

SÈRIE 3

-
1. En Pol, la Júlia i la Maria han comprat un regal. La Júlia ha gastat la meitat que la Maria, i en Pol n'ha gastat el triple que la Júlia.
- Expliqueu raonadament si amb aquestes dades en tenim prou per a determinar quant ha gastat cadascun d'ells. [1 punt]
 - Si a més ens diuen que entre tots tres han gastat 63 €, quant ha gastat cadascú? [1 punt]

a. Anomenarem x als diners que ha gastat en Pol, y als que ha gastat la Júlia i z als que ha gastat la Maria. Les dades es tradueixen amb el sistema

$$\begin{cases} y = \frac{z}{2} \\ x = 3y \end{cases}$$

Tenim tres incògnites i dues equacions. Per tant, no podem determinar el que ha gastat cadascú.

b. Ara el sistema d'equacions es converteix en:

$$\begin{cases} y = \frac{z}{2} \\ x = 3y \\ x + y + z = 63 \end{cases}$$

que té com a solucions $x = 31,5$, $y = 10,5$, $z = 21$. Per tant, en Pol ha gastat 31,5 €, la Júlia ha gastat 10,5 € i la Maria ha gastat 21 €.

2. La gràfica de la derivada f' de la funció f és una paràbola que talla l'eix d'abscisses en els punts $(5,0)$ i $(1,0)$, i té el vèrtex en el punt $(3,-4)$.
- Expliqueu raonadament en quins intervals la funció f és creixent i en quins intervals és decreixent. Indiqueu-ne els extrems relatius i classifiqueu-los. [1 punt]
 - Sabem que $f(3)=2$. Determineu l'equació de la recta tangent a la funció f en el punt $(3,2)$. [1 punt]

a. Amb aquestes dades podem afirmar que f' és positiva i, per tant, f és creixent, a $(-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$ i f' és negativa i, per tant, f és decreixent, a l'interval $(1, 5)$. En conseqüència, f té un màxim a $x = 1$ i un mínim a $x = 5$.

b. $f'(3) = -4$, que serà el pendent de la recta tangent que ens demanen. A més, $(3, 2)$ és el punt de tangència; la recta és $y - 2 = -4(x - 3)$ o bé $y = -4x + 14$.

3. Una cadena de televisió decideix emetre un nou programa en la franja horària de les 17:00 h a les 21:00 h. El percentatge d'audiència P de la primera emissió en funció del temps t , mesurat en hores, és definit per la funció

$$P(t) = \frac{1}{5}(-t^3 + 49t^2 - 760t + 3690) \quad 17 \leq t \leq 21$$

Els directius de la cadena acorden que el programa se seguirà emetent si en algun moment s'aconsegueix un percentatge d'audiència superior al 20 %.

- a. Expliqueu raonadament en quins intervals de temps l'audiència del programa va augmentar i en quins intervals va disminuir. [1 punt]
 - b. En vista dels resultats, se seguirà emetent el programa? Justifiqueu la resposta. [1 punt]
- a. $P'(t) = \frac{1}{5}(-3t^2 + 98t - 760)$ si $17 \leq t \leq 21$. L'únic valor positiu de l'interval que fa zero aquesta derivada és $t = 20$. A més, $P'(t)$ és positiva quan $t < 20$, i és negativa quan $t > 20$. Per tant, la funció té un màxim relatiu a $t = 20$. Tindrem, doncs, que el percentatge d'audiència va augmentar de les 17:00 h. fins a les 20:00 h., i va disminuir de les 20:00 h. a les 21:00 h.

b. Hem vist a l'apartat anterior que P té un màxim relatiu quan $t = 20$, amb un percentatge d'audiència de $P(20) = 18\%$. El signe de la derivada ens diu que $P(17)$ i $P(21)$ són menors que $P(20)$. Per tant, a les 20:00 h. s'aconsegueix el màxim absolut de percentatge d'audiència. En cap moment s'ha aconseguit, doncs, un percentatge igual o superior al 20% i per tant el programa es deixarà d'emetre.

4. Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ i $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, determineu x per tal que es verifiqui l'equació $A^2 - 6A + 5I = 0$, on 0 és la matriu en què tots els elements són 0. [2 punts]

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x^2 - 6x + 5 & 0 \\ 0 & x^2 - 6x + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

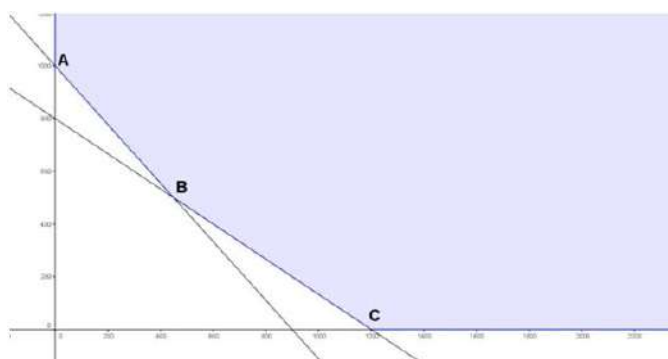
Resolent l'equació obtenim $x = 1$, $x = 5$.

5. Hem de fertilitzar els terrenys d'una finca utilitzant dos adobs A i B. El cost de l'adob A és de 0,9 €/Kg, i l'adob B costa 1,5 €/Kg. L'adob A conté un 20% de nitrogen i un 10% de fòsfor, mentre que l'adob B en conté un 18% i un 15%, respectivament. Per tal de fertilitzar els terrenys correctament ens cal un mínim de 180 kg de nitrogen i 120 Kg de fòsfor.
- Si anomenem x els kilograms d'adob A i y els kilograms d'adob B, escriu el sistema d'inequacions que satisfà les condicions anteriors. [1 punt]
 - Quina és la despesa mínima que hem de fer si volem fertilitzar els terrenys de la finca correctament? [1 punt]

a. El sistema és:

$$\left. \begin{array}{l} 0,2x + 0,18y \geq 180 \\ 0,1x + 0,15y \geq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- b. Els vèrtexs de la regió factible són $A(0,1000)$, $B(450,500)$, $C(1200,0)$. La regió factible és oberta. La funció objectiu és $z = 0,9x + 1,5y$, que ens els vèrtexs pren els valors $z(A) = 1500$, $z(B) = 1155$, $z(C) = 1080$. Per tant, la despesa mínima serà de 1080 €, si fertilitzem amb 1200 Kg. de l'adob A.



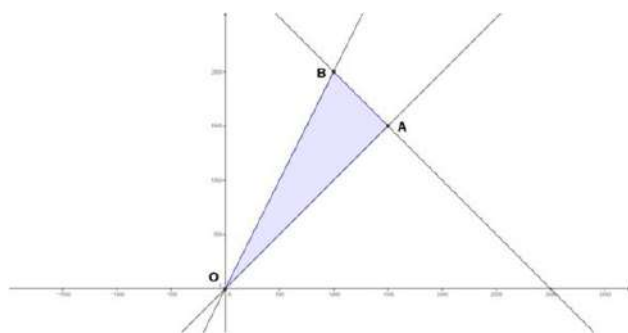
-
6. Sigui la funció $f(x) = x \cdot e^x$.
- Si la funció f té extrems relatius, determineu-los i classifiqueu-los. [1 punt]
 - Calculeu la recta tangent a la gràfica de f en el punt d'abscissa $x = 0$. [1 punt]
- a. $f'(x) = e^x(1+x)$, que només s'anul·la quan $x = -1$. Com que la derivada és negativa quan $x < -1$ i és positiva quan $x > -1$, la funció f té un mínim a $x = -1$.
- b. $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Per tant, la recta tangent és $y = x$.
-

SÈRIE 4

1. El preu en Borsa d'unes accions ve donat per la funció $p(t) = 500 \cdot e^{0,3t}$, on t indica els anys transcorreguts a partir del moment present.
- Si venem les accions d'aquí a un any, quin serà el percentatge de benefici? [1 punt]
 - D'aquí a quants anys haurem aconseguit doblar el preu de les accions? [1 punt]
- a. $p(0) = 500, p(1) = 674,93$. Per tant, el primer any les accions s'incrementen en 174,93 €, el que suposa un increment del $\frac{174,93}{500} \cdot 100 = 34,98\%$.
- b. $500 \cdot e^{0,3t} = 1000 \rightarrow e^{0,3t} = 2 \rightarrow 0,3t = \ln 2 \rightarrow t = \frac{\ln 2}{0,3} = 2,31$. Caldria més de 2 anys per a doblar el preu de les accions.

2. Una empresa d'informàtica fabrica ordinadors portàtils i de sobretaula i ven tots els que fabrica. L'empresa té capacitat per a fabricar 3000 ordinadors. Per qüestions de mercat, el nombre d'ordinadors de sobretaula no pot ser inferior a la meitat del nombre de portàtils, però tampoc pot superar el nombre de portàtils. L'empresa guanya 100 € per cada ordinador de sobretaula, i un 20% més en la venda de cada portàtil. Quants ordinadors de cada classe ha de fabricar per tal de maximitzar els seus beneficis? [2 punts]

Anomenarem x al nombre d'ordinadors de sobretaula, i y al de portàtils. Les restriccions que imposa el problema seran, doncs,



$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 3000 \\ x \geq \frac{y}{2} \\ x \leq y \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\}$$

La representació gràfica de la regió factible és la que es veu al costat. Els seus vèrtexs són:

$O(0,0)$, $A(1500,1500)$, $B(1000,2000)$. La funció que ens dona els guanys de l'empresa serà $G(x,y) = 100x + 120y$ que avaluada en els vèrtexs, ens dona:

$$G(0,0) = 0$$

$$G(1500,1500) = 330000$$

$$G(1000,2000) = 340000$$

Per tant, els màxims guanys s'obtenen produint 1000 ordinadors de sobretaula i 2000 portàtils.

3. Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a. Determineu una matriu X tal que $A \cdot X = I$. [1 punt]
 b. Determineu una matriu Y tal que $A \cdot Y \cdot A = B$. [1 punt]

a. La matriu X que verifica la condició és la matriu inversa de A , que és

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b. $A \cdot Y \cdot A = B \rightarrow Y = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -13 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$.

4. Els beneficis diaris, en centenars d'euros, d'un taller de bicicletes ve donat per la funció $f(x) = -20x^2 + 50x - 20$, on x són els centenars de bicicletes que es venen. A més, el taller només té capacitat per a fabricar 200 bicicletes al dia.

- a. Calculeu el benefici màxim diari que poden obtenir. [1 punt]
 b. Determineu el mínim nombre de bicicletes que han de fabricar per a no tenir pèrdues. [1 punt]

a. $f'(x) = -40x + 50$, que s'anul·la quan $x = \frac{5}{4}$. A més, com que la funció f és una paràbola amb el coeficient de x^2 negatiu, es tracta d'un màxim. Tenim doncs, $f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{45}{4} = 11,25$ centenars d'euros, és a dir, 1125 €.

b. Caldrà determinar els punts de tall de f amb l'eix d'abscisses, que són $x = \frac{1}{2}$ i $x = 2$.

Per tant, $f(x) < 0$ si $x < \frac{1}{2}$: tindran beneficis a partir de la fabricació de 50 bicicletes.

5. Considerem la funció $f(x) = \frac{3x-4}{2x-5}$.

- a. Indiqueu-ne el domini, i els punts on la gràfica de f talla l'eix d'abscisses. [1 punt]
 b. Si en té, trobeu les asímptotes horitzontals i verticals de la funció f . [1 punt]

a. $\text{Dom}f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{5}{2} \right\}$ Els punts de tall són els que verifiquen $f(x) = 0$, és a dir, $x = \frac{4}{3}$.

b. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{3}{2}$; $y = \frac{3}{2}$ és asímptota horitzontal. $\lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}} f(x) = \infty$; f té asímptota vertical:

la recta $x = \frac{5}{2}$.

6. Un botiguer vol determinar la quantitat de bitllets de 5 €, 10 € i 20 € que ha de tenir a la seva botiga per atendre millor els seus clients. En total vol tenir 90 bitllets i 1375 € a la caixa. A més, s'ha adonat que li convé tenir el doble de bitllets de 20 € que de 5 € i 10 € junts. Quants bitllets haurà de tenir de cada classe? [2 punts]

Si anomenem x al nombre de bitllets de 5 €, y al nombre de bitllets de 10 € i z al nombre de bitllets de 20 €, les dades del problema es tradueixen en el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 90 \\ 5x + 10y + 20z = 1375 \\ z = 2(x + y) \end{array} \right\}$$

que, resolt pel mètode que vulguem, ens dóna $x = 25$, $y = 5$, $z = 60$. Per tant, caldrà que tingui 25 bitllets de 5 €, 5 bitllets de 10 € i 60 bitllets de 20 €.
