Índice

Capítulo 1

Cinemática, dinámica y campos

1.1. Cinemática en una dimensión

En física, se define la cinemática como la rama de la mecánica que describe el movimiento de los objetos sólidos sin considerar las causas que lo originan (es decir, las fuerzas) y se limita al estudio de la trayectoria en función del tiempo.

Definimos el **movimiento** como el cambio de la posición de un cuerpo a lo largo del tiempo. Definimos **trayectoria** como el conjunto de todas las posiciones o puntos del espacio por donde pasa un cuerpo en movimiento. Existen varios tipos de trayectorias:

- Rectilíneo
- Circular
- Parabólico
- Elíptico
- Hiperbólico
- Helicoidal

Definamos, a continuación, algunas fórmulas básicas.

Tiempo transcurrido:

$$\Delta t = t_2 - t_1 \tag{1.1}$$

Desplazamiento:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \tag{1.2}$$

Este último concepto lo podemos generalizar a 3 dimensiones. **Desplazamiento:**

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \tag{1.3}$$

La **velocidad** es la magnitud que mide cómo varía la posición de un cuerpo en relación con el tiempo y nos informa sobre si éste cambio es rápido o lento. Distinguimos entre la **velocidad media**, que es el cambio en la posición de un móvil en un intervalo finito de tiempo, y la **velocidad instantánea**, que es el valor del cociente entre el desplazamiento y el incremento de tiempo cuando éste tiende a cero.

Velocidad media:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} \tag{1.4}$$

Velocidad instantánea:

$$\vec{v}_i = \lim_{t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{1.5}$$

Si la velocidad instantánea de un cuerpo varia en el transcurso del tiempo, decimos que éste cambio es la **aceleración**. Distinguimos entre la **aceleración media**, que es el cambio de la velocidad en un intervalo finito de tiempo; y la **aceleración instantánea**, que conceptualmente es idéntico a la velocidad instantánea.

Velocidad media:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} \tag{1.6}$$

Velocidad instantánea:

$$\vec{a}_i = \lim_{t\to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \tag{1.7}$$

Una vez aclarados los puntos anteriores, estamos en condiciones de pasar al **Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU)**. En este caso, el movimiento de la partícula se caracteriza por tener una velocidad constante en el tiempo y su aceleración es cero. Hay que destacar tres casos concretos:

- V>0: el móvil avanza
- V=0: el móvil está quieto
- V<0: el móvil retrocede

A partir de una particularización de la expresión (1.4), podemos deducir la **ecuación del movimiento**.

$$x = x_o + v\Delta t = x_o + v(t - to) \tag{1.8}$$

En el caso del **Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (MRUA)**, la partícula tiene una velocidad variable, no siendo así para la acelaración, la cual es constante. Hay que destacar tres casos concretos:

- a>0: el móvil va aumentando su velocidad
- a=0: el móvil tiene velocidad constante y retornamos al caso MRU
- a<0: el móvil va disminuyendo su velocidad y frena

Su ecuación del movimiento, teniendo en cuenta la aceleración, será:

$$x = x_o + v_o\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2 = x_o + v_o(t - to) + \frac{1}{2}a(t - to)^2 \tag{1.9}$$

Si manipulamos la expresión (1.9) con una particularización de la (1.6), obtendremos una expresión que no dependerá del tiempo y que nos será muy útil en ciertas ocasiones.

$$v^2 - v_o^2 = 2a\Delta x \tag{1.10}$$

En los ejercicios en los que el cuerpo está sometido bajo la acción de la gravedad, presentaremos las ecuaciones ligeramente cambiadas, puesto que el movimiento es en la vertical (Y) y la aceleración será la propia gravedad (a=g=-9,81m/s^2).

$$v = v_o - g\Delta t = v_o - g(t - to) \tag{1.11}$$

$$y = y_o + v_o\Delta t - \frac{1}{2}g\Delta t^2 = y_o + v_o(t - to) - \frac{1}{2}g(t - to)^2 \tag{1.12}$$

1.2. Cinemática en dos dimensiones

Todas las expresiones vistas hasta ahora se basaban en el hecho de que el móvil se moviera en una sola dimensión. Ahora, los haremos en dos y, con ello, introduciremos otros tipos de movimiento.

Llamaremos **movimiento parabólico** al movimiento de una partícula con aceleración constante, de manera que la dirección de ésta no coincide con la dirección de la velocidad. De hecho, es una composición de dos movimientos que ya hemos visto con anterioridad. En el eje X consideraremos que la partícula se mueve con MRU, y en el eje de las Y consideraremos que se mueve con MRUA (con a=-g).

Las nuevas fórmulas serán como siguen:

Posición inicial

$$x_o \tag{1.13}$$

$$y_o \tag{1.14}$$

Velocidad inicial

$$v_{ox} = v_o cos\alpha \tag{1.15}$$

$$v_{oy} = v_o sin\alpha \tag{1.16}$$

Velocidad final

$$v_x = v_{ox} = v_o cos\alpha \tag{1.17}$$

$$v_y = v_{oy} - g(t - to) = v_o sin\alpha - g(t - to) \tag{1.18}$$

Posición en X y en Y

$$x = x_o + v_{ox}(t - to) = x_o + v_o cos\alpha(t - to) \tag{1.19}$$

$$y = y_o + v_{oy}(t - to) - \frac{1}{2}g(t - to)^2 = y_o + v_o sin\alpha(t - to) - \frac{1}{2}g(t - to)^2 \tag{1.20}$$

Recordemos que para obtener la altura máxima en la Y, debemos imponer que la velocidad final sea cero y aislar el tiempo en la ecuación de la velocidad. Además, llamaremos **alcance** a a aquella posición de la X donde la partícula llega más lejos dadas unas condiciones iniciales. Se obtiene mediante $y = 0$ y aislando el tiempo.

Finalmente, veremos el **movimiento circular**. Se define, como bien dice su nombre, como aquél movimiento cuya trayectoria describe una circunferencia en el plano. Un concepto muy importante en este apartado del temario es el de los **radianes**. Se define como el ángulo que comprende un arco de longitud igual al radio de la circunferencia. Hay que tener muy claro cómo pasar de radianes a grados y viceversa.

$$180° = \pi\ rad$$

$$360° = 2\pi\ rad$$

Las fórmulas a tener en cuenta serán las siguientes.

Ángulo

$$\varphi \tag{1.21}$$

Velocidad angular

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} \tag{1.22}$$

Aceleración angular

$$\alpha \tag{1.23}$$

Ecuación del movimiento en MCU

$$\varphi = \varphi_o + \omega(t - to) \tag{1.24}$$

Ecuación del movimiento en MCUA

$$\varphi = \varphi_o + \omega(t - to) + \frac{1}{2}\alpha(t - to)^2 \tag{1.25}$$

Para pasar del mundo angular al mundo lineal, aplicamos las siguientes expresiones.

$$s = R\varphi \tag{1.26}$$

$$v = R\omega \tag{1.27}$$

$$a = R\alpha \tag{1.28}$$

Otros conceptos importantes son el del periodo y el de la frecuencia. Se define **periodo** como el tiempo que tarda una partícula en dar una vuelta completa. Se expresa mediante T y se mide en segundos En cambio, la **frecuencia** es el número de vueltas que hace la partícula en un segundo. Se simboliza con f y se mide en Hz. Están íntimamente relacionadas entre sí.

$$f = \frac{1}{T} \tag{1.29}$$

Otra fórmula útil es la que relaciona frecuencia con velocidad angular, cuya expresión es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\ f \tag{1.30}$$

Finalmente, distinguimos dos componentes intrínsecos de la aceleración: la **normal** y la **tangencial**.

$$a_{tg} = \frac{dv}{dt} \tag{1.31}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2\ R \tag{1.32}$$

$$a_{total} = \sqrt{a_{tg}^2 + a_n^2} \tag{1.33}$$

1.3. Dinámica

La **dinámica** consiste en estudiar la relación existente entre el movimiento de los cuerpos y las causas que lo originan; o lo que es lo mismo, se basa en el análisis de la relación entre las fuerzas y los cambios en el estado de movimiento. Para ello, resulta fundamental citar en primera instancia las leyes que sustentan la dinámica: hablamos de **las tres leyes de Newton**.

La **primera ley** nos dice que, si sobre un cuerpo no se aplica ninguna fuerza externa o el sumatorio de todas las fuerzas es cero, éste se mantendrá a velocidad constante. Por velocidad constante, entendemos que puede ser cero todo el tiempo o bien una velocidad diferente de cero, lo importante es que no varíe. Por lo tanto, decimos que su **cantidad de movimiento** permanece constante, ya que la masa es invariable.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \tag{1.34}$$

La **segunda ley** nos dice que un cuerpo experimentará una aceleración cuando sobre éste se aplique una fuerza resultante no nula. Esta famosa ley puede deducirse a partir de la derivación de la cantidad de movimiento que hemos visto antes.

$$\sum \vec{p} = m \cdot \vec{v} \Rightarrow \sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \tag{1.35}$$

La **tercera ley** nos dice que cuando un cuerpo ejerce una fuerza $\vec{F}$ sobre otro cuerpo, éste efectúa sobre el primero una fuerza $\vec{F'}$ que tiene el mismo módulo, misma dirección pero diferente sentido. Es lo que también se denomina *acción-reacción*.

Otro concepto importante es el del impulso. Cuando aplicamos una fuerza entre dos intervalos de tiempo, decimos que el cuerpo recibe un impulso.

$$\vec{I} = \int_{t_o}^{t} \vec{F} dt \tag{1.36}$$

A partir de la anterior expresión, es fácilmente deducible que:

$$\Delta\vec{p} = \vec{I} \tag{1.37}$$

Ésta es precisamente la expresión que describe el denominado **teorema del impulso mecánico**, que nos indica que el impulso mecánico, $\vec{I}$, que actúa sobre un cuerpo durante un intervalo de tiempo δt es igual a la variación de su cantidad de movimiento.

1.3.1. Fuerzas obtenidas a partir de la aplicación de las leyes de Newton

A continuación, se exponen las fuerzas más típicas para la resolución de problemas de dinámica. La primera de ellas es el **peso**, $\vec{P}$, que es la fuerza de la gravedad que ejerce la Tierra sobre los distintos cuerpos.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{g} \tag{1.38}$$

La **fuerza normal**, $\vec{N}$, es la fuerza de reacción que efectúa una superficie sobre cualquier cuerpo que esté encima de ésta o en contacto. Además, es perpendicular a la superficie sobre la que actúa.

La **tensión**, $\vec{T}$, es la fuerza que aparece cuando un cuerpo hace una fuerza sobre otro mediante un enlace (típicamente, una cuerda).

La **fuerza de rozamiento**, $\vec{F}_f$, es la resistencia que presentan dos cuerpos en contacto al moverse uno respecto del otro. Esta fuerza está causada por las superficies sobre las que se deslizan los cuerpos, ya que éstas no son completamente lisas. Hay que distinguir entre la **fuerza de rozamiento estática**, F_{fe}, y la **fuerza de rozamiento dinámica**, F_{fd}. La primera, se opone a cualquier tendencia al movimiento del cuerpo; el segundo, se opone simplemente al movimiento en sí. Para entender esto mejor, tómese el ejemplo siguiente: imaginemos que intentamos mover una nevera. Evidentemente, al principio nos costará mucho moverla, pues estaremos intentando vencer la fuerza de rozamiento estática. En cambio, una vez hayamos conseguido ponerla en movimiento, nos constará seguir moviéndola pero, indudablemente, será más fácil que antes y sólo tendremos que ir venciendo a la fuerza de rozamiento dinámica. Para cada fuerza, existe un coeficiente de rozamiento, μ, que depende del material. Las fórmulas son:

$$F_{fe} \leq \mu_e \cdot N \tag{1.39}$$

$$F_{fe} = \mu_d \cdot N \tag{1.40}$$

Además, se cumple que: $\mu_d < \mu_e$ y, por lo tanto, $F_{fd} < F_{fe}$.

Finalmente, nos queda la **fuerza elástica**. Cuando deformamos un cuerpo con propiedades elásticas (como un muelle), éste tiende a recuperar su forma original. Las fuerzas que se originan sobre el cuerpo cumplen la **ley de Hooke**.

$$F = -K \cdot \Delta x \tag{1.41}$$

1.3.2. Trabajo, potencia y energía

Una fuerza realiza un trabajo cuando hay un desplazamiento de su punto de aplicación en la dirección de dicha fuerza. El trabajo de la fuerza sobre ese cuerpo será equivalente a la energía necesaria para desplazarlo. Definimos el **trabajo** como el producto escalar de la fuerza por el vector desplazamiento.

$$W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} d\vec{r} \tag{1.42}$$

Sus unidades en el sistema internacional es el *joule*, J. Nótese que el trabajo depende del camino escogido, desde A a B. Sin embargo, si la fuerza aplicada es una fuerza central (es decir, que depende del radio), entonces estamos delante de una fuerza conservativa y, por tanto, el trabajo será independiente del camino elegido. Otras fuerzas conservativas son la de la gravedad, la elástica o la electrostática, por ejemplo.

Recordemos también la definición de **potencia**, que es el trabajo desarrollado por unidad de tiempo. Distinguimos entre la **potencia instantánea** y la **potencia media**. En unidades del SI se mide en watt, W.

$$P = \frac{dW}{dt} \tag{1.43}$$

$$P_m = \frac{\Delta W}{\Delta t} \tag{1.44}$$

Veamos, a continuación, algunas expresiones para la **energía**. En física, la definimos como la capacidad para hacer un trabajo. Hay distintas variantes.

La **energía cinética** es la energía que tiene un cuerpo por el simple hecho de estar en movimiento.

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \tag{1.45}$$

La **energía potencial** es la energía que tiene un cuerpo por encontrarse en una posición concreta dentro de un campo (región del espacio donde actúa una fuerza).

$$E_{pg} = mgh \tag{1.46}$$

La **energía elástica** es la energía que tiene un cuerpo por el simple hecho de estar deformado.

$$E_{pe} = \frac{1}{2} k x^2 \tag{1.47}$$

La **energía mecánica** es la suma de todas las energías.

$$E = E_c + E_p \tag{1.48}$$

Recordemos también que el **Teorema del trabajo y de la energía cinética** nos da la siguiente relación.

$$W = \Delta E_c \tag{1.49}$$

Finalmente, acabaremos con el **Principio de conservación de la energía mecánica**, que nos dice que, para fuerzas conservativas, la energía se conserva (es constante) a lo largo del tiempo.

$$\Delta E = 0 \Rightarrow E = E_c + E_p = constante \tag{1.50}$$

En cambio, el trabajo ejercido por las fuerzas no conservativas será:

$$\Delta E = W_{fnc} \tag{1.51}$$

1.4. Campo gravitatorio

Un **campo** es aquella región del espacio-tiempo donde actúa una magnitud física, que puede ser tanto escalar como vectorial. En nuestro caso, tenemos el campo gravitatorio, cuya particularidad es que las fuerzas que actúan sobre una partícula van dirigidas hacia un punto determinado denominado **centro de fuerzas**, de aquí que se llamen **fuerzas centrales**. Sabremos que una fuerza es central cuando dependa sólo del radio y cuyo rotacional sea cero.

$$\nabla \times F(r) = 0 \tag{1.52}$$

donde $\vec{F} = F(r)\hat{r}$.

Las fuerzas conservativas darán lugar a campos conservativos (como el gravitatorio), cuyo trabajo realizado para mover una masa en el seno de este campo siguiendo una línea cerrada será cero.

$$W_{ciclo} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \tag{1.53}$$

1.4.1. Las leyes de Kepler

Siguiendo un modelo heliocéntrico, Johannes Kepler propuso tres leyes. La **primera ley** dice que los planetas giran en órbitas elípticas en las cuales el Sol ocupa uno de sus focos. La **segunda ley** dice que el segmento imaginario que une un planeta con el Sol define áreas iguales en tiempos iguales.

La **tercera ley** es la famosa fórmula que dice el cuadrao del periodo del movimiento alrededor del Sol de cualquier planeta es directamente proporcional al cubo de la distancia media al Sol.

$$T^2 = kr^3 \tag{1.54}$$

donde $k = \frac{4\pi^2}{GM}$ y la G es la constante de gravitación universal: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2$.

1.4.2. Ley de gravitación universal y campo gravitatorio

La **ley de gravitación universal** dice que la fuerza de atracción entre dos partículas de masas m_1 y m_2 separadas una distancia r es directamente proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u} \tag{1.55}$$

El campo gravitatorio será, pues, el que crea una partícula sola en una región del espacio. Si en ese seno se coloca otra partícula, generará una fuerza definida por la fórmula anterior. En los problemas de clase, siempre que nos den una distribución de partículas que generan un campo gravitatorio, siempre hay que calcular $\vec{g}$ antes, y luego ya la multiplicaremos por la masa de prueba que se coloque en ese campo para saber la fuerza que experimenta. La expresión que define la intensidad del campo será:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G\frac{m_1}{r^2}\vec{u} \tag{1.56}$$

En la ecuación anterior, se define r como la distancia que hay desde el centro de la Tierra hasta la superficie más una cierta altura respecto de la superficie.

$$r = R + h \tag{1.57}$$

De esta manera, podemos manipular la expresión de la intensidad de campo para obtener una fórmula que nos calcule qué gravedad tenemos a una cierta altura (que, recordemos, siempre será menos que la que hay en superficie).

$$\frac{g}{g_o} = \frac{R_T^2}{r^2} = \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2} \tag{1.58}$$

donde $R_T = 6371\ km$.

1.4.3. Campo gravitatorio creado por una distribución de masas

En física, la ley más importante y fundamental es el **principio de superposición**. Para el caso de la gravedad, este principio nos dice que la intensidad de campo gravitatorio originada por una distribución de masas en un punto del espacio es la suma vectorial de las intensidades de campo que crean cada una de las masas puntuales por separado.

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + ... + \vec{g}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{g}_i = \sum_{i=1}^{n} -G\frac{m_i}{r_i^2}\vec{u}_i \qquad (1.59)$$

1.4.4. Potencial gravitatorio de una masa puntual

El **potencial gravitatorio** es una magnitud que se utiliza para hacer valoraciones energéticas de un determinado sistema gravitatorio más fácilmente. Se puede encontrar a partir de:

$$\vec{F}(r) = -\nabla V(r) \qquad (1.60)$$

Más concretamente, definimos el **potencial** de una masa **m** en un punto A como el trabajo, cambiado de signo, realizado por la fuerza gravitatoria que efectúa la masa **m** para desplazar otra masa de prueba de 1 kg desde el infinito ∞ hasta A.

$$V_A = -W_{\infty \to A} \qquad (1.61)$$

Su fórmula será:

$$V = -G\frac{m}{r} \qquad (1.62)$$

Sus unidades serán J/kg. Además, también aquí se cumple el principio de superposición.

$$V_A = V_1 + V_2 + ... + V_i + ... + V_n = \sum_{i=1}^{n} V_i \qquad (1.63)$$

1.4.5. Energía potencial gravitatoria

Todo esto era por unidad de masa. Generalicemos ahora para una masa cualquiera **m'**. De la misma manera que hemos definido el potencial en (1.60), ahora tendremos que el trabajo efectuado por la fuerza gravitatoria para mover una masa **m'** desde el infinito hasta A es la **energía potencial** , E_{pA}.

$$E_{pA} = -W_{\infty \to A} \Rightarrow E_{pA} = m'V_A = -G\frac{mm'}{r} \quad (1.64)$$

El trabajo realizado lo podemos dividir según si es efectuado por el propio sistema o por fuerzas externas.

$$W_{sistema} = -m'(V_B - V_A) = -(E_{pB} - E_{pA}) = -\Delta E_p \quad (1.65)$$

$$W_{fuerzas\ externas} = m'(V_B - V_A) = (E_{pB} - E_{pA}) = \Delta E_p \quad (1.66)$$

1.4.6. Principio de conservación de la energía

Dado que el principio de conservación de la energía nos dice que:

$$E = E_c + E_p \quad (1.67)$$

Lo mismo será válido también para sus incrementos. Esto hará que, dado que la energía es constante, la diferencia de energías será cero.

$$\Delta E = \Delta E_c + E\Delta_p = 0 \quad (1.68)$$

Por lo tanto, deducimos que el trabajo también podrá escribirse como:

$$W = -\Delta E_p = \Delta E_c \quad (1.69)$$

1.4.7. Velocidad de escape y satélites artificiales

En la superficie de la Tierra, un cuerpo tendrá energía cinética y potencial determinadas. Pero si éste escapa de la fuerza de la gravedad terrestre, su energía potencial será cero. Para saber con qué energía mínima se consigue esto, hay que suponer que en el infinito tiene velocidad cero. Así pues, se obtiene que:

$$E = E_c + E_p = E'_c + E'_p = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_o^2 - G\frac{mM_T}{R_T} = 0 \quad (1.70)$$

Y de aquí se obtiene la velocidad mínima necesaria.

$$v_o = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} \quad (1.71)$$

Por lo que respecta a los satélites, hay que saber algunos datos que nos serán muy útiles. Un satélite **geoestacionario** gira en un plano ecuatorial de la Tierra a una distancia aproximada de unos 36000 km de la superficie para conseguir el mismo periodo que la Tierra. Los satélites **heliosíncronos** giran en órbitas casi polares a unos 840 km de distancia de la superficie, con un periodo aproximado de unos 100 minutos. Obtener la velocidad de órbita es fácil si igualamos la fuerza de la gravedad con la centrípeta.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \tag{1.72}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \tag{1.73}$$

Finalmente, y para cerrar esta sección, si recordamos que $E = E_c + E_p$ y sustituyendo la velocidad encontrada, fácilmente encontraremos que la energía mecánica se puede expresar del siguiente modo:

$$E = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r} \tag{1.74}$$

1.5. Campo eléctrico

La fuerza entre dos cargas eléctricas puede ser atractiva (cuando tienen signo diferente) o repulsiva (cuando tienen el mismo signo). Esta fuerza se denomina **Ley de Coulomb**.

$$\vec{F} = K\frac{Q_1Q_2}{r^2}\vec{u} \tag{1.75}$$

En esta ecuación, vemos que Q_1 y Q_2 son cargas puntuales cuyas unidades en el SI son los **coulomb**, **C**, que equivale a una carga de $6,24{\cdot}10^{18}$ electrones; K es la constante de proporcionalidad denominada *constante eléctrica*; y $\vec{u}$ es el vector unitario en la dirección de la recta que une las dos cargas. Recordemos, además, que la carga de un electrón será de $-1,602 \cdot 10^{-19}$C. Asimismo, el valor de K es el siguiente:

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \tag{1.76}$$

Esta expresión de K es para el vació, ya que ε_0 es la permitividad en el vació. El valor de ε varía según el medio que rodea a las cargas eléctricas y, pues, hace variar a K también. Definimos la **permitividad relativa** de un medio determinado como la relación entre la permitividad del medio y la del vacío.

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \tag{1.77}$$

Medio	**Valor**
Vacío	$\varepsilon = \varepsilon_0 = 8,84 \cdot 10^{-12} \frac{N \cdot m^2}{C^2}$
Aire	$\varepsilon = 1,0006\varepsilon_0 \simeq \varepsilon_0$
Vapor de agua	$\varepsilon = 1,007\varepsilon_0$
Agua	$\varepsilon = 81\varepsilon_0$
Alcohol	$\varepsilon = 25\varepsilon_0$
Aceite	$\varepsilon = 2\varepsilon_0$
Vidrio	$\varepsilon = 8\varepsilon_0$
Mica	$\varepsilon = 6\varepsilon_0$

Tabla 1.1: Valores de la permitividad según el medio

El módulo de la fuerza será:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{|QQ'|}{r^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{|QQ'|}{r^2} \vec{u} \tag{1.78}$$

El valor del **campo eléctrico** será:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q'} = K \frac{Q}{r^2} \vec{u} \tag{1.79}$$

A raíz de esto, recordemos que las líneas de campo eléctrico (que son radiales) salen de la carga cuando ésta es positiva; y entran en la carga cuando ésta es negativa. Para dos cargas con el mismo signo, las líneas de campo E se repelen entre ellas. Para dos cargas con el mismo signo, las líneas de campo de E de la positiva van a parar a las negativas. Este último caso se llama *dipolo*. Todo esto es para cargas iguales, pero igual o distinto signo.

1.5.1. Principio de superposición y potencial eléctrico

El principio de superposición también se cumple en el campo eléctrico.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + ... + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i = \sum_{i=1}^{n} K \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{u}_i \tag{1.80}$$

Definimos el **potencial eléctrico** de una carga puntual Q en un punto A como el trabajo cambiado de signo que realiza la fuerza eléctrica efectuada por la carga Q cuando desplaza otra carga puntual de +1 C desde el infinito hasta A.

$$V_A = -W_{\infty \to A} \tag{1.81}$$

Integrando la expresión siguiente se obtiene la fórmula del potencial.

$$V_A = -W_{\infty \to A} = -\int_{\infty}^{r_A} \vec{F} \cdot d\vec{r} = K \frac{Q}{r} \tag{1.82}$$

El mismo principio de superposición también es aplicable al potencial.

$$V_A = V_1 + V_2 + ... + V_i + ... + V_n = \sum_{i=1}^{n} V_i \tag{1.83}$$

La diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos A y B puede expresarse así.

$$\Delta V = V_A - V_B = -W_{\infty \to A} - (-W_{\infty \to B}) = -W_{B \to A} = KQ \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \tag{1.84}$$

1.5.2. Energía potencial eléctrica

La **energía potencial eléctrica** tendrá la siguiente expresión.

$$E_p = Q' \cdot V \tag{1.85}$$

donde Qés la carga que ponemos en el seno de este campo potencial creado por otra carga Q. Reescribiendo, la expresión queda así.

$$E_p = K \frac{QQ'}{r} \tag{1.86}$$

Y el trabajo será:

$$W = -\Delta E_p = -(E_{pA} - E_{p\infty}) = -(E_{pA} - 0) = -E_{pA} = -K \frac{QQ'}{r_A} \tag{1.87}$$

Se puede relacionar con la variación de energía potencial:

$$W = -\Delta E_p = -E_{pB} - E_{pA} = -(Q'V_B - Q'V_A) = -Q'(V_B - V_A) = -Q'\Delta V \tag{1.88}$$

Para fuerzas externas, sin embargo, hay un cambio de signo.

$$W = Q'\Delta V \tag{1.89}$$

Hay que interpretar la energía potencial como la energía del sistema del cual podemos disponer para realizar un trabajo determinado. En otras palabras, es aquella energía que está disponible y que nosotros podríamos (de ahí el término de *potencial*) llegar a usar.

1.5.3. Principio de conservación de la energía

Análogamente a lo presentado para el campo gravitatorio, podremos encontrar una expresión de una carga negativa cuando ésta gira alrededor de otra positiva.

$$E = -\frac{1}{2}K\frac{Q_p|Q_e|}{r} \tag{1.90}$$

Recordemos también este cambio de unides de eV a V.

$$1\ eV = q_e V = 1,602 \cdot 10^{-19}\ J \tag{1.91}$$

Finalmente, y para cerra este tema, recordemos que la relación entre el campo eléctrico E y el potencial V es:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} \tag{1.92}$$

De hecho, de aquí se deduce que en un condensador plano, la relación queda así:

$$E = \frac{\Delta V}{d} \tag{1.93}$$

Capítulo 2

Electromagnetismo

2.1. Campo magnético

Como todos sabemos, hay determinados materiales con propiedades magnéticas. El típico ejemplo es el que se utiliza en las escuelas: se esparcen virutas de hierro en un papel y, por el reverso, un imán las va atrayendo. De hecho, con este experimento tan simple podemos observar las denominadas **líneas de campo**, que nos dan una idea de la intensidad del mismo. Esto se representa con $\vec{B}$, y en el SI su unidad es el **tesla**, (T) o el **gauss** (G), que se relaciona con el tesla mediante esta relación: $1\ T = 10^4\ G$. El de la Tierra vale 10^{-5} o 0,1 G. Además, recordemos que un imán tiene dos polos: el sur y el norte. Por el norte saldrán líneas de campo que irán a parar al sur, por donde entrarán. Importante también es remarcas que estas líneas son cerradas.

2.2. Momento magnético

Del experimento de Ørsted, recordemos que el movimiento de cargas eléctricas crea campos eléctricas. Esto es muy importante, ya que ambos campos están correlacionados entre sí, siendo perpendiculares el uno con el otro.

Definamos ahora el **momento dipolar magnético,** $\vec{m}$. Dicho momento de un electrón que gira en torno a un núcleo es el producto de la intensidad del campo eléctrico I que genera por el vector superficie de la órbita.

$$\vec{m} = I \cdot \vec{S} \tag{2.1}$$

Es útil saber que, utilizando los dedos de la mano como si fueran la dirección de la intensidad, el dedo pulgar nos indicará el sentido del campo magnético generado.

2.3. Fuerza magnética sobre una carga en movimiento

Ya hemos visto antes que toda carga en movimiento crea un campo magnético. Entonces, esta carga recibe una fuerza cuando se encuentra inmersa en un campo magnético externo. A esto se le llama la **ley de Lorentz**.

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \tag{2.2}$$

Donde la $\vec{v}$ es la velocidad y la $\vec{B}$ es el campo magnético. El módulo será:

$$F = |q|VBsin(\alpha) \tag{2.3}$$

El máximo de esta fuerza será cuando $sin\alpha = 1$. Si desarrollamos por determinantes nos queda lo siguiente.

$$\vec{F} = q \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = Q[(v_yB_z - v_zB_y)\vec{i} + (v_zB_x - v_xB_z)\vec{j} + (v_xB_y - v_yB_x)\vec{k}]$$

2.3.1. Movimiento de una carga en presencia de un campo magnético

Cuando una carga entra dentro del seno de un campo magnético de manera perpendicular con una cierta velocidad, ésta experimenta una fuerza. De la fórmula (2.2) ya vemos que la fuerza tiene que ser perpendicular siempre a la velocidad en cada uno de los instantes de tiempo en que esta partícula esté sometida al campo magnético. Asimismo, F y v siempre tienen el mismo módulo. De hecho, lo que está pasando es que la fuerza actúa como una centrípeta, haciendo que la partícula describa un movimiento circular. De ahí que podamos igualar la ley de Lorentz con la fuerza centrípeta.

$$\sum F = ma \Rightarrow |q|vB = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{|q|B} \tag{2.4}$$

Además, como se trata de movimiento circular, podemos aplicar las fórmulas que vimos en cinématica y obtener así otros parámetros.

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{|q|B}{m} \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{|q|B}{2\pi m} \tag{2.5}$$

Aislando la v, tenemos otra expresión para la energía cinética.

$$v = \frac{|q|RB}{m} \Rightarrow E_c = \frac{1}{2}\frac{(qBR)^2}{m} \tag{2.6}$$

Es importante recalcar que todo esto lo hemos hecho cuando una carga entra perpendicularmente en el seno de un campo magnético. Sin embargo, si lo hace con un ángulo α, hay que descomponer la velocidad en sus componentes paralela y perpendicular.

$$\vec{v} = \vec{v}_{\perp} + \vec{v}_{\parallel}$$

donde $\vec{v}_{\perp} = v\ sin(\alpha)$ y $\vec{v}_{\parallel} = v\ cos(\alpha)$

Así pues, como la trayectoria de la carga será el resultado de la composición de dos movimientos (uno, rectilíneo; el otro, circular), cuyo resultado dará lugar a una trayectoria helicoidal.

$$R = \frac{mvsin(\alpha)}{|q|B} \tag{2.7}$$

2.3.2. Fuerza electromagnética sobre una carga

Podemos encontrar una expresión para la aceleración sabiendo las dos expresiones para la fuerza magnética y la eléctrica.

$$\vec{F}_e = q\vec{E}$$

$$\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{a} = \frac{(\vec{F}_e + \vec{F}_m)}{m} \tag{2.8}$$

Selector de velocidades Se construyen con dos placas paralelas de un condensador plano para seleccionar y ajustar la velocidad de ciertas partículas. Las partículas que atraviesan el selector sin desviarse cumple que:

$$\vec{F}_e + \vec{F}_m = 0 \tag{2.9}$$

Por lo tanto, en módulo:

$$F_e = F_m \Rightarrow Eq = qvB \tag{2.10}$$

De aquí se obtiene que la velocidad es:

$$v = \frac{E}{B} \Rightarrow E = \frac{\Delta V}{d} \Rightarrow v = \frac{\Delta V}{Bd} \tag{2.11}$$

Estas fórmulas tambiém son válidas cuando hagamos ejercicios con un **espectómetro de masas** o un **ciclotrón**.

2.3.3. Fuerza electromagnética sobre un conductor

Ya sabemos que la corriente eléctrica se debe al movimiento de las cargas eléctricas, que se mueven a una cierta velocidad en el interior del conductor. Éstas, además, inducen un campo magnético. Lo nuevo ahora es que si por un conductor pasa corriente, también se genera un campo magnético.

Tomemos un elemento de longitud tal que $dl = vdt$ y un elemento de carga tal que $dQ = Idt$. Utilizando la ley de Lorentz, e integrando, se obtiene:

$$\vec{F} = I(\vec{l} \times \vec{B}) = IlBsin\ \alpha \tag{2.12}$$

2.4. Campo magnético creado por distribuciones de corriente

Los campos magnéticos creados por distribuciones de cargas en movimiento pueden determinarse mediante la **ley de Ampère**, que nos dice que:

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \cdot I \tag{2.13}$$

La μ_0 es la permeabilidad magnética. Vendría a ser como la capacidad de transmitir el campo magnético a través del espacio y/o medio que rodea el conductor, a imagen y semejanza de ε. De hecho, estas dos están relacionadas entre sí.

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \tag{2.14}$$

El valor de μ_0 es $4\pi \cdot 10^{-7} T \cdot m/A$. Además, depende del medio también mediante la siguiente expresión:

$$\mu = \mu_r \mu_0 \tag{2.15}$$

Ahora, mostraremos las diferentes fórmulas derivadas de la ley de Ampère.

Campo magnético creado por un conductor rectilíneo infinito

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r} \tag{2.16}$$

Campo magnético creado por una espira

$$B = \frac{\mu I}{2R} \tag{2.17}$$

Campo magnético creado por un solenoide o bobina

$$B = \mu n I \Rightarrow n = \frac{N}{l} \tag{2.18}$$

2.5. Fuerzas entre dos conductores paralelos e infinitos

Considerando dos conductores paralelos e infinitos separados una distancia d y por los que pasan unas intensidades I_1 y I_2, los campos magnéticos que se genera el uno influye en el otro. El 1 genera un campo magnético sobre 2 tal que:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \tag{2.19}$$

Y recibe una fuerza tal que:

$$F_2 = I_2\ l\ B_1 sin(90) \tag{2.20}$$

Y lo mismo para el segundo conductor. Genera un campo sobre 1 y recibe una fuerza de 1:

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} \tag{2.21}$$

$$F_1 = I_1\ l\ B_2 sin(90) \tag{2.22}$$

Finalmente, ordenando términos, llegaremos a esta expresión.

$$\frac{F_1}{l} = \frac{F_2}{l} = \frac{\mu_0\ I_1\ I_2}{2\pi d} \tag{2.23}$$

2.6. Flujo magnético

Definimos el **flujo de un campo magnético** uniforme a través de una superficie como el producto escalar de estos dos vectores.

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B\ S\ cos\ \varphi \tag{2.24}$$

Sus unidades en el SI es el **weber (Wb)**, que equivale a: $1\ Wb = 1\ T \cdot 1\ m^2$. El flujo será máximo cuando el coseno también lo sea.

2.7. Fuerza electromotriz inducida: la ley de faraday

Hasta ahora hemos visto como un corriente eléctrico creaba un campo magnético que podía ejercer una fuerza sobre otros corrientes. A continuación, presentamos el caso contrario: campos magnéticos que generan campos eléctricos. Esto es posible ya que, recordemos, ambos campos están acoplados el uno con el otro.

Cuando se produce un cambio en el flujo magnético que atraviesa una superficie, se genera un campo eléctrico, o lo que es lo mismo, se ha generado una **fuerza electromotriz (fem) inducida**, que produce un corriente eléctrico inducido. A esto se le conoce como la **ley de Faraday**.

$$\xi = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \tag{2.25}$$

Multiplicando por el número de espiras del circuito, tendremos que:

$$\xi = N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \tag{2.26}$$

Obviamente, su forma diferencial también es válida:

$$\xi = \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \xi = N\frac{d\Phi}{dt} \tag{2.27}$$

En cambio, la **ley de Faraday-Lenz** será:

$$\xi = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{2.28}$$

Mientras que la ley de Faraday nos dice la magnitud de la FEM producida, la ley de Lenz nos dice en qué dirección fluye la corriente, y establece que la dirección siempre es tal que se opone al cambio de flujo que la produce.

2.7.1. FEM inducida por el movimiento de un conductor

Si consideramos un conductor lineal de longitud l que se mueve a velocidad constante $\vec{v}$ perpendicular a un campo magnético constante, $\vec{B}$, entonces surgen fuerzas del tipo magnético que, a su vez, generan también otras de tipo eléctrico. Cuando se llega al equilibrio entre fuerzas, se obtiene que:

$$\vec{F}_m - \vec{F}_e = 0 \Rightarrow F_e = F_m \Rightarrow E = vB \tag{2.29}$$

Recordando que $\Delta V = E\ l$, entonces, $\Delta V = vBl$. Aplicando la **ley de Ohm**:

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{vBl}{R} \tag{2.30}$$

Otra fórmulas útiles son:

$$\Delta\Phi = B\Delta S \Rightarrow \Delta S = v\Delta t l \Rightarrow \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = vBl = \Delta V \tag{2.31}$$

2.8. Generadores de corriente eléctrico

Los generadores de corriente eléctrico basan su funcionamiento en la ley de Faraday que hemos introducido antes. Transmiten la energía mecánica en energía eléctrica.

Alternador A partir de la ecuación del flujo, podemos obtener un fórmula para la FEM derivando respecto del tiempo. Hay que tener en cuenta que en un alternador, aparte del *estator* (que proporciona un campo magnético mediante dos imanes), también hay un *rotor* que proporciona un giro. De hay que veamos la velocidad angular en el coseno.

$$\Phi = BS\ cos(\omega t) \tag{2.32}$$

Finalmente, obtenemos:

$$\xi(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega\ sin(\omega t) \tag{2.33}$$

Generalizando a N espiras y definiendo ξ_0 como $BS\omega$, obtenemos:

$$\xi(t) = \xi_0\ sin(\omega t + \varphi) \tag{2.34}$$

2.8.1. Circuitos de corriente alterna con una resistencia

Aplicando la ley de Ohm, también podemos obtener otra fórmula para la intensidad.

$$I = \frac{\xi}{R} = \frac{\xi_0}{R}\ sin(\omega t) \Rightarrow I(t) = I_0\ sin(\omega t) \tag{2.35}$$

La **potencia disipada** por una resistencia será:

$$P = I\ \xi = R\ I_2 \Rightarrow P(t) = R\ I_0^2\ sin^2(\omega t) \tag{2.36}$$

El trabajo hecho en un periodo será:

$$W = \int_0^T P \cdot dt = \int_0^T R\ I_0^2\ sin^2(\omega t) \cdot dt = \frac{1}{2} R\ I_0^2 T \tag{2.37}$$

Y la potencia media disipada será:

$$P_m = \frac{W}{T} = \frac{1}{2} R\, I_0^2 \quad (2.38)$$

2.8.2. Valores eficaces

Definimos la intensidad eficaz y la FEM eficaz de un circuito CA como los valores de la intensidad y de la FEM de un circuito de CC que genera la misma cantidad de calor por unidad de tiempo que el circuito CA.

Sus fórmulas serán:

$$I_e = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow \xi_e = \frac{\xi_0}{\sqrt{2}} \quad (2.39)$$

La potencia media también podemos reescribirla en términos de los valores eficaces.

$$P_m = \frac{1}{2} R\, I_e^2 = \frac{\xi_e^2}{R} \quad (2.40)$$

2.8.3. Transformador

El **transformador** es un aparato que permite modificar las tension de CA. Consiste en dos bobinas: una primaria y otra secundaria, cada una con sus espiras. Si suponemos que todo es *ideal*, el flujo magnético del primario llega al secundario de tal manera que:

$$\frac{d\Phi_{primario}}{dt} = \frac{d\Phi_{secundario}}{dt} \quad (2.41)$$

A partir de aquí, se puede llegar a una relación entre los valores eficaces de la FEM, las intensidades y el número de espiras.

$$\frac{\xi_p}{\xi_s} = \frac{I_s}{I_p} = \frac{n_p}{n_s} \quad (2.42)$$

Según la relación entre el número de espiras, los transformadores pueden ser *elevadores* o *reductores*. En el primer caso, la tensión de salida es mayor que la de entrada; en el segundo caso, es a la inversa. Finalmente, recordemos otra fórmula importante que nos puede ser útil.

$$W = R\, I^2\, t \quad (2.43)$$

Capítulo 3

Ondas

3.1. Movimiento ondulatorio

Repasemos algunas definiciones básicas sobre ondas. Definimos **movimiento periódico** como aquel movimiento que se repite a intervalos regulares de tiempo, de manera que el móvil describe la misma trayectoria a lo largo del tiempo. Definimos **movimiento oscilatorio** como aquel movimiento periódico en el que el móvil se mueve alrededor de una posición de equilibrio pasando repetidas veces por dicha posición, de manera que describe la misma trayectoria continuamente.

El más sencillo de todos es el **movimiento armónico simple**. Es el movimiento que resulta de proyectar un movimiento circular uniforme sobre un eje que pase por el centro de la circunferencia y que se encuentre contenido en el plano que la define. Su expresión (en la proyección Y) será:

$$y(t) = A\ sin\ \varphi = A\ sin\ \omega t \tag{3.1}$$

Mientras que en la proyección X será:

$$x(t) = A\ cos\ \varphi = A\ cos\ \omega t \tag{3.2}$$

En general, sea cual sea la posición inicial del cuerpo, si suponemos que el movimiento se verifica en el eje Y, la expresión será:

$$y(t) = A\ sin\ \varphi = A\ sin\ \omega t + \varphi_0 \tag{3.3}$$

Veamos algunas definiciones más. El **periodo, T**, de un movimiento armónico simple es el tiempo que tarda un cuerpo en efectuar una oscilación. Se mide en segundos.

$$f = \frac{1}{T} \tag{3.4}$$

La **frecuencia** es el número de oscilaciones que efectúa el móvil en un segundo. Se mide en s^{-1} o en Hz.

$$T = \frac{1}{f} \tag{3.5}$$

La **frecuencia angular,** ω coincide con la velocidad angular de aquel movimiento circular uniforme tal que su proyección sobre un eje determinado da como resultado el movimiento armónico considerado. Se mide en rad/s.

$$\omega = 2\pi f \tag{3.6}$$

La **elongación** es la posición del móvil respecto del punto de equilibrio en un momento dado, cuya ecuación ya hemos visto.

La **amplitud** es el valor máximo que puede alcanzar la elongación, y se representa mediante la letra A. La **fase incial,** φ, es una constante que depende de la posición inicial del móvil en el instante t_0; mientras que la fase $\omega t + \varphi$ nos da información sobre el estado de vibración del móvil en un instante t cualquiera. La amplitud se mide en metros, al igual que la elongación. La fase se mide en radianes.

3.1.1. Velocidad y aceleración del M.A.S.

Derivando la elongación respecto del tiempo, obtenemos la velocidad y la aceleración del movimiento armónico simple.

Ecuación del movimiento

$$y(t) = A\ sin\ (\omega t + \varphi_0) \tag{3.7}$$

Ecuación de la velocidad

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = A\omega\ cos(\ \omega t + \varphi_0) \tag{3.8}$$

Ecuación de la aceleración

$$a(t) = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\ sin(\ \omega t + \varphi_0) \tag{3.9}$$

Tengamos en cuenta también algunas relaciones en cuanto a los desfases de estas ecuaciones. Si tomamos que el desfase de la posición es **cero**, el de la velocidad estaría desfasado $\pi/2$; mientras que el de la aceleración tendría un desfase de π. Notemos también que la velocidad será máxima cuando el coseno también lo sea. Así pues:

$$v_{max} = A\omega \tag{3.10}$$

Y cuando la velocidad es máxima coincide con una elongación nula ($y = 0$). Y viceversa, la velocidad es nula si la elongación es máxima ($y = +A$) o mínima ($y = -A$).

$$a_{max} = A\omega^2 \tag{3.11}$$

Por la misma razón, la aceleración también es nula cuando $y = 0$; y es máxima cuando $y \pm A$.

3.1.2. Dinámica del M.A.S.

Lo estudiando anteriormente se trataba de casos ideales sin fuerzas que interviniesen. Ahora, añadamos objetos (por ejemplo, un peso) a un móvil que describa un M.A.S.. Si tomamos un muelle, tendrá que intervenir la ley de Hooke. Por la segunda ley de Newton, tendremos la siguiente ecuación diferencial, cuya solución es la propia ecuación para la elongación que ya hemos visto.

$$\sum F = ma \Rightarrow -Ky = m\frac{d^2y}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y(t) = 0 \tag{3.12}$$

A partir de aquí, obtendremos otras fórmulas (que no demostraremos) y que nos serán muy útiles.

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3.13}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{3.14}$$

Para el caso del péndulo sencillo, se realiza un procedimiento similar que desemboca en las siguientes expresiones.

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{l}s(t) = 0 \Rightarrow s(t) = s\ sin\ (\omega t + \varphi_0) \tag{3.15}$$

$$w = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{3.16}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{3.17}$$

3.1.3. Estudio energético del M.A.S.

Cuando la elongación sea máxima o mínima ($y = \pm A$), entonces tendremos que la velocidad será cero. Así pues, la energía cinética será cero también; mientras que la energía potencial elástica será:

$$E_{pe} = \frac{1}{2}kA^2 \tag{3.18}$$

En el caso que el móvil esté en la posición de equilibrio $y = 0$, entonces la velocidad será $\pm A\omega$. Mientras que esta vez la energía potencial elástica será cero, la energía cinética adoptará la expresión siguiente:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(A\omega)^2 \tag{3.19}$$

En cualquier otra posición ($y \neq 0$ o $y \neq \pm A$), estas expresiones serán simplemente:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \leftrightarrow E_{pe} = \frac{1}{2}ky^2 \tag{3.20}$$

Finalmente, recordemos que la energía mecánica se conserva en el proceso.

3.1.4. Un poco de teoría adicional

Definimos el **movimiento ondulatorio** como el movimiento en el que no hay un transporte neto de materia, sino de cantidad de movimiento y de energía sólo. Decimos que la cantidad de movimiento y energía se transmiten mediante la propagación de ondas de propagación; mientras que el foco emisor de ondas sería el conjunto de partículas del medio material donde se origina la perturbación.

Clasificamos la ondas según sus dimensiones del siguiente modo:

- Unidimensionales: Se propagan en una sola dirección, como las onda producidas por una cuerda de guitarra.
- Bidimensionales: Se propagan por un plano, como las ondas que se generan en la superficie de un lago.
- Tridimensionales: Se propagan en el espacio ya sea material o no, como el sonido o la luz, respectivamente.

También las podemos clasificar según el medio por donde se propagan:

- Mecánicas: Necesitan un medio por el que propagarse, como el aire o el agua. En este caso, las partículas oscilan y propagan la onda en cuestión.
- Electromagnéticas: No necesitan de un medio por el que propagarse (lo hacen en el vacío). El ejemplo más claro es la luz cuando *viaja* por el espacio.

Según el tiempo que dura una perturbación producida por un foco, las ondas se pueden clasificar en:

- Pulsos: Se dan cuando la perturbación dura un intervalo muy pequeño de tiempo, casi instantáneo. La energía proporcionada es, pues, limitada.
- Tren de ondas: Se da cuando la perturbación dura un intervalo de tiempo más o menos largo. La energía se proporciona de manera continuada y se genera una sucesión de pulso o tren de ondas.

Además, las podemos clasificar según la dirección de propagación de una onda en un medio material.

- Longitudinales: son las ondas en las que la dirección de oscilación de las partículas en el medio es la misma que la dirección de propagación de la onda.
- Transversales: son las ondas en las que la dirección de oscilación de las partículas en el medio es perpendicular a la dirección de propagación de la onda. En este último caso, la onda alcanza valores máximos de elongación (llamados **crestas**) y valores mínimos de elongación (llamados **valles**).

Finalmente, demos dos conceptos claves sobre ondas. La **velocidad de fase** de una onda es la velocidad con que se trasmite la perturbación desde el foco hasta un punto determinado del medio. El **frente de onda** es el conjunto de puntos del medio a los que llega la perturbación en un instante de tiempo dados.

A pesar de ser estas últimas definiciones correctas físicamente hablando, son un tanto confusas, ¿verdad? Con un ejemplo lo entenderemos mejor. Imaginemos que formamos una fila de personas (todos en fila india) desde la Facultad de Física hasta la plaza Francesc Macià en línea recta y por en medio de la Diagonal. Vemos que todas las personas están pegaditas las unas a las otras y prácticamente pueden escuchar la respiración del de delante. Esta imagen tan potente y extraña será de mucha utilidad. Supongamos que ahora el primero de la fila que se encuentra a la altura de la Facultad le toca ligeramente con la mano a la espalda del que tiene delante. Justo en ese instante, esta segunda persona, al notar una mano en su espalda levanta la mano como si pidiera un turno de palabra en una conferencia. Automáticamente, esta segunda persona toca con su mano a la espalda del tercero, que a su vez levanta de nuevo la mano y toca a un cuarto. Si hacemos esto hasta la última persona situada en Francesc Macià, observaremos desde fuera un montón de gente alzando la mano progresivamente, o lo que es lo mismo, la mano levantada se va propagando.

Con esta imagen en la cabeza, diremos que el hecho de tocar a la persona que tenemos delante con la mano en su espalda será la **velocidad de fase**; mientras que el hecho de vez como las manos se van propagando hasta Francesc Macià será el **frente de ondas**. Esta asociación de ideas es muy importante puesto que vemos que poner la mano en la espalda puede ser casi instantáneo; mientras que ver las manos propagándose no lo es. Esta es la razón por la que la velocidad de fase puede superar en velocidad a la mismísima velocidad de la luz, puesto que la velocidad de fase no transmite *información*, en el sentido estríctamente físico de la palabra. En cambio, el frente de ondas sí transmite información, y por tanto, su velocidad no puede ser nunca mayor que el de la luz.

Este mismo efecto es el que se produce en un campo de fútbol cuando la gente empieza a hacer la ola. La gente se levanta casi instantáneamente (velocidad de fase, sin transmisión de información, pudiendo ser la velocidad mayor que el da la luz), mientras que la ola en sí tarda un poco en dar toda la vuelta al estadio (frente de ondas, con transmisión de información, no puede ser mayor que la velocidad de la luz).

3.2. Ondas armónicas

Definimos una **onda armónica** como la perturbación que infiere un movimiento armónico simple a las partículas del medio. Su ecuación será:

$$y(x,t) = A\ sin\left(\omega t - \frac{\omega}{v}x\right) \tag{3.21}$$

El número de onda se puede definir como el número de veces que se repite una onda en una longitud de $2\pi m$. Su unidad es el rad/m.

$$k = \frac{\omega}{v} \tag{3.22}$$

Recordemos otras expresiones:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \tag{3.23}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{3.24}$$

$$\omega = 2\pi f \tag{3.25}$$

$$v = \lambda f = \frac{\lambda}{T} \tag{3.26}$$

La **longitud de onda,** λ, es la distancia que hay entre dos puntos consecutivos que tienen el mismo estado de oscilación, por ejemplo, dos máximos. Se mide en metros.

Otras formas de ver la **ecuación de onda armónica** son (que se mueve a la derecha):

$$y(x,t) = A\ sin\left(2\pi\ \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right) = A\ sin(\omega t - kx) \tag{3.27}$$

Si se mueve a la izquierda, hay un cambio de signo:

$$y(x,t) = A\ sin\left(2\pi\ \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)\right) = A\ sin(\omega t + kx) \tag{3.28}$$

Para acabar este apartado, no os perdáis este vídeo de *Quantum Fracture* sobre ondas, en los que se explica con muchísimo detalle y calidad los conceptos más profundos sobre ondas.

`https://www.youtube.com/watch?v=rKf92Vgx2ag`

3.3. Fenómenos ondulatorios

Uno de los fenómenos más conocidos es el de la **difracción**. Se trata de una distorsión o variación en la dirección de propagación de una onda cuando ésta se encuentra en el camino de su transmisión un obstáculo que tiene unas dimensiones comparables a la longitud de onda y que impide la propagación. A raíz de esto, también tenemos el **principio de Huygens**, que establece que cualquier punto al que llega una perturbación transmitida por una onda se comporta como un nuevo foco emisor de ondas secundarias, las cuales se propagan en todas las direcciones con la misma velocidad de fase.

Otros fenómenos relacionados con ondas es el típico ejemplo de onda que, viajando a través de un medio, se encuentra otro. En este momento, la onda sufre dos fenómenos: el de **reflexión** y el de **refracción**. Imaginemos una onda que va por un medio 1 (el aire) y se encuentra un medio 2 (el agua). Una parte de esta onda se reflejará, y saldrá con el mismo ángulo con el que incidió la original. A este hecho se le llama la **ley de reflexión**, por el que los ángulos de reflexión e incidencia son los mismos:

$$\alpha_i = \alpha_r \tag{3.29}$$

En cambio, otra parte de esta onda se refractará y entrará en el segundo medio, pero lo hará variando su dirección. El nuevo ángulo vendrá ahora dado por la **ley de Snell**. Seguramente, veréis dos formas de escribirla. La versión que encontraréis en la mayoría de la bibliografía física es la siguiente:

$$n_1\ sin(\alpha_1) = n_2\ sin(\alpha_2) \tag{3.30}$$

Donde las n son los llamados índice de refracción. Cada medio tiene el suyo, y los podéis ver resumidos en la siguiente tabla.

Medio	**Valor**
Agua	1.3
Alcohol etílico	1.36
Glicerina	1.46
Diamante	2.42
Vidrio	1.5
Hielo	1.31
Aire	1
Aceite	1.51

Tabla 3.1

El índice de refracción n se define del siguiente modo.

$$n = \frac{c}{v} = \frac{sin(\alpha_i)}{sin(\alpha_r)} \tag{3.31}$$

Donde c es la velocidad de la luz y v es la velocidad de la onda. Recordad que $c = 3 \cdot 10^8\ m/s$. Otra forma que también encontraréis de la ley de Snell es la siguiente.

$$\frac{sin(\alpha_i)}{sin(\alpha_r)} = \frac{v_1}{v_2} \tag{3.32}$$

3.3.1. Polarización

La **polarización** es otro fenómeno ondulatorio, típico de las ondas transversales, por el cual el campo eléctrico oscila sólo en un plano determinado, denominado plano de polarización. Una onda transversal está **polarizada linealmente** cuando sólo hay vibración en una de las posibles direcciones perpendiculares a la dirección de propagación de la onda. Una onda transversal está **polarizada circularmente** cuando el foco oscila de manera circular, es decir, variando continuamente la dirección de vibración, pero sin variar la amplitud. Una onda transversal está **polarizada elípticamente** cuando varia tanto la dirección de polarización como la amplitud.

3.3.2. Efecto Doppler

Todos nosotros experimentamos el **efecto Doppler** cada día por el simple hecho de ir por la calle. El ejemplo más famoso y típico es el de la ambulancia que pasa por delante de una persona. Seguramente, si prestáis atención, notaréis que cuando una ambulancia hace sonar su sirena y se acerca a vosotros, el sonido es tremendamente agudo; sin embargo, una vez ha pasado el sonido no sólo se aleja sino que se torna menos aguda, o lo que es lo mismo, más grave. Lo que estamos experimentando no es más que un cambio en la frecuencia de la onda que llega hasta nuestros oídos.

Debemos imaginar que, de alguna manera, la ambulancia "empuja" el aire, que lo comprime, cuando se acerca hasta nosotros. Esto hace que el aire esté más juntito, por decirlo de alguna manera. Así pues, las partículas de aire vibran con una longitud de onda mucho más pequeña, pero con una frecuencia mayor (y más aguda a nuestros oídos). Y cuando la ambulancia ya se ha alejado, el aire está "más ancho", por así decirlo, por lo que las longitudes de onda son mayores y la frecuencia, en consecuencia, menor (y más grave a nuestros oídos).

La fórmula general es:

$$f_o = f\left(\frac{v \pm v_o}{v \pm v_f}\right) \tag{3.33}$$

Donde f_o es la frecuencia percibida por el observador; f es la frecuencia emitida por la fuente; v es la velocidad del sonido (340 m/s); v_o es la velocidad del observador; y v_f es la velocidad de la fuente. Distinguimos los siguientes casos y particularizamos la fórmula general:

El observador se acerca a la fuente y la fuente está en reposo

$$Obs :\rightarrow \qquad\qquad Fuente : \bullet$$

$$f_o = f\left(\frac{v + v_o}{v}\right) \tag{3.34}$$

El observador se aleja de la fuente y la fuente está en reposo

$$Obs :\leftarrow \qquad\qquad Fuente : \bullet$$

$$f_o = f\left(\frac{v - v_o}{v}\right) \tag{3.35}$$

La fuente se acerca al observador y el observador está en reposo

$$Obs : \bullet \qquad\qquad Fuente :\leftarrow$$

$$f_o = f\left(\frac{v}{v - v_f}\right) \tag{3.36}$$

La fuente se aleja del observador y el observador está en reposo

$$Obs : \bullet \qquad\qquad Fuente :\rightarrow$$

$$f_o = f\left(\frac{v}{v+v_f}\right) \tag{3.37}$$

El observador y la fuente se acercan entre sí

$$Obs :\rightarrow \qquad\qquad Fuente :\leftarrow$$

$$f_o = f\left(\frac{v+v_o}{v-v_f}\right) \tag{3.38}$$

El observador y la fuente se alejan entre sí

$$Obs :\leftarrow \qquad\qquad Fuente :\rightarrow$$

$$f_o = f\left(\frac{v-v_o}{v+v_f}\right) \tag{3.39}$$

El observador se mueve hacia la fuente, y éste en el mismo sentido

$$Obs :\rightarrow \qquad\qquad Fuente :\rightarrow$$

$$f_o = f\left(\frac{v+v_o}{v+v_f}\right) \tag{3.40}$$

La fuente se mueve hacia el observador, y éste en el mismo sentido

$$Obs :\leftarrow \qquad\qquad Fuente :\leftarrow$$

$$f_o = f\left(\frac{v-v_o}{v-v_f}\right) \tag{3.41}$$

Como curiosidad, añadiremos que el efecto Doppler tiene su versión relativista y se utiliza para saber si un objeto del universo se acerca con una velocidad relativa hacia nosotros o, si por el contrario, se está alejando. Cuando una galaxia, por ejemplo, se aleja de nosotros, la veremos de color rojizo; en cambio, si se acerca, la veremos de color azulado.

3.3.3. Interferencias

El fenómeno de **interferencia** se produce cuando dos ondas de idéntica naturaleza coinciden en una misma región del espacio en el mismo instante de tiempo. Entonces, se genera una onda resultante un poco distinta de las iniciales. Imaginemos que tenemos dos ecuaciones.

$$y_1 = A_0\ sin(\omega t - kr_1) \longleftrightarrow y_2 = A_0\ sin(\omega t - kr_2) \tag{3.42}$$

Al sumarlas mediante la relación trigonométrica siguiente:

$$sin\ \alpha + sin\ \beta = 2cos\ \left(\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\right)\ sin\left(\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right) \tag{3.43}$$

Se obtiene la onda resultante:

$$y = y_1 + y_2 = 2A_0\ cos\ k\left(\frac{r_2 - r_1}{2}\right)\ sin\left(\omega t - k\frac{r_2 + r_1}{2}\right) = A_r\ sin\left(\omega t - k\frac{r_2 + r_1}{2}\right) \tag{3.44}$$

A raíz de esta expresión, distinguimos dos tipos de interferencia: la **constructiva** y la **destructiva**. La interferencia constructiva se da en los puntos en que la amplitud resultante es máxima. Su expresión es:

$$r_2 - r_1 = n\lambda \tag{3.45}$$

En cambio, la interferencia destructiva se da en los puntos en que la amplitud resultante es nula. Su expresión es:

$$r_2 - r_1 = (2n + 1)\frac{\lambda}{2} \tag{3.46}$$

En los otros puntos, se da una interferencia parcialmente constructiva.

3.3.4. Ondas estacionarias

Las **ondas estacionarias** se producen siempre que una onda encuentra un obstáculo que impide su propagación, con lo cual origina una onda reflejada que interfiere con la onda incidente. En estas condiciones, se superponen dos movimientos ondulatorios de la misma amplitud y la misma frecuencia que se propagan a la misma velocidad, pero en sentido contrarios. Su expresión matemática es:

$$y(x,t) = 2\ A_0\ sin(kx)cos(\omega t) \tag{3.47}$$

Los **nodos** son los puntos en los que la amplitud es nula y, pues, no hay oscilación. Los nodos se encuentran en la posición dada por la siguiente expresión:

$$x = \frac{n\lambda}{2} \tag{3.48}$$

Fijémonos que dos nodos consecutivos están separados por una distancia de $\lambda/2$.

Los **vientres** o **antinodos** son los puntos en los que la amplitud es máxima. Se encuentran en la posición dada por la siguiente expresión:

$$x = (2n+1)\frac{n\lambda}{4} \tag{3.49}$$

Fijémonos que dos vientres o antinodos consecutivos están separados por una distancia de $\lambda/2$. En cambio, la distancia entre un nodo y un vientre consecutivo es de $\lambda/4$.

Si suponemos ahora una cuerda sujeta por ambos extremos de longitud L tendremos que se generarán una serie de modos de vibración llamados **armónicos**. Las fórmulas a tener en cuenta serán las siguientes:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \leftrightarrow f_n = \frac{v}{2L}n \tag{3.50}$$

Los diferentes armónicos se encuentran resumidos en la siguiente tabla (sólo hemos puesto 5, pero evidentemente hay tantos como valores adopte la n).

Armónico	Nº de vientres	Nº de nodos	n	lambda
Primero o fundamental	1	0	1	2L
Segundo	2	1	2	L
Tercero	3	2	3	2L/3
Cuarto	4	3	4	L/2
Quinto	5	4	5	2L/5

Tabla 3.2

En cambio, si la cuerda sólo está cogida por un extremos, las ecuaciones serán:

$$L = (2n+1)\frac{\lambda_n}{4} \leftrightarrow f_n = \frac{(2n+1)}{4L}v \tag{3.51}$$

Para un tubo abierto por un lado y cerrado por el otro, las ecuaciones serán también:

$$L = (2n+1)\frac{\lambda_n}{4} \leftrightarrow f_n = \frac{(2n+1)}{4L}v \tag{3.52}$$

Y para un tubo abierto por ambos lados, también serán las mismas que las primeras que hemos visto:

$$L = n\frac{\lambda_n}{2} \leftrightarrow f_n = \frac{n}{2L}v \tag{3.53}$$

3.3.5. Energía del movimiento ondulatorio

La energía que transmite una onda, que es de hecho la energía de las partículas que oscilan, es:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(A\omega)^2 \leftrightarrow E = 2m\pi^2 f^2 A^2 \tag{3.54}$$

En las ondas tridimensionales, a medida que se propagan, se van atenuando; esto es, que la amplitud disminuye. Por tanto, la energía transmitida se ha de repartir por frentes de onda cuyas superficies son cada vez mayores a mesura que la onda avanza a través del medio elástico. Por eso, se define el concepto de intensidad. La **intensidad de energía transmitida,** I, es la cantidad de energía E que se transmite durante un intervalo de tiempo y por unidad de superficie. Se mide en W/m^2.

$$I = \frac{E}{S\Delta t} \tag{3.55}$$

Otra expresión es:

$$I = \frac{E}{S\Delta r}\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{E}{S\Delta r}v = \frac{E}{V}v \leftrightarrow I = 2\pi^2 \rho v f^2 A^2 \tag{3.56}$$

Fácilmente, se puede encontrar esta relación:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{A_1^2}{A_2^2} \tag{3.57}$$

Y también:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \tag{3.58}$$

Y finalmente,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1} \tag{3.59}$$

3.3.6. Nivel de intensidad sonora

Hay una intensidad mínima para la sensibilidad del oído humano por debajo del cual el sonido no es audible. A este concepto se llama *umbral de audición*. En términos de intensidad, hablamos de la *intensidad umbral*, y adopta el valor de $I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$. Otro valor extremo es la intensidad sonora máxima que es capaz de percibir el oído humano sin que acabe de percibir dolor. A este concepto se le llama *umbral de dolor*, y adopta un valor de 1 W/m^2.

La expresión que nos da el **nivel de intensidad sonora, B**, que producen las ondas sonoras es:

$$B = 10\, log\left(\frac{I}{I_0}\right) \tag{3.60}$$

Y se mide en decibelios (dB).

Capítulo 4

Física Moderna

4.1. La naturaleza de la luz

Como habréis leído en varias ocasiones, a lo largo de la historia reciente de la ciencia se ha discutido sobre la naturaleza de la luz, habiendo así dos grandes teorías: el **corpuscular** y el **ondulatorio**. Lo cierto es que sería más acertado hablar de qué comportamiento tienen, y no tanto de qué son. En este sentido, experimentos como el de la *doble rendija* de *Young*, demuestran que un haz de electrones forzado a pasar por unas láminas con dos orificios se comportan como partículas si observamos el experimento, o como ondas si no lo observamos; la denominada **dualidad onda-corpúsculo**.

Otro fenómeno crucial es el denominado **cuerpo negro**, un cuerpo ideal que absorbe absolutamente toda la radiación que recibe. Lo interesante de esto, es que podemos establecer una relación entre la energía que emite y su espectro de emisión para diferentes temperaturas. Max Planck consiguió deducir las curvas de emisión de un cuerpo negro, aunque supuso que la energía no era emitida de manera continua sino en paquetes, los llamados *quantum* de energía, cuya fórmula es:

$$E = h\,f = \frac{hc}{\lambda} \tag{4.1}$$

Otro experimento importantísimo en la física reciente, y que le valió a Einstein el Premio Nobel en 1921 por su explicación, es el del **efecto fotoeléctrico**. Brevemente, se observó que entre dos electrodos metálicos conectados a una diferencia de potencial se producían chispas aunque esta ΔV no fuera muy alta simplemente por el hecho de hacerle incidir radiación ultravioleta sobre el cátodo, provocando así una paso de corriente. Como una onda electromagnética transporta energía, los electrones situados en la superficie del metal pueden absorber parte de energía y escapar. Se observa, además, que cuando se aumenta la intensidad de radiación, aumenta también el número de electrones liberados, de manera que la intensidad de corriente aumenta proporcionalmente a la intensidad de radiación. También se observa que la emisión fotoelectrónica es casi instantánea, a pesar de que la intensidad de radiación sea pequeña.

Es importante recalcar que la emisión fotoelectrónica para un determinado metal sólo tiene lugar si la frecuencia de radiación incidente es mayor que un cierto valor, denominado **frecuencia umbral**, f_0, propia de cada metal. Si la frecuencia es mayor que esta f_0, entonces se produce el efecto fotoeléctrico.

Para una intensidad de radiación determinada, si aumentamos el valor del potencial, la intensidad de corriente crece hasta llegar a una valor de saturación. Además, si se invierte el potencial (que sea negativo), la emisión fotoeléctrica decrece bruscamente hasta desaparecer por completo para un cierto valor de potencial.

A todas estas evidencias experimentales, a parte de otras, Einstein dio una explicación sencilla a la par que elegante. Consideraba que cualquier radiación electromagnética estaba formada por un haz de partículas, los **fotones**, que se transmitían por el espacio a la velocidad de la luz. Al interaccionar con la materia, se muestra su vertiente corpuscular, de manera que es absorbida o emitida. Admitiendo la expresión (4.1), el efecto fotoeléctrico puede explicarse usando el principio de conservación de la energía y considerando que los electrones pueden absorber fotones, adquirir su energía y escapar del metal. Una parte de la energía del fotón se utiliza para superar la energía mínima necesaria para que el electrón escape de la red cristalina, denominada **trabajo de extracción, W**. El resto de la energía se transfiere en forma de cinética, comunicada al electrón.

$$E = E_c + W_0 \leftrightarrow hf = \frac{1}{2}mv_{max}^2 + W_0 \tag{4.2}$$

Así pues, se explica que el efecto fotoeléctrico no tenga lugar para radiaciones de frecuencia que la umbral. En este caso, el fotón no proporciona energía suficiente para superar el trabajo de extracción, ya que $hf < W_0$.

Además, existe una frecuencia por la que la energía del fotón iguala el trabajo de extracción. Es la frecuencia de extracción:

$$W_0 = hf_0 \tag{4.3}$$

Así pues, con todo esto, podemos saber cuál es el potencial de frenado, V_0.

$$hf = \frac{1}{2}mv_{max}^2 + hf_0 \leftrightarrow eV_0 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \leftrightarrow V_0 = \frac{h}{e}f - \frac{hf_0}{e} \tag{4.4}$$

Introduzcamos otro concepto sumamente importante: el de la **hipótesis de De Broglie**. Se postula que todas las partículas elementales presentan características ondulatorias amén de corpusculares. Por ello, la longitud de onda asociada a una partícula de masa m que se mueve a una velocidad v será:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p} \tag{4.5}$$

De aquí, se obtiene la cantidad de movimiento de las partículas:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{hf}{c} = \frac{E}{c} \tag{4.6}$$

Finalmente, introduzcamos el **principio de incertidumbre de Heiseinberg**. Establece que es imposible medir simultáneamente y con total exactitud la posición y la cantidad de movimiento de una partícula. Matemáticamente, se expresa así:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{2\pi} \tag{4.7}$$

Donde h es la **constante de Planck**, que vale $6{,}62 \cdot 10^{-34}\ kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$. También se puede expresar del siguiente modo, ya que este principio es válido para cualquier par de magnitudes conjugadas:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{2\pi} \tag{4.8}$$

4.2. Física nuclear

Hasta ahora hemos estudiado con detalle dos de las cuatro grandes fuerzas que hay presentes en la naturaleza: la fuerza **gravitatoria** y la fuerza **electromagnética**. Las dos restantes son la fuerza **nuclear fuerte** y la fuerza **nuclear débil**. La primera de ellas se encarga de mantener estable el núcleo atómico ya que si no existiera, la electromagnética no podría mantenerlo estable y se acabaría desintegrando a causa de la fuerte repulsión electrostática entre los protones. Así pues, quien lo mantiene unido es la nuclear fuerte,. Es de corto alcance, actuando en distancias del orden de 10^{-14} m; y los protones se mantienen unidos con una fuerza 100 veces mayor a la electrostática. A diferencia de las fuerzas que hemos estudiado, ésta no tiene asignada una fórmula para la fuerza. Notemos también que, cuando nos acercamos tanto al núcleo, la mecánica clásica deja de funcionar y pasa a dominar la cuántica.

La **nuclear débil**, en cambio, tiene que ver con algunos procesos macroscópicos, como las desintegraciones radioactivas, ya que éstas no pueden ser explicada con la nuclear fuerte. Esta interacción es más débil que la nuclear fuerte y que la electromagnética.

4.2.1. Partículas elementales

La física de partículas es la rama de la física que estudia los componentes elementales de la materia y las interacciones entre ellos. Las partículas fundamentales se subdividen en **bosones** (que obedecen a la estadística de Bose-Einstein y tienen spin entero) y **fermiones** (que obedecen la estadística de Fermi-Dirac y tienen spin semientero). Las primeras son las responsables de transmitir las fuerzas fundamentales de la naturaleza y no cumplen el **principio de exclusión de Pauli**, por el cual dos partículas no pueden ocupar el mismo estado cuántico; mientras que los segundos sí cumplen esta ley.

Dentro de los **bosones** tenemos:

- los fotones γ: partícula elemental de la interacción electrodébil, estudiada por la electrodinámica cuántica.
- Bosón $W^{\pm}$: partícula elemental de la interacción electrodébil, estudiada por la electrodinámica cuántica.
- Bosón Z^0: partícula elemental de la interacción electrodébil, estudiada por la electrodinámica cuántica.
- Gluón g: partícula elemental de la interacción fuerte, estudiada por la cromodinámica cuántica.

Dentro de los **fermiones** tenemos leptones y quarks. La diferencia entre ambos estriba en que los primeros pueden existir de manera aislada, mientras que los segundos se encuentran siempre en presencia de otros quarks.

Los **leptones** se subdividen en tres generaciones:

- Electrón e^- y neutrino electrónico ν_e.
- Muón μ^- y neutrino muónico ν_μ.
- Tauón τ^- y neutrino tauónico ν_τ.

Los **quarks** también se subdividen en tres generaciones:

- Up (u) y Down (d).
- Charm (c) y Strange (s).
- Top (t) y Bottom (b).

Por otro lado, tenemos los **hadrones**, que son partículas compuestas. Distinguimos entre los **hadrones fermiónicos** y los **hadrones bosónicos**.

Dentro de los hadrones fermiónicos encontramos los **bariones** (qqq) y los **antibariones** ($\overline{q}\,\overline{q}\,\overline{q}$). Algunos ejemplos son los siguientes:

$$protón, p \longrightarrow uud$$

$$antiprotón, \overline{p} \longrightarrow \overline{u}\,\overline{u}\,\overline{d}$$

$$neutrón, n \longrightarrow udd$$

$$lambda, \Lambda \longrightarrow uds$$

$$omega, \Omega^- \longrightarrow sss$$

Dentro de los hadrones bosónicos encontramos los **mesones** ($q\,\overline{q}$). Algunos ejemplos son los siguientes:

$$pión, \pi^+ \longrightarrow u\overline{d}$$

$$kaón, K^- \longrightarrow s\overline{u}$$

$$rho, \rho^+ \longrightarrow u\overline{d}$$

$$B - zero, B^0 \longrightarrow d\overline{b}$$

$$etha - c, \eta_c \longrightarrow c\overline{c}$$

4.2.2. Partículas atómicas

El núcleo atómico de cualquier átomo está formado por protones y neutrones. Definimos **número atómico, Z**, al número de protones; definimos **número másico, A**, al número de protones y neutrones (número de nucleones); y definimos **número neutrónico, N**, al número de neutrones. Se relacionan entre ellos mediante esta expresión:

$$A = Z + N \tag{4.9}$$

Los **isótopos** de un átomo será aquellos que contienen el mismo número de protones pero distinto número de electrones. Casi todos los elementos tienen dos isótopos o más. El cloro, por ejemplo, tiene el ^{35}Cl y el ^{37}Cl. El hidrógeno, por ejemplo, tiene el **protio**, ^1H, formado por un protón; el **deuterio**, ^2H, formado por un protón y un neutrón; y el **tritio**, ^3H, formado por un protón y dos neutrones.

La unidad que se utiliza es la denominada **unidad de masa atómica**, representada por la letra **u**. Esta unidad se define como la docena parte de la masa del isótopo ^{12}C. Así pues, ^{12}C pesa **12 u**. La equivalencia con kg es:

$$1\ u = 1,6605402 \cdot 10^{-27}\ kg$$

Un protón pesa $m_p = 1,007277\ u$; un neutrón, $m_n = 1,008665\ u$; y un electrón, $m_e = 0,000549\ u$. Definimos la **masa atómica** de un elemento como la media ponderada de las masas de sus isótopos. También es importante recordar que en las reacciones nucleares la masa se transforma en energía mediante la expresión acuñada por Einstein:

$$E = (\Delta m)c^2 \tag{4.10}$$

Y que el radio nuclear es:

$$R = R_0 \cdot \sqrt[3]{A} \tag{4.11}$$

Donde $R_0 = 1,2 \cdot 10^{-15}\ m$, que es el valor del radio nuclear más pequeño (es decir, el de un núcleo de hidrógeno). Obviamente, a medida que aumenta el número de nucleones A, el radio nuclear también aumenta.

4.2.3. Defecto de masa y energía de enlace

Un hecho fundamental de la física nuclear es que la masa del núcleo es mas pequeña que la suma de las masas de los nucleones (protones y neutrones).

$$M({}^{A}_{Z}X) < m_p Z + m_n(A - Z) \tag{4.12}$$

A esta diferencia se le denomina **defecto de masas,** Δm, y se puede comprobar que la pérdida de masa de los nucleones se transforma en una energía denominada **energía de enlace**, mediante la Ec. (4.10) que ya hemos visto en el subapartado anterior. Un defecto de masas muy pequeño puede originar energía relativamente grandes debido a que se multiplica por un factor c^2.

4.2.4. Radioactividad

La **radioación radioactiva** es el conjunto de partículas emitidas por una muestra radioactiva. Ya a finales del S.XIX y principios del S.XX se empezó a estudiar que había partículas que atravesaban la materia, dejaban señales en las placas fotográficas y que ionizaban el aire o gases y los tornaban conductores eléctricos, etc. Éstos pueden ser naturales, o inducidos (o artificiales). Hay de varios tipos:

Partículas α : son núcleos de helio emitidos a velocidades cercanas a $1/20\ c$. Se representan por el símbolo α y por el ${}^{4}_{2}He$.

Partículas β : son electrones y positrones que son emitidos a velocidades cercanas a 0,99 c. Se distinguen dos:

- **Emisión** β^+: Se emiten positrones. Se simboliza mediante ${}^{0}_{+1}\beta$, ${}^{0}_{+1}e$ o ${}^{0}_{+1}e^+$.
- **Emisión** β^-: Se emiten electrones. Se simboliza mediante ${}^{0}_{-1}\beta$, ${}^{0}_{-1}e$ o ${}^{0}_{-1}e^-$.

Partículas γ : es un tipo de radiación electromagnética que se propagan en el vacío a la velocidad de la luz con energía cercana al MeV. La emisión gamma suele ir después de las emisiones α y β debido a que el núcleo radioactivo pasa desde un estado excitado (estado de más energía) a un estado estable (de menos energía), emitiendo así fotones.

4.2.5. Ley exponencial de la desintegración radioactiva

El proceso por el cual los núcleos radioactivos emiten ciertas partículas y se transforman en núcleos diferentes se llama **desintegración radioactiva**. Matemáticamente, se expresa así:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \tag{4.13}$$

Donde λ es la denominada **constante de desintegración.** Definimos el **periodo de semidesintegración,** $T_{1/2}$, o de **semivida**, como el tiempo que tarda una muestra en reducirse a la mitad.

$$\frac{N}{2} = N\, e^{-\lambda T_{1/2}} \longrightarrow T_{1/2} = \frac{ln\ 2}{\lambda} \tag{4.14}$$

La **vida media,** τ, es la magnitud que expresa el valor medio del tiempo que tardan los núcleos de una sustancia radioactiva en desintegrarse.

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \tag{4.15}$$

La **actividad, A**, representa el número de desintegraciones que se dan por unidad de tiempo.

$$A = \lambda\, N \longrightarrow A = A_0 e^{-\lambda t} \tag{4.16}$$

La unidad de la actividad es la misma que la de λ, es decir, s^{-1}. Esta unidad también es denominada **becquerel, Bq** y equivale a una desintegración por segundo.

$$1\ Bq = 1\ s^{-1}$$

Otra unidad útil es el **curie, Ci**, y tiene una relación con becquerel tal que:

$$1\ Ci = 3{,}7 \cdot 10^{10}\ Bq$$

4.2.6. Reacciones nucleares

Mediante el bombardeo de partículas como neutrones, protones, electrones o partículas alpha, es posible alterar la estructura del núcleo para así estudiar cómo se comportan y se transforman estas partículas en otras. Con ello, lo que hacemos básicamente son reacciones nucleares. Si suponemos que se provoca una colisión entre el núcleo **X** y una partícula ligera **a**, la colisión da lugar a un núcleo distinto final **Y** y una partícula emitida **b**. Esto puede escribirse tal que:

$$a + X \rightarrow Y + b \leftrightarrow X(a, b)Y \tag{4.17}$$

La energía liberada en esta reacción es:

$$E = (\Delta m)c^2 \tag{4.18}$$

Donde $\Delta m = (M_Y + M_b) - (M_X - M_a)$. A partir de los principios de conservación se deduce que en toda reacción nuclear se conservan en número másico, el número atómico, el número bariónico, la carga, etc. Para las dos primeras, se verifica:

$$p + Z = p' + Z' \tag{4.19}$$

$$n + p + A = n' + p' + A' \tag{4.20}$$

Con lo cual, toda reacción nuclear puede ser representada mediante esta expresión:

$$^{n+p}_{p}a +^{A}_{Z} X \rightarrow^{n'+p'}_{p'} b +^{A'}_{Z'} Y \tag{4.21}$$

Finalmente, presentemos las reacciones nucleares que utilizaremos en los ejercicios.

Emisión alpha : El núcleo radiactivo emite una partícula α (o lo que es lo mismo, un núcleo de helio ^4_2He. Se expresa mediante la siguiente expresión.

$$^{A}_{Z}X \rightarrow^{A-4}_{Z-2} X' + 4_2He \tag{4.22}$$

Emisión beta : El núcleo pierde una partícula β^-, o lo que es lo mismo, un electrón. Se expresa mediante la siguiente expresión.

$$ {}_Z^AX \rightarrow_{Z+1}^A X' +_{-1}^0 \beta \Leftrightarrow_Z^A X \rightarrow_{Z+1}^A X' +_{-1}^0 e \tag{4.23}$$

En cambio, si el núcleo pierde una partícula β^+, o lo que es lo mismo, un positrón. Se expresa mediante la siguiente expresión.

$$ {}_Z^AX \rightarrow_{Z-1}^A X' +_{+1}^0 \beta \Leftrightarrow_Z^A X \rightarrow_{Z-1}^A X' +_{+1}^0 e \tag{4.24}$$

Así pues, los núcleos se desintegran emitiendo partículas β^- o β^+.

$$ {}_0^1n \rightarrow_1^1 p^+ +_{-1}^0 e^- \Leftrightarrow_1^1 p^+ \rightarrow_0^1 n +_{+1}^0 e^+ \tag{4.25}$$

Emisión gamma : Si un núcleo atómico se encuentra en un estado excitado (de mayor energía) puede desprenderse de esta energía e ir a parar al estado fundamental o más estable, emitiendo una partícula gamma. Se expresa mediante la siguiente expresión:

$$X^* \rightarrow X + \gamma \tag{4.26}$$