

SÈRIE 3

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar qualsevol decimal i després arrodonir la suma total. Podeu matisar la nota de cada pregunta amb signes + i -, de manera a compensar els matisos entre totes les preguntes.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Valoreu totes les parts de cada subapartat que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0.25 o 0.5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0.75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.
- Copieu la nota de la pregunta i en la casella i , a fi de poder fer estadístiques sobre cada qüestió.

QÜESTIONS

1. Considereu la funció

$$f(x) = \frac{x^2}{2x-1}.$$

- a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la corba $y = f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 2$.
 b) Determineu els intervals de creixement i decreixement, així com els extrems, si n'hi ha.

Puntuació: Cada apartat 1 punt. Total 2 punts.

Solució: a) La funció derivada és $f'(x) = \frac{2x(2x-1) - 2x^2}{(2x-1)^2} = \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}$.

Per tant: $f(2) = \frac{4}{3}$ i $f'(2) = \frac{4}{9}$, i la recta tangent té per equació:

$$y = \frac{4}{3} + \frac{4}{9}(x-2) \rightarrow \boxed{4x - 9y + 4 = 0}.$$

b) La derivada s'anul·la per $x = 0$ i per $x = 1$. Els intervals de creixement i decreixement i els extrems són doncs:

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1; \quad x \neq \frac{1}{2}$	$x = 1$	$x > 1$
	$f' > 0$	$f' = 0$	$f' < 0$	$f' = 0$	$f' > 0$
f	creix	màx	decreix	min	creix
f		0		1	

El tipus d'extrem es pot determinar directament a partir del creixement i decreixement al voltant i per tant no és necessari calcular la derivada segona.

2. Resoleu el sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = -1 \\ -3x + y - 2z = 7 \\ 2x - 3y + z = -12. \end{cases}$$

Puntuació: Total 2 punts.

Solució: Resolem per Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & -12 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 7 & -17 & 4 \\ 0 & -7 & 11 & -10 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 7 & -11 & 10 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \end{array} \right)$$

D'on resulta: $z = 1$; $y = (10 + 11 \cdot 1) / 7 = 3$; $x = -1 + 5 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -2$.

3. Considereu el sistema d'inequacions següent:

$$\begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ x + y \geq 1 \\ 5x + y \leq 13 \end{cases}$$

a) Representeu gràficament la regió factible.

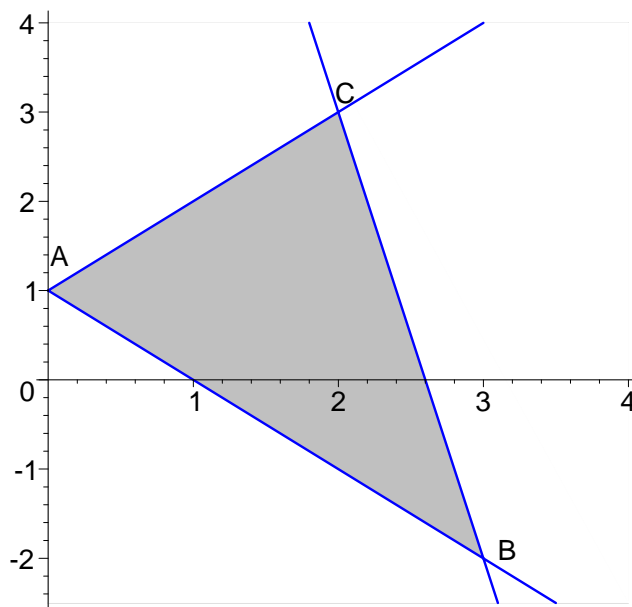
b) Calculeu el màxim de la funció $f(x, y) = x - 3y$ en aquesta regió.

Puntuació: Cada apartat 1 punt. Total 2 punts. La forma més convenient de determinar la regió és determinar els punts d'intersecció, però donat que no es demana calcular-los, es considerarà correcta la solució si el gràfic està ben fet. No obstant cal valorar la correcció del gràfic i descomptar puntuació si la claredat no és suficient.

Solució: a) Trobem els punts d'intersecció:

$$A: \begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 1 \end{cases} \rightarrow A(0, 1) \quad B: \begin{cases} x + y = 1 \\ 5x + y = 13 \end{cases} \rightarrow B(3, -2)$$

$$C: \begin{cases} x - y = -1 \\ 5x + y = 13 \end{cases} \rightarrow C(2, 3). \text{ Representem la regió factible:}$$



b) Trobem el màxim de $f(x, y) = x - 3y$ a la regió factible. Fem la taula:

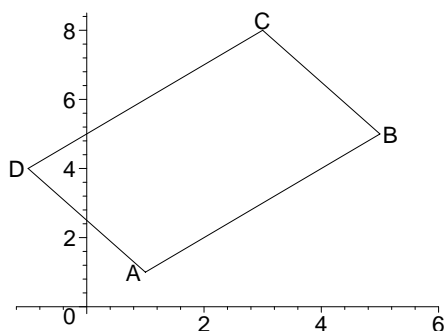
	A(0,1)	B(3,-2)	C(2,3)
$3x + 4y = 200$	-3	9	-7
		màxim	

Per tant el màxim és 9 i s'obté en el punt B(3,-2).

4. Escriviu un sistema d'inequacions lineals que doni com a zona solució l'interior del paral·lelogram que té vèrtexs A(1,1), B(5,5), C(3,8), i D(-1,4).

Puntuació: 1 punt per les equacions; 1 punt per les inequacions. Total 2 punts. Gradueu la puntuació en funció dels errors de càlcul i signes. Descompteu 0.25 punts per cada signe de les inequacions equivocats.

Solució: El paral·lelogram és:



Les condicions seran:

$$\text{Costat } AB; \quad y-1 > x-1; \quad y-x > 0.$$

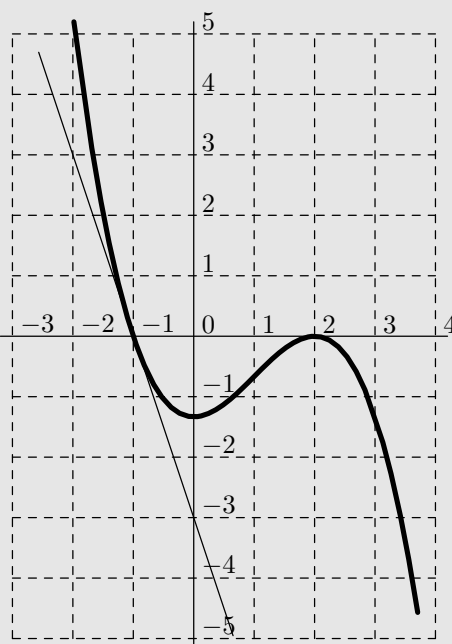
$$\text{Costat } BC; \quad y-5 < -\frac{3}{2}(x-5); \quad 3x+2y < 25.$$

$$\text{Costat } CD; \quad y-4 < (x+1) \quad y-x < 5.$$

$$\text{Costat } DA; \quad y-1 > -\frac{3}{2}(x-1) \quad 3x+2y > 5.$$

PROBLEMES

5. La corba $y = f(x)$ de la figura té per domini el conjunt de tots els nombres reals.



- Determineu els punts on la funció val 0. Determineu els valors de x pels quals la funció és positiva.
- Digueu en quins punts s'anul·la la derivada i en quins punts $f'(x) < 0$.
- Trobeu l'equació de la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 2$.
- Determineu la recta tangent en el punt d'abscissa $x = -1$.
- Determineu a sabent que $f(x) = a(x+1)(x-2)^2$.

Puntuació: Apartat a) 0.5 punts; apartat b) 0.5 punts; apartat c) 0.5 punts; apartat d) 1 punt; apartat e) 1.5 punts. Total 4 punts. L'apartat e) és el més difícil donat que l'únic valor no nul que és clarament llegible a la gràfica és el de la derivada en el punt $x = -1$. Tot raonament correcte que conduïxi a un valor aproximat de a ha de ser valorat fins a 1 punt.

Solució: a) La funció val 0 per $x = -1$ i per $x = 2$, i és positiva per $x < -1$.

b) La derivada s'anul·la per $x = 0$ i per $x = 2$ i $f'(x) < 0$ per $x < 0$ i $x > 2$.

c) La recta tangent per $x = 2$ és $y = 0$

d) El pendent de la recta tangent en el punt d'abscissa $x = -1$ és -3 i la funció val 0. Per tant, la recta tangent és: $y = -3(x + 1)$.

e) Tenim

$$f(x) = a(x+1)(x-2)^2 = a(x^3 - 3x^2 + 4).$$

Per tant, la derivada és $f'(x) = a(3x^2 - 6x)$. Com aquesta val -3 per $x = -1$ obtenim

$a(3 + 6) = -3$, d'on resulta $a = -\frac{1}{3}$. Per tant la funció és:

$$f(x) = -\frac{1}{3}(x+1)(x-2)^2 = -\frac{1}{3}(x^3 - 3x^2 + 4).$$

6. Una persona va a la vinateria i compra tres tipus de vi. En total compra 20 botelles i s'hi gasta 100 €. Compra botelles de tres classes A, B i C, que costen 3 €, 7 € i 8 € respectivament. Trobeu el nombre de botelles de cada classe que ha comprat, sabent que al menys n'ha comprat una de cada classe.

Puntuació: 1.5 punts pel plantejament; 1 per la solució genèrica i 1.5 punts per la discussió amb enters. Total: 4 punts.

Solució: Anomenant respectivament x, y, z als nombres de botelles dels tipus A, B i C el sistema de condicions és:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 20 \\ 3x + 7y + 8z = 100 \\ x \geq 1 \\ y \geq 1 \\ z \geq 1 \end{array} \right\} \text{d'on per Gauss: } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 3 & 7 & 8 & 100 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 4 & 5 & 40 \end{array} \right)$$

$$\text{Així: } y = \frac{40 - 5z}{4} = 10 - 5\frac{z}{4} \text{ i } x = 10 + \frac{z}{4}.$$

Com x, y, z han de ser enters més grans o igual que 1, necessàriament z ha de ser múltiple de 4. El mínim valor de z possible és 4, pel qual corresponen $x = 11$, $y = 5$ i $z = 4$. Aquests són els únics valors possibles de x, y, z , ja que si posem $z = 8$ resultaria $y = 0$ que ja és incompatible amb les hipòtesis.