SÈRIE 4

1. Un equip científic ha estudiat l'evolució de la població d'una petita illa de la Polinèsia. Com a conclusió, ha determinat que, per tal d'obtenir una bona estimació de la població, cal fer servir l'expressió:

$$P(t) = 400 + 18t - 6t^{\frac{3}{2}}$$

on t indica els anys transcorreguts des del principi de l'estudi. Es demana:

a. Determineu la població de l'illa quan va començar l'estudi, i passat un any. Quina ha estat la taxa de creixement en aquest període? *[1 punt]*

b. Fins a quants anys després del començament de l'experiment va créixer la població de l'illa? Quin va ser el nombre màxim d'habitants? *[1 punt]*

a. P(0) = 400, P(1) = 412. La taxa de creixement en aquest període haurà estat de $\frac{12}{400} = 3\%$.

b. $P'(t) = 18 - 9\sqrt{t}$ que s'anul·la quan t = 4. Per a t<4 la derivada és positiva, i per a t>4 és negativa. Per tant, es tracta d'un màxim. A més, P(4) = 424. La població va créixer durant 4 anys, i va arribar a ser de 424 habitants.

2. Siguin les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ b & -1 \end{pmatrix}$$

a. Determineu el valor dels paràmetres a i b que fa que $A \cdot B = B \cdot A$. *[1 punt]*

b. Determineu el valor de a pel qual es verifica $A^2 = 2A$. *[1 punt]*

a. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 6+ab & -a \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 3a \\ 2b+2 & ab \end{pmatrix}$, que implica a = 0, b = - 4.

b. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & a \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2a & 2a \\ -4 & -2a \end{pmatrix}$. $2A = \begin{pmatrix} 4 & 2a \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$. Seran iguals quan a = 0.

3. En un hort hi ha plantades 50 pomeres. Cada arbre produeix 800 pomes. Per cada arbre addicional que hi plantem, la producció de cada arbre es redueix en 10 pomes. Quants arbres més ens cal plantar per a obtenir la producció més alta possible? Quina és aquesta producció? *[2 punts]*

Anomenarem x al nombre d'arbres addicionals que plantem. Aleshores, la producció en funció de x serà $P(x)=(50+x)(800-10x)=40000+300x-10x^2$. La seva derivada és $P'(x)=300-20x$, i s'anul·la a x = 15. Per a valors menors que aquest, la derivada és positiva i, per a valors més grans de 15, és positiva. Per tant, aquest valor correspon a un màxim de la funció. La producció màxima serà de 42.250 pomes.

4. Els beneficis d'una companyia de transport de viatgers vénen donats per la funció $B(x)=ax^2+bx+c$, on x és el preu que cobra per cada viatge. Sabem que si cobren 40 € per viatge, els beneficis són de 19.000 €. A més, si augmentem el preu un 25% el benefici que s'obté és el màxim, de 20.000 €. Tenint en compte aquestes dades, determineu els valor de a, b i c. *[2 punts]*

B(40)=19.000. Si augmentem el preu un 25%: $1{,}25\cdot 40=50€$.
El preu de 50€ suposa un benefici de 20000€, i a més aquest benefici és màxim. Aquestes condicions es tradueixen en:

$$\left.\begin{array}{l} B(40)=19000 \\ B(50)=20000 \\ B'(50)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1600a+40b+c=19000 \\ 2500a+50b+c=20000 \\ 100a+b=0 \end{array}\right\}$$

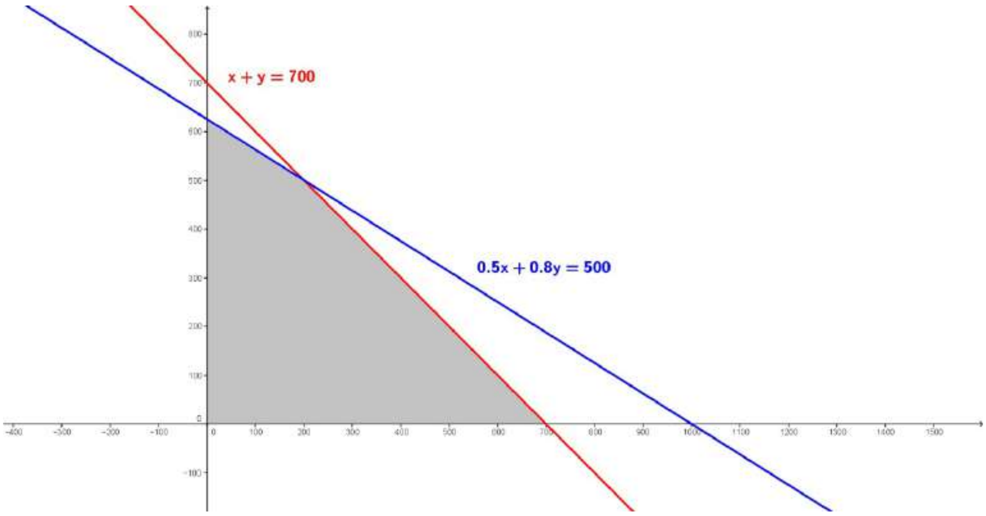
I resolent s'obtenen les solucions $a=-10$, $b=1000$ i $c=-5000$, de manera que la funció benefici és: $B(x)=-10x^2+1000x-5000$

5. Un botiguer va al mercat central amb la seva furgoneta, que pot carregar 700 Kg., i amb 500 € a la butxaca, a comprar fruita per a la seva botiga. Hi troba pomes a 0,80 €/Kg i taronges a 0,50 €/Kg. Calcula que podrà vendre les taronges a 0,58 €/Kg, i les pomes a 0,90 €/Kg. Quina quantitat de pomes i de taronges li convé comprar si vol obtenir el benefici més gran possible?. *[2 punts]*

Si anomenem x i y a les quantitats de taronges i de pomes respectivament que comprarà, les dades es tradueixen en les inequacions:

$$\left.\begin{array}{c} x+y\le 700 \\ 0,5x+0,8y\le 500 \\ x\ge 0, y\ge 0 \end{array}\right\},$$

mentre que els guanys vindran donats per la funció $B(x,y)=0,08x+0,1y$. Dibuixant les dades del problema obtindrem:



Els vèrtexs del quadrilàter són, en sentit horari, (0,0), (0,625), (200,500), (700,0). Els guanys corresponents són: G(0,0) = 0, G(0,625) = 62,5, G(200,500) = 66, G(700,0) = 56. Per tant, els màxims beneficis s'obtenen comprant 200 kg de taronges i 500 kg de pomes.

6. Determineu els valors dels paràmetres a, b i c que fan que les corbes d'equacions $f(x)=x^3+ax+b$ i $g(x)=x^3+cx^2-2$ tinguin la mateixa recta tangent en el punt (1,1). *[2 punts]*

Substituint en les respectives funcions obtenim a + b = 0, c = 2. Calculant les derivades obtenim $\begin{cases} f'(x)=3x^2+a \\ g'(x)=3x^2+2cx \end{cases} \to \begin{cases} f'(1)=3+a \\ g'(1)=3+2c \end{cases} \to a=2c$. Per tant, a = 4, b = -4, c = 2.

SÈRIE 3

1. He anat a una botiga i he decidit comprar un pantaló, una camisa i unes sabates. Si faig la compra avui, em costarà tot plegat 120 €. A més, actualment, la camisa i les sabates costen, plegades, el doble del pantaló. Si m'espero una setmana, el pantaló i les sabates tindran un descompte del 20%, mentre que la camisa només en tindrà del 10%. D'aquesta manera pagaré 99 €. Quin és el preu inicial de cada article? *[2 punts]*

Anomenarem x al preu inicial del pantaló, y al de la camisa i z al de les sabates. Les dades del problema ens porten al sistema;

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=120 \\ y+z=2x \\ 0.8x+0.9y+0.8z=99 \end{array}\right\}$$

que, una vegada resolt per qualsevol mètode, dóna com a solució x = 40, y = 30, z = 50.
Per tant, el preu inicial del pantaló era de 40€, el de la camisa era de 30€ i les sabates valien 50€.

2. Donades les funcions $f(x)=x^3+5x^2+(3+k)x$, $g(x)=x^2+kx$.
   a. Determineu les abscisses dels punts de tall de les dues corbes. *[1 punt]*
   b. Determineu k perquè la paràbola donada per la funció g tingui el seu vèrtex en el punt d'abscissa x = 2, i determineu-ne l'ordenada. *[1 punt]*

a. $x^3+5x^2+(3+k)x=x^2+kx \to x^3+4x^2+3x=0 \to x=0, x=-1, x=-3$.

b. $g'(x)=2x+k$. Per tant, $g'(2)=4+k=0$ si $k=-4$. En aquest cas, $g(x)=x^2-4x$ d'on obtenim $g(2)=-4$: el vèrtex és (2,-4).

3. Sigui la matriu $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   a. Calculeu A^2 i A^3, A^4. *[1 punt]*
   b. Calculeu A^{201} i A^{344}. *[1 punt]*

a. $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. $A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. $A^4=A^2\cdot A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b. Com a conseqüència de l'apartat anterior, $A^{201}=A^{200}\cdot A=A$. Com que 344 és múltiple de 4, $A^{344}=Id$.

4. Una empresa agrícola ha recollit un total de 40 tones de fruita que produeixen un benefici de 0,80 euros/kg. Cada setmana que passa es produeix una pèrdua de 400 kg. de fruita, però el benefici augmenta en un cèntim per kg.
   a. Quin és el benefici obtingut si venem la fruita al cap de 9 setmanes? Quin percentatge de fruita hem hagut de llençar? *[1 punt]*
   b. Quina setmana de venda serà la que obté un benefici màxim? *[1 punt]*

a. El preu de la fruita passades 9 setmanes és 0,80 + 9.0,01 = 0,89 €/kg. Passat aquest temps l'empresa haurà de llençar 400.9=3600 kg de fruita. Per tant:
   i) El benefici que s'ha obtingut és $36400 \cdot 0{,}89 = 32396$ €.
   ii) Ha calgut llençar $\dfrac{3600}{40000} \cdot 100 = 9\%$ de la fruita.

b. Si anomenem x al nombre de setmanes que han de passar obtenim:

$$B(x) = (0{,}80 + 0{,}01x)(40000 - 400x) = 32000 + 80x - 4x^2$$

Aleshores B'(x) = 80 – 8x, que s'anul·la quan x = 10. En tractar-se d'una paràbola amb coeficient de segon grau negatiu podem afirmar, sense fer operacions, que es tracta d'un màxim. Per tant, els màxims beneficis s'obtenen passades 10 setmanes.

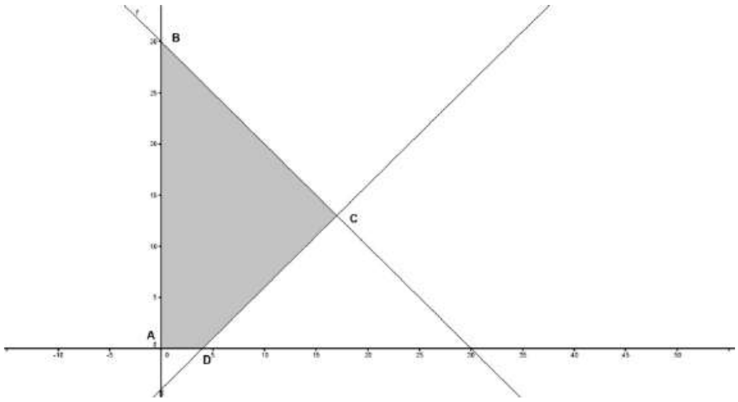
5. Segons uns estudis de laboratori, l'evolució de la població en un cultiu de bacteris al llarg del temps segueix la funció $f(t) = 30 \cdot \left(1 - e^{-t}\right) + 10$, on t són els dies que han transcorregut des de l'inici de l'experiment, i f(t) és la població, en milions de bacteris.
   a. Quina és la població en el moment de començar l'experiment? Justifiqueu si en algun moment s'arribarà a tenir 40 milions de bacteris. *[1 punt]*
   b. Hi haurà algun moment en què la població sigui màxima? Justifiqueu la resposta. *[1 punt]*

a. f(0) = 10. En el moment de començar l'experiment hi ha una població de 10 milions de bacteris.
Hi ha dos raonaments vàlids per a aquesta resposta:
1r. $30 \cdot \left(1 - e^{-t}\right) + 10 = 40 \rightarrow 1 - e^{-t} = 1 \rightarrow e^{-t} = 0$, que és impossible.
2n. $\lim_{t \to \infty} f(t) = 40$ i En ser f estrictament creixent (caldria calcular la derivada en aquest apartat) i tenir asímptota horitzontal, no pot tallar-la

b. Com s'ha indicat abans, $f'(t) = 30 \cdot e^{-t} > 0$. Per tant, la població no deixarà de créixer.

6. Tinc un problema: fabrico televisors LED, que em deixen un benefici de 100 € cadascun, i televisors de plasma, que em donen la meitat de benefici unitari. No puc produir més de 30 televisors al dia, i la diferència entre la producció dels LED menys els de plasma és, com a màxim, de 4 unitats. Quants he de produir de cada per a guanyar el màxim? *[2 punts]*

Si anomenem x al nombre de televisors LED que fabrico i y al nombre de televisors de plasma, les inequacions que defineixen la regió factible de la figura són les següents:



$$\left.\begin{aligned} x+y &\le 30 \\ x-y &\le 4 \\ x,y &\ge 0 \end{aligned}\right\}.$$

Els vèrtexs de la regió factible són A(0,0), B(0,30), C(17,13), D(4,0). La funció objectiu és $F(x) = 100x + 50y$. Els valors de la funció objectiu en aquests vèrtexs és F(A)=0, F(B)=1500, F(C)=2350, F(D)=400. Per tant, per a guanyar el màxim cal produir 17 TV LED i 13 TV de plasma.