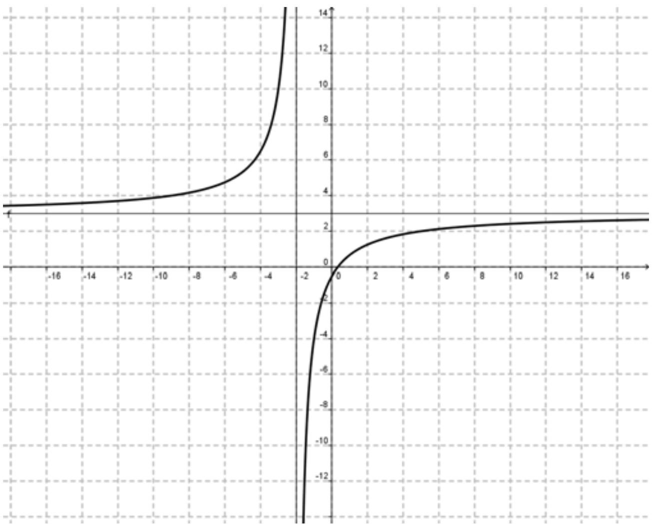
SÈRIE 1

Pregunta 1

a.
$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-1}{x+2} = 3$. Per tant, y = 3 és asímptota horitzontal de f.
$\lim_{x\to -2} \frac{3x-1}{x+2} = \infty$. Per tant, x = -2 és asímptota horitzontal de f.

b.
En ser creixent en tot el seu domini i correspondre x = -2 a una asímptota vertical, $\lim_{x\to -2^-} \frac{3x-1}{x+2} = +\infty$ i $\lim_{x\to -2^+} \frac{3x-1}{x+2} = -\infty$, La gràfica de la funció és:



Pregunta 2

a.
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = b$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = e^0 + 1 = 2$. Si la funció ha de ser contínua en x = 0, cal que sigui b = 2.

b.
Per a valors positius de x tenim $f'(x) = -e^{-x}$, que és estrictament negativa. Per tant, f és decreixent per a tots els valors positius de x.

Pregunta 3

Cada llapis A costa 50 €. Per tant, cada llapis B costa $\frac{90}{100} \cdot 50 = 45$ €, i cada llapis C costa $\frac{60}{100} \cdot 50 = 30$ €. Si anomenem x al nombre de llapis de tipus A que han venut, y al nombre de llapis de tipus B i z al nombre de llapis de tipus C, les dades del problema es tradueixen algebraicament com:

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=225 \\ 50x+45y+30z=10.500 \\ x=2(y+z) \end{array}\right\} \text{ o bé, } \left.\begin{array}{c} x+y+z=225 \\ 50x+45y+30z=10.500 \\ x-2y-2z=0 \end{array}\right\}$$

. Dividint per 5 la segona equació i resolent pel mètode de Gauss tindrem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 10 & 9 & 6 & 2100 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 40 \\ 0 & 1 & 4 & 150 \\ 0 & 3 & 3 & 225 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 0 & 1 & 4 & 150 \\ 0 & 0 & 9 & 225 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{c} x+y+z=225 \\ y+4z=150 \\ 9z=225 \end{array}\right\}$$

d'on obtenim z = 25, y = 50, x = 150. Per tant, la botiga ha venut 150 llapis de tipus A, 50 de tipus B i 25 de tipus C.

Pregunta 4

a.

La funció cost mitjà serà, per tant, $Q(q) = \frac{q^2}{100} + 4 + \frac{20}{q}$. Per tant,

$Q(5) = \frac{25}{100} + 4 + \frac{20}{5} = 8{,}25$;

$Q(20) = \frac{400}{100} + 4 + \frac{20}{20} = 9$.

b.

$Q'(q) = \frac{q}{50} - \frac{20}{q^2} = \frac{q^3 - 1000}{50q^2}$. Aquesta derivada s'anul·la quan q = 10.

Si q < 10, Q' és negativa. Si q > 10, Q' és positiva. Per tant, q = 10 correspon a un mínim, i el cost corresponent és $Q(10) = 7$.

Pregunta 5

a.
La recta AC és x = 2. La recta AB és y = 0. La recta BC és $y = -2x + 8$. Per tant, les inequacions demanades són:

$$\left.\begin{array}{r} x \geq 2 \\ y \leq -2x + 8 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}.$$

b.
$z(2,4) = 8$; $z(2,0) = 4$; $z(4,0) = 8$. Per tant, el valor màxim és 8, i s'assoleix en tots els punt del segment AC.

Pregunta 6

a.
Si el sistema ha de ser incompatible, la recta r' ha de ser de la forma $x + 2y = k$. Si ha de passar per l'origen, cal que sigui k = 0. Les rectes r i r' són paral·leles.

b.
Si el sistema és compatible indeterminat significa que té tota una recta de solucions: les rectes r i s són, per tant, la mateixa recta.

SÈRIE 4

Pregunta 1

Anomenarem x al nombre d'ampolles d'aigua, y al nombre d'ampolles de llet i z al nombre d'ampolles de suc que hem comprat. Aleshores les dades del problema es tradueixen en:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=40\\ 0{,}5x+y+1{,}5z&=38\\ x+0{,}5y+1{,}5z&=34\end{aligned}\right\}.$$

Resolent-lo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 40\\ 0{,}5 & 1 & 1{,}5 & 38\\ 1 & 0{,}5 & 1{,}5 & 34\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 40\\ 0 & 1 & 2 & 36\\ 0 & -0{,}5 & 0{,}5 & -6\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 36\\ 0 & 0 & 3 & 24\end{array}\right)\to\left.\begin{aligned} x+5y+2z&=2\\ y+2z&=36\\ 3z&=24\end{aligned}\right\}$$

que, una vegada resolt, ens dóna x = 12, y = 20 , z = 8, és a dir, hem comprat 12 ampolles d'aigua, 20 de llet i 8 de suc de fruites.

Pregunta 2

a.

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$. Per tant, la funció no té asímptota horitzontal.

$\lim_{x\to -1} f(x)=\infty$. Per tant, la recta x = -1 és asímptota vertical de f.

b.

$f'(x)=\dfrac{-4x^2-8x}{(x+1)^2}=-3$ que, un cop ordenada, ens dóna $x^2+2x-3=0$, d'on obtenim x = 1 i x = -3. Per tant, com que $f(1)=-2$ i $f(-3)=18$, els dos punts són (1,-2) i (-3,18).

Pr

Pregunta 3

a.

$f'(x)=e^{-x}-x\cdot e^{-x}=e^{-x}(1-x)$. com que el primer factor és sempre positiu i el segon només s'anul·la a x = 1 tenim que la funció és creixent per a x < 1 i decreixent per a x > 1. Per tant, x = 1 correspon a un màxim relatiu.

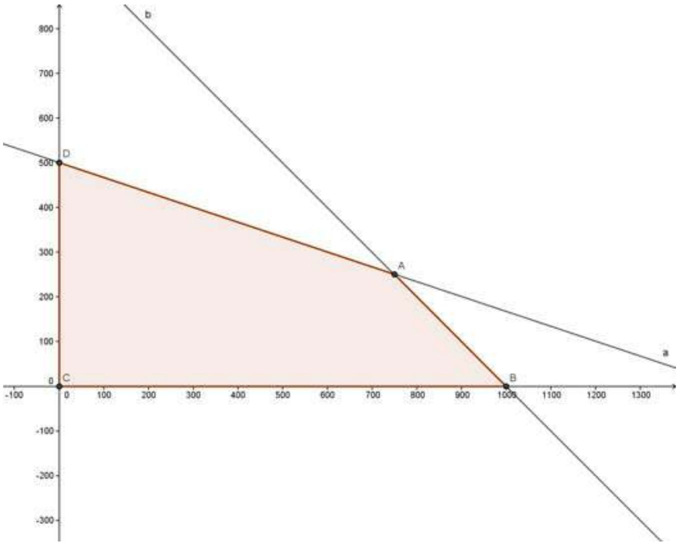
b.

$f(0)=0$ i $f'(0)=1$. Per tant, la recta demanada és y = x.

Pregunta 4

Anomenarem x al nombre de lots de tipus A, i y al nombre de lots de tipus B que venen. La traducció de les dades del problema és, aleshores,

$$\left.\begin{array}{r} x+3y\leq 1500 \\ x+y\leq 1000 \\ x\geq 0,\, y\geq 0 \end{array}\right\}.$$



La funció objectiu és la funció dels guanys: $G(x,y)=0,7x+y$. Si ara dibuixem la regió factible del problema obtindrem el gràfic adjunt.

El vèrtex A de la regió factible es determina com a intersecció de les dues rectes, i resulta ser el punt A(750,250). De la mateixa manera obtenim B(1000,0), C(0,0), D(0,500). La funció de guanys en aquests punts és, doncs: $G(750,250)=775$, $G(1000,0)=700$, $G(0,0)=0$, $G(0,500)=500$, Per tant, els convé vendre 750 lots de tipus A i 250 lots de tipus B.

Pregunta 5

a.

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & -2 & -3\end{pmatrix};\quad (A+B)^2=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & -2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & -2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

D'altra banda,

$$A^2=\begin{pmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{pmatrix};\quad B^2=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

$A\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Per tant.

$A^2+2A\cdot B+B^2=\begin{pmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -4 & -6\\ -2 & 5 & 6\\ 2 & -4 & -5\end{pmatrix}$. No són iguals.

b.

$(P+Q)^2=P^2+P\cdot Q+Q\cdot P+Q^2$, que serà el mateix que $P^2+2P\cdot Q+Q^2$ quan es verifiqui P·Q = Q·P, és a dir, les matrius P i Q commutin.

Pregunta 6

a.

$f(0)=162$,

$0=-2x^2+48x+162=-2(x^2-24x-81)=-2(x-27)(x+3)\rightarrow x=27$. En el moment de declarar-se l'epidèmia hi havia 162 animals malalts. L'epidèmia durarà 27 setmanes.

b.

$f'(x)=-2(2x-24)$ que s'anul·la per a x = 12. Correspon a un màxim ja que per a x < 12 la derivada és positiva, i per a x > 12 és positiva. A més, f(12)=450. Per tant, el nombre més gran d'animals afectats es donarà a la dotzena setmana, i n'hi haurà 450.

SÈRIE 5

Pregunta 1

a.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x+5y+2z=2 \\ -6y-3z=0 \end{array}\right\}.$$

Aïllant obtenim la solució general en funció de z: $\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}z+2 \\ y=-\frac{1}{2}z \end{array}\right\}.$

b.
Si fem z = 2 obtenim x = 3, y = -1.

Pregunta 2

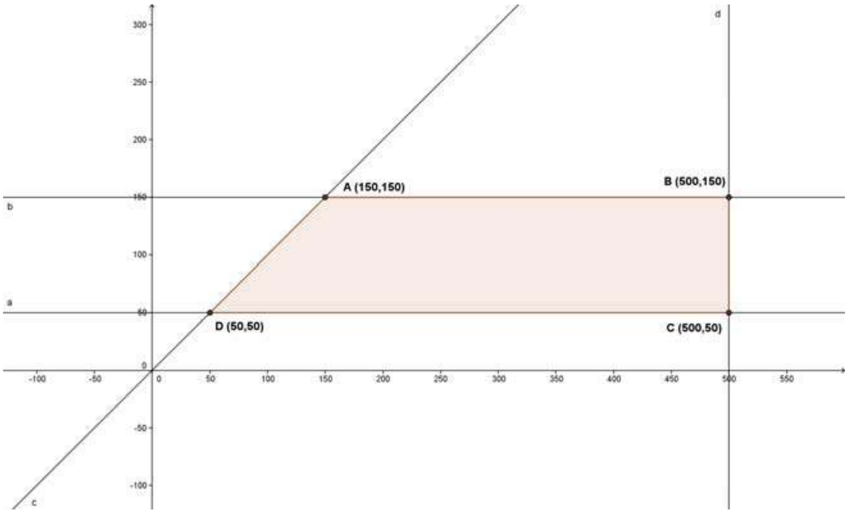
Les dimensions de la finestra seran de x dm. horitzontals per y dm. verticals. D'una banda tenim que $x \cdot y = 100$ d'on $y = \frac{100}{x}$. Per tant, el cost de la finestra serà $C(x) = 6x + \frac{2400}{x}$, funció de la que hem de trobar el seu mínim. Tindrem $C'(x) = 6 - \frac{2400}{x^2}$. Aquesta derivada s'anul·la quan x = 20, que correspon a un mínim ja que la funció C(x) és decreixent quan x < 20 i és creixent quan x > 20. Per tant, les dimensions de la finestra que la fan el més barata possible són de 20 dm. horitzontals per 5 dm. verticals.

Pregunta 3

Suposarem que el concessionari ven x motos de 50 cc. i y motos de 125 cc. Aleshores els guanys del concessionari seran de $G(x,y) = 600x + 1000y$, i les restriccions de l'enunciat es tradueixen com:

$$\left.\begin{array}{r} y \geq 50 \\ y \leq 150 \\ x \geq y \\ x \leq 500 \end{array}\right\}.$$

La representació gràfica de la regió factible és:

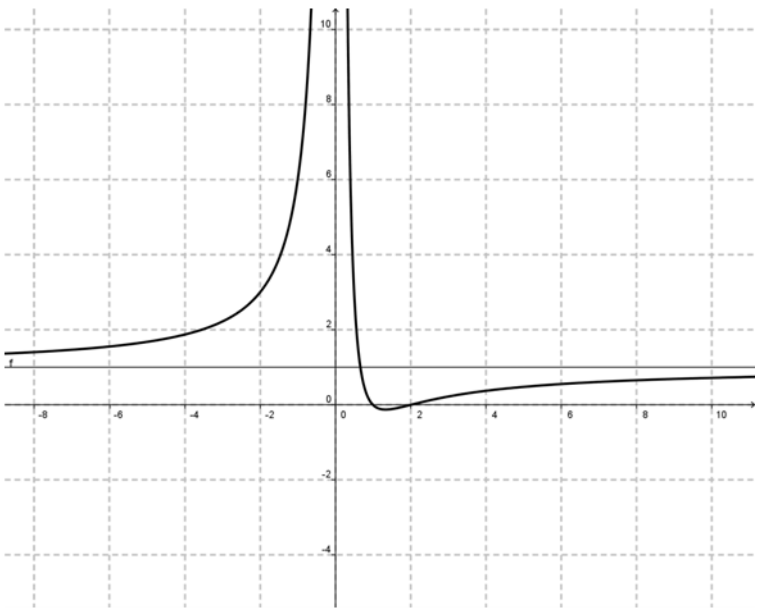


Tindrem, doncs, $G(150,150) = 240.000$, $G(500,150) = 450.000$, $G(500,50) = 350.000$, $G(50,50) = 80.000$. Per tant, els màxims guanys es produiran quan venen 500 motos de 50 cc. i 150 motos de 125 cc.

Pregunta 4

a.
$f'(x) = \dfrac{(2x-3)\cdot x^2 - (x^2-3x+2)\cdot 2x}{x^4} = \dfrac{3x-4}{x^3}$. La recta $x+y=5$ té pendent -1. Tindrem, doncs, $\dfrac{3x-4}{x^3} = -1 \rightarrow x^3+3x-4=0 \rightarrow x=1$. Com que $f(1)=0$, el punt demanat és el (1,0).

b.
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$: la recta y = 1 és asímptota horitzontal de la funció f.
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$: la recta x = 0 és asímptota vertical de la funció f.



Pregunta 5

a
La funció f és producte de dos factors que no són negatius per a cap valor de x. Per tant, no existeix cap valor de x tal que $f(x)<0$. f(0)=0, i cap altre valor no ho pot verificar ja que, per a tot x, $e^x > 0$.

b
$f'(x) = 2x\cdot e^x + x^2\cdot e^x = x\cdot e^x(2+x)$. $f'(-1) = -e^{-1}\cdot 1 < 0$: la funció és decreixent en aquest punt.
Si x > 0 els tres factors de f' són estrictament positius. Per tant, f és creixent per a tot valor positiu de x.

Pregunta 6

a.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$. Tenim que $A^{-1} = A$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$ Per tant, $B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

b.

$$A \cdot X \cdot B = 2C \rightarrow X = A^{-1} \cdot 2C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 12 & -8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$