

## SÈRIE 1

## QÜESTIONS

1. Considereu el sistema d'inequacions següent:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 10 \\ x + y \leq 8 \\ x \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- a) Representeu gràficament la regió de solucions [1 punt]  
 b) Determineu el màxim de la funció  $f(x, y) = 2x + y$  en aquesta regió. Digueu per a quins valors s'assoleix aquest màxim. [1 punt]

**Puntuació:** Descomptar 0.5 punts en b) si no donen tot l'interval solució.

**Solució:**

- a) Els punts d'intersecció són:

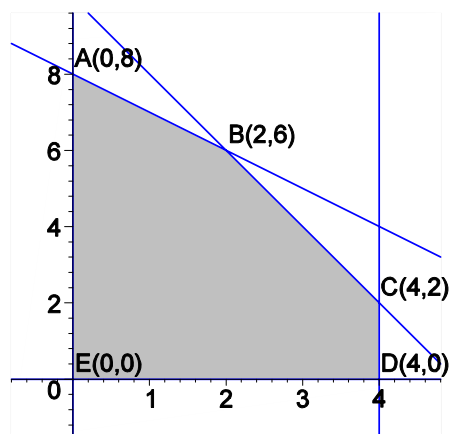
$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + y = 10 \end{cases} \rightarrow B = (2, 6)$$

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ x = 4 \end{cases} \rightarrow C = (4, 2)$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow D = (4, 0)$$

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow A = (0, 8)$$

La gràfica és:



b) Els valors de  $f(x, y)$  en els vèrtexs de la regió solució són:

	A(0,8)	B(2,6)	C(4,2)	D(4,0)	E(0,0)
$f(x, y) = 2x + y$	8	10	10	8	0
		màxim	màxim		

I s'obté el màxim en tot el segment BC i té per valor  $f(x, y) = 10$ .

2. Digueu si un sistema de dues equacions amb tres incògnites pot ser incompatible. Justifiqueu la resposta i, si escau, exemplifiqueu-ho. [2 punts]

**Puntuació:** Posar un bon exemple 1.5 punts; raonament 0.5 punts. Total 2 punts.

**Solució:**

Un sistema amb més d'una equació pot ser incompatible, independentment del nombre d'incògnites. Només cal que hi hagi, per exemple, dues equacions amb termes de les incògnites iguals i els termes independents diferents. Aleshores, cap valor de les incògnites satisfarà ambdues equacions.

Exemple:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{array} \right\}$$

3. Calculeu els paràmetres  $a, b, c$  de la funció  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , sabent que la recta  $5x - y - 2 = 0$  és tangent a la corba  $f(x)$  en el punt d'abscissa  $x = 0$  i que el valor mínim absolut que pren la funció és  $-49/12$ . [2 punts]

**Puntuació:** Raonament i/o planteig correcte 1 punt; solució 1 punt; Total 2 punts.

**Solució:**

El pendent de la recta tangent a la paràbola en un punt d'abscissa  $x$  és el valor de la derivada  $f'(x) = 2ax + b$ , i si  $x = 0$ , el pendent és  $b$ . El pendent de la recta és 5, i per tant ha de ser  $b = 5$ . Per  $x = 0$  el valor de  $y$  de la recta és  $y = -2$ , i el valor de  $y$  de la paràbola és  $c$ . Per tant ha de ser  $c = -2$ . El valor mínim de  $f(x)$  s'obté en el punt on  $f'(x) = 2a + b = 0$ , o sigui per  $x = -\frac{b}{2a}$ , i en aquest punt, la funció pren el valor

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = -\frac{b^2}{4a} + c$$

Substituint els valors de  $b, c$  obtenim  $-\frac{25}{4a} - 2 = -\frac{49}{12}$ , d'on resulta  $a = 3$ . Per tant la

funció és  $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$ .

4. Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left. \begin{array}{l} 3x - y + 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + 3y = 0 \end{array} \right\}$$

- a) Expliqueu, raonadament, quantes solucions té.  
b) Trobeu una solució amb  $z = 5$ .

[1 punt]

[1 punt]

**Solució:**

- a) És un sistema homogeni. Per tant sempre té almenys la solució trivial  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ . En aquest cas, resolent per Gauss tenim:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -10 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I per tant té una infinitat de solucions, dependent del valor de  $z$ .

$$-5y = -z; \quad y = \frac{1}{5}z;$$

$$x = -3y; \quad x = -\frac{3}{5}z;$$

- b) Per  $z = 5$ , resulta  $y = 1, x = -3$ .

**PROBLEMES**

5. Un llibreter vol fer una comanda de dos classes de llibres a dos editors, A i B. L'editor A ofereix lots de 5 llibres d'assaig i 5 novel·les per 50 €. L'editor B ofereix lots de 5 llibres d'assaig i 10 novel·les per 150 €. El llibreter vol comprar, com a mínim, 2500 llibres d'assaig i 3500 novel·les. Per un compromís adquirit amb l'editor B, no pot comprar a l'editor A més de 3 vegades el que compra a l'editor B. Determineu quants lots haurà de comprar a cada editor per minimitzar a el cost i poder complir el seu compromís. [4 punts]

**Puntuació:** Inequacions 1 punt; vèrtexs 1 punt; gràfica 1 punt; solució 1 punt. Total 4 punts.

**Solució:**

Planteig: Taula de dades:

	assaig	novel·la	preu/lot
A	5	5	50
B	5	10	150
	2500	3500	

Siguin  $x, y$  el nombre de lots que compra respectivament als llibreterers A i B.

Inequacions:

$$\left. \begin{array}{l} 5x+5y \geq 2500 \\ 5x+10y \geq 3500 \\ x \leq 3y, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x+y \geq 500 \\ x+2y \geq 700 \\ x \leq 3y, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Vèrtexs:

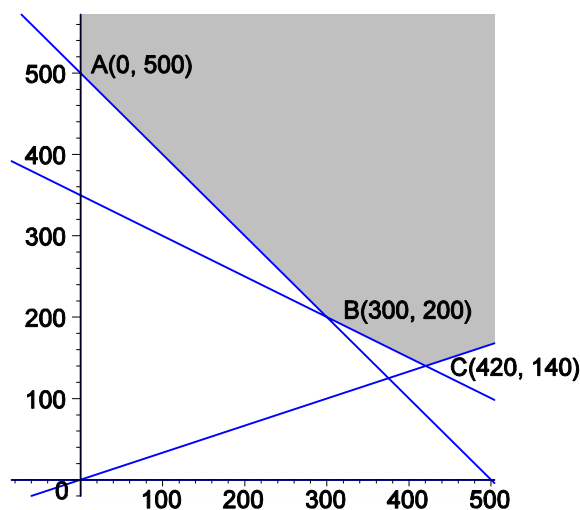
$$\left. \begin{array}{l} x+y = 500 \\ x = 0 \end{array} \right\} \rightarrow A(0,500) \quad \left. \begin{array}{l} x+y = 500 \\ x+2y = 700 \end{array} \right\} \rightarrow A(300,200)$$

$$\left. \begin{array}{l} x+2y = 700 \\ x = 3y \end{array} \right\} \rightarrow C(420,140)$$

Funció objectiu:  $f(x, y) = 50x + 150y$ .

S'ha de trobar el seu mínim absolut.

Gràfica :



Valors de la funció de cost:

	A(0,500)	B(300,200)	C(420,140)
$f(x, y) = 50x + 150y$	75000	45000	42000

Per altra banda, sobre la semirrecta  $y = \frac{1}{3}x$  que s'inicia en el punt C(420,140) en el

sentit d'augmentar  $x$  i  $y$ , el valor de la funció és:  $f(x, y) = 50x + 150 \frac{x}{3} = 100x$  que creix

al créixer  $x$ . Per tant, el punt C(420,140) representa clarament el mínim de la funció.

Ha de comprar 420 lots al llibreter A i 140 lots al llibreter B i el cost total mínim corresponent, preservant les restriccions, és de 42000 €.

6. La taxa d'inflació interanual d'un determinat país durant l'any 2007 expressada en punts percentuals,  $i(t)$ , es pot aproximar mitjançant la funció:

$$i(t) = \frac{t^2 - 10t + 9}{40} + 3, \quad 1 \leq t \leq 12,$$

en què  $t$  és el temps en mesos des del començament de l'any i  $t=1$  és el mes de gener.

- Trobeu en quins mesos la taxa d'inflació interanual se situa en 3 punts percentuals [1 punt]
- Trobeu en quins mesos la taxa d'inflació és decreixent i en quins és creixent [0.5 punts]
- Trobeu en quin mes la taxa d'inflació assoleix el valor mínim i calculeu aquest valor [0.5 punts]
- Feu un esbós de la gràfica d'aquesta funció. [1 punt]
- Trobeu en quin mes la taxa d'inflació assoleix el valor màxim i calculeu aquest valor [1 punt]

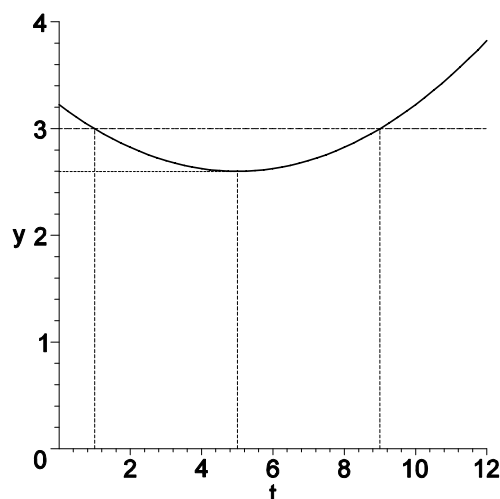
**Solució:**

a) Planteig:  $\frac{t^2 - 10t + 9}{40} + 3 = 3$ . Així doncs  $t^2 - 10t + 9 = 0$ , obtenint-ne dues solucions  $t = 1$  i  $t = 9$  (gener i setembre).

b) Creixement i decreixement:  $i'(t) = \frac{2t - 10}{40}$ , que és positiu si  $t > 5$  i negatiu si  $t < 5$ . Per tant **creix en l'interval**  $t > 5$  (juny, juliol, agost, setembre, octubre, novembre, desembre) i **decreix en l'interval**  $t < 5$  (gener, febrer, març, abril).

c) El mínim és per  $t = 5$  (maig) i la inflació és  $i(5) = 2,6\%$ .

d) Gràfica:



e) El valor màxim absolut s'obté el mes de desembre i val  $i(12) = \frac{153}{40} = 3,825\%$ .