$2\leq \text{rang}\, M'\leq 3$
$\text{rang}\, M\leq \text{rang}\, M'$

Rang M	Rang M'	n	Sistema	Posición Relativa	
2	2	3	SCI con 1 G.L	Recta contenida en el plano	
2	3	3	SI	Recta paralela al plano	
3	3	3	SCD	Recta secante al plano	

Posición relativa de una plano y una recta definida a partir de un punto P y un vector v

$\left.\begin{array}{l}P\in\pi\\ \vec{v}\cdot\vec{n}=0\end{array}\right\}$	r contenida en en el plano
$\left.\begin{array}{l}P\notin\pi\\ \vec{v}\cdot\vec{n}=0\end{array}\right\}$	r paralela al plano
$\vec{v}\cdot\vec{n}\neq 0$	r secante al plano

Posición relativa de un plano y una recta expresada con ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{array}{l}\pi:\ Ax+By+Cz+D=0\\ r:\begin{cases}x=x_P+\lambda v_x\\ y=y_P+\lambda v_y\\ z=z_P+\lambda v_z\end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow \quad A(x_P+\lambda v_x)+B(y_P+\lambda v_y)+C(z_P+\lambda v_z)+D=0$$

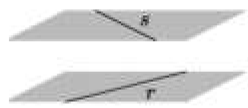
Ecuación de incógnita λ

0λ = 0 (infinitas soluciones, SCI)	r contenida en en el plano
0λ ≠ 0 (no tiene solución, SI)	r paralela al plano
λ = k (solución única, SCD)	r secante al plano

Posición relativa de 2 rectas

$$r:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$
$$s:\begin{cases}A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0\\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0\end{cases}$$

$$1\le \text{rang}\, M\le 3$$
$$1\le \text{rang}\, M'\le 4$$
$$\text{rang}\, M\le \text{rang}\, M'$$

Rang M	Rang M'	n	Sistema	Posición Relativa	
2	2	3	SCI con 1 G.L	Coincidentes	
2	3	3	SI	Paralelas	
3	3	3	SCD	Secantes (se cortan)	
3	4	3	SI	Se cruzan (no se cortan)	

Posición relativa de dos rectas definidas a partir de un punto y un vector director

$$\vec{u},\vec{v}\ \text{v.l.d.} \Rightarrow \begin{cases}\vec{u},\overrightarrow{PQ}\ \text{v.l.d.} \Rightarrow r=s\\ \vec{u},\overrightarrow{PQ}\ \text{v.l.i.} \Rightarrow r\parallel s\end{cases}$$

$$\vec{u},\vec{v}\ \text{v.l.i.} \Rightarrow \begin{cases}\left|\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ}\right|=0 \Rightarrow r\between s\\ \left|\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ}\right|\neq 0 \Rightarrow r\times s\end{cases}$$

Distancias y ángulos

Distancia entre 2 puntos

$$\left.\begin{array}{l} P(x_P, y_P, z_P) \\ Q(x_Q, y_Q, z_Q) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \mathrm{d}(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}$$

Distancia entre un punto y una recta

$$\left.\begin{array}{l} P(x_P, y_P, z_P) \\ r: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OQ} + \lambda\,\vec{v} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \mathrm{d}(P,r) = \frac{|\overrightarrow{QP} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

Distancia entre un punto y un plano

$$\left.\begin{array}{l} P(x_P, y_P, z_P) \\ \pi:\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \mathrm{d}(P,\pi) = \frac{|Ax_P + By_P + Cz_P + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Distancia entre dos planos

$$\begin{array}{ll} \mathrm{d}(\pi_1, \pi_2) = 0 & \text{si } \pi_1 = \pi_2 \\ \mathrm{d}(\pi_1, \pi_2) = \dfrac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} & \text{si } r \parallel \pi \quad \text{con} \quad \left\{\begin{array}{l} \pi_1:\ Ax + By + Cz + D_1 = 0 \\ \pi_2:\ Ax + By + Cz + D_2 = 0 \end{array}\right. \\ \mathrm{d}(\pi_1, \pi_2) = 0 & \text{si } \pi_1 \not\parallel \pi_2 \end{array}$$

Distancia entre una recta y un plano

$$\begin{array}{ll} \mathrm{d}(r,\pi) = 0 & \text{si } r \subset \pi \\ \mathrm{d}(r,\pi) = \mathrm{d}(P,\pi) & \text{si } r \parallel \pi \quad \text{con} \quad P \in r \\ \mathrm{d}(r,\pi) = 0 & \text{si } r \not\parallel \pi \end{array}$$

Ángulo entre dos rectas

$$\begin{array}{ll} \mathrm{d}(r,s) = 0 & \text{si } r = s \\ \mathrm{d}(r,s) = \mathrm{d}(P,s) & \text{si } r \parallel s \quad \text{con} \quad P \in r \\ \mathrm{d}(r,s) = 0 & \text{si } r \not\parallel s \\ \mathrm{d}(r,s) = \dfrac{|[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} & \text{si } r \times s \quad \text{con} \quad \left\{\begin{array}{l} r:\ \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{u} \\ s:\ \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OQ} + \lambda\vec{v} \end{array}\right. \end{array}$$

Ángulo entre dos planos

$$\alpha = \arccos \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

Ángulo entre un plano y una recta

$$\alpha = \arcsin \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|}$$