7.9. Estudio de sistemas cualesquiera mediante el cálculo del rango. Teorema de Rouché-Frobenius

Saber si un sistema tiene o no solución (si es compatible), y cuántas soluciones tiene (si es determinado o indeterminado), se reduce para cualquier tipo de sistemas a estudiar rangos. El resultado fundamental es el:

Teorema de Rouché-Frobenius:

Un sistema cualquiera de matriz A y matriz ampliada $(A|B)$ tiene solución (es compatible) si y solamente si $Rg(A) = Rg(A|B)$.

Por tanto si los dos rangos son distintos el sistema no tiene solución (S.I.).

Además, si dicho rango coincide con el número de incógnitas del sistema, la solución es única (S.C.D.), y si dicho rango es menor que el número de incógnitas, hay infinitas soluciones (S.C.I.).

Es importante darse cuenta de que $Rg(A) \leq Rg(A|B)$, puesto que la matriz de coeficientes forma parte de la ampliada, es decir, la matriz A no puede tener rango mayor que la ampliada.

Aún siendo importante, el único problema que plantea este teorema es que NO ofrece ningún método para calcular la solución, sólamente dice si hay solución o no.

Ejercicio: Aplicar el teorema de Rouché para determinar el tipo de sistema que es:

$$\text{a)} \begin{cases} x + y - z + t = 4 \\ 2x - y + 3z + 2t = -1 \\ -4x + 5y - 11z - 4t = 11 \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = -2 \\ 5x - 4y = 7 \end{cases} \quad \text{c)} \begin{cases} x + 3y = 3 \\ 3x + 5y = 7 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases} \quad \text{d)} \begin{cases} 3x + 3y - z = -1 \\ x + y - 5z = 2 \end{cases}$$

7.10. Sistemas homogéneos

Un sistema homogéneo es aquél que tiene todos los términos independientes nulos.

Cualquier sistema homogeneo es evidente que es compatible, pues dando a cada incógnita el valor 0, se cumplen las ecuaciones. Esta solución (que todas las incógnitas sean nulas) se llama *solución trivial*.

El problema entonces está en determinar si dichos sistemas son compatibles determinados o indeterminados.

Aplicando el teorema de Rouché sólo podemos tener dos casos:

a) Rg (A) = nº incógnitas. En este caso el sistema es compatible determinado, y por tanto tiene solución única que es la trivial (todas las incógnitas valen cero)

b) Rg(A) < nº incógnitas. En este caso el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones que se determinan de la manera conocida.

Ejercicios:

1. Estudiar la solución de los sistemas homogéneos siguientes:

$$\text{a)}\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \quad \text{b)}\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases} \quad \text{c)}\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ 4x+y-z=0 \end{cases}$$

2. Discutir el sistema homogéneo: $\begin{cases} 6x+18y-bz=0 \\ 7x-2y-4z=0 \\ 4x+10y-6z=0 \end{cases}$.