

SÈRIE 2**RECORDEU:**

- Podeu valorar amb tants decimals com considereu convenient, però aconsellem no fer-ho en més de dos decimals.
- Cal arrodonir a un decimal la nota final de l'examen, no les notes parcials.

1. Quan sumem 2 unitats al denominador d'una fracció, la nova fracció val 1 unitat. En canvi, si a la fracció original sumem 3 unitats al seu numerador, la fracció val 2 unitats. Determineu la fracció original.

Anomenarem la fracció cercada $\frac{x}{y}$. Les condicions del problema signifiquen

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{y+2} = 1 \\ \frac{x+3}{y} = 2 \end{array} \right\} \text{ que, una vegada resolt el sistema, ens dona } x = 7, y = 5. \text{ Per}$$

tant, la fracció que ens demanaven és $\frac{7}{5}$.

2. Considerem la funció $f(x) = x^3 - ax^2 + 9x + b$.

- a. Determineu a i b sabent que la gràfica de f passa pel punt $P(2,2)$ i té un extrem a $x = 1$.
- b. En el cas $a = 6$, $b = 0$, determineu els possibles màxims i mínims de f , i classifiqueu-los.

a.

Com que passa per $P(2,2)$, $f(2) = 2$, que es tradueix en $2 = 8 - 4a + 18 + b \rightarrow 4a - b = 24$. D'altra banda, $f'(x) = 3x^2 - 2ax + 9$. Com que f té un extrem en el punt $x=1$, $f'(1) = 0$, que es tradueix en $0 = 3 - 2a + 9 \rightarrow a = 6$ i, per tant, $b = 0$.

b.

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$. Per tant, la funció f té un extrem a $x=1$ i un altre a $x = 3$. Com que $f' > 0$ abans de $x = 1$ i $f' < 0$ després de $x = 1$, el punt $(1,4)$ és un màxim relatiu. Amb el mateix argument arribem a la conclusió que el punt $(3,0)$ correspon a un mínim relatiu.

3. Un fons d'inversions posa en marxa un producte financer que dona un benefici de $R(x)$ euros en fer una inversió de x centenars d'euros, segons la funció $R(x) = -0,01x^2 + 4x + 20$.

- Calculeu quina és la inversió que dona més benefici.
- Calculeu el tant per cent de benefici que s'obtindrà amb una inversió de 1000 €, i la corresponent a 10000 €.

a.

$R'(x) = -0,02x + 4$. Per tant, aquesta derivada s'anul·la quan $x = \frac{4}{0,02} = 200$. Aquest valor correspon a un màxim ja que, quan $x < 200$, R'

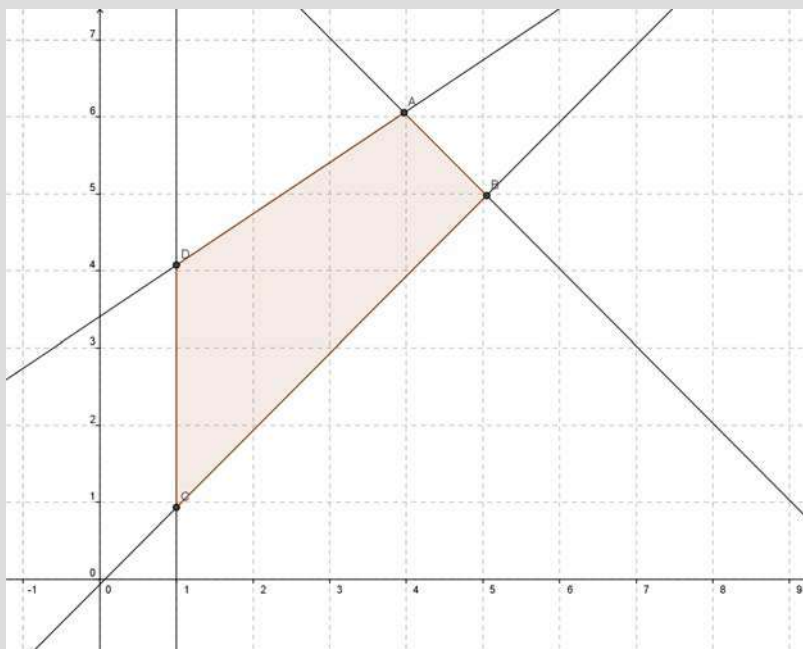
és positiva i quan $x > 200$ R' és negativa. Per tant, la inversió que dona més benefici és de 20.000 €.

b.

$R(10) = 59$. Per tant, la taxa de rendiment d'una inversió de 1000 euros és del 5,9%.

$R(100) = 320$. Per tant, la taxa de rendiment d'una inversió de 10000 euros és del 3,2%.

4. Considerem la regió del pla representada a la figura adjunta:



- Determineu les inequacions que defineixen els punts interiors i de la frontera del quadrilàter ABCD.
- Determineu en quins punts s'abasta el màxim i el mínim de la funció $f(x,y) = 2x - 2y + 7$, i quins són aquests valors.

a.

La recta AB és $y = -x + 10$. La recta BC és $y = x$. La recta CD és $x = 1$.

Finalment, la recta AD és $y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$. Les inequacions que ens demanen

són, doncs:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 1 \\ y \geq x \\ x + y \leq 10 \\ 3y - 2x \leq 10 \end{array} \right\}.$$

b.

$f(1,1) = 7$, $f(1,4) = 1$, $f(4,6) = 3$, $f(5,5) = 7$. Per tant, el valor mínim és 1, en el punt D. El màxim és 7, en tots els punts del segment BC.

5. Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Determineu la matriu X que verifica $X + BC = A^2$.
- Calculeu les matrius C^6 i C^7 .

a.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}. \quad \text{Per} \\ \text{tant, } X = A^2 - B \cdot C = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

b.

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad \text{És a dir, les potències parells} \\ \text{seran la identitat, i les senars valdran } C.$$

6. Donada la funció $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$:

- Determineu-ne el domini, i els valors de x pels quals el signe de la funció f és negatiu.
- Determineu les asímptotes horitzontals i verticals de la funció f .

a.

El domini de f són tots els nombres reals excepte $x = -1$ i $x = 1$.

El numerador de la funció és no negatiu per a qualsevol valor de x . El denominador és negatiu pels valors de x compresos entre -1 i 1 . Per tant el signe de la funció és negatiu pels valors de x compresos entre -1 i 1 , excepte en $x = 0$.

b.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$. Per tant, $y = 1$ és asímptota horitzontal de la funció f .

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$. Per tant, $x = -1$ i $x = 1$ són asímptotes verticals de la funció f .