SÈRIE 5

1. Una persona decideix invertir un total de 60000 € repartits en tres entitats d'estalvi diferents: A, B i C. Aquesta persona decideix que la quantitat invertida a l'entitat A sigui la meitat de la quantitat total invertida a les entitats B i C. A més, sabem que l'entitat A li ha assegurat una rendibilitat del 5%, l'entitat B una rendibilitat del 10% i l'entitat C una rendibilitat del 2%. Calculeu les quantitats invertides a cada entitat d'estalvi si sabem que aquest inversor obtindrà uns beneficis totals de 4200 €. [2 punts]

   Si anomenem x, y, z les quantitats invertides respectivament en les entitats A, B i C, les dades de l'enunciat es tradueixen en

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=60000 \\ x&=\frac{y+z}{2} \\ 0,05x+0,1y+0,02z&=4200 \end{aligned}\right\} \text{ o bé } \left.\begin{aligned} x+y+z&=60000 \\ 2x-y-z&=0 \\ 5x+10y+2z&=420000 \end{aligned}\right\}$$

   que, en resoldre'l per qualsevol mètode, ens dóna x = 20000, y = 30000, z = 10000. Ha invertit 20000 € a l'entitat A, 30000 € a la B i 10000 € a la C.

2. Un hotel cobra 45 € per habitació i nit. Per aquest preu té ocupades 165 habitacions cada nit. S'ha fet un estudi a partir del qual s'ha deduït que, per cada euro que s'apugi el preu de l'habitació, se n'ocuparà una menys cada nit.
   a. Si x és la quantitat que s'apuja el preu de l'habitació per sobre dels 45 € inicials, determineu la funció que ens dóna els ingressos diaris de l'hotel en funció de x. Indiqueu també quins seran els ingressos màxims que pot obtenir l'hotel. [1 punt]

   La funció que ens dóna els ingressos serà $I(x)=(165-x)(45+x)=-x^2+120x+7425$.
   Per a calcular els ingressos màxims calculem la derivada: $I'(x)=-2x+120$. Aquesta derivada val 0 quan x = 60, que serà màxim perquè I(x) és una paràbola amb coeficient principal negatiu. I(60) = 11025, que serà la quantitat màxima que es pot ingressar.

   b. Indiqueu entre quins preus obtindrà ingressos l'hotel. [1 punt]

   I(x) > 0 si $-45<x<165$. Per tant el preu de l'habitació, que és x + 45, haurà d'estar entre 0 € i 210 €.

3. Determineu els valors de a, b i c que fan que la funció

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

   passi pel punt (0,4) i tingui extrems relatius en els punts d'abscissa x = 1 i x = 3. Classifiqueu aquests extrems. [2 punts]

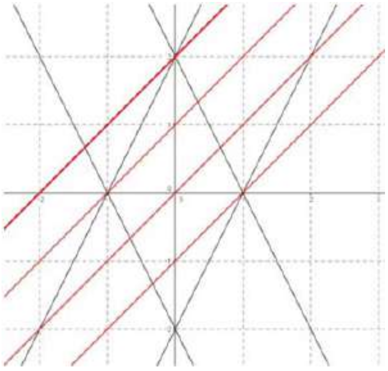
   f(0) = 4. Per tant, c = 4. $f'(x)=3x^2+2ax+b$. De les condicions f'(1) = 0 i f'(3) = 0 es dedueixen els valors de a i de b: a = - 6, b = 9.
   A més, per a aquests valors tenim que $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$. Com que abans de x = 1 la derivada és positiva i després és negativa, aquest valor correspon a un màxim. Amb el mateix raonament, x = 3 correspon a un mínim.

4. S'ha observat que el nombre d'entrades que es venen per al cinema d'un poble està lligat al sou mitjà x de la població, expressat en milers d'euros, segons la funció

$$N(x)=\frac{50x}{x^2+1}.$$

a. Determineu el sou mitjà de la població que correspon a la màxima venda d'entrades, i justifiqueu la resposta. [1 punt]

$N'(x)=50\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$, que s'anul·la quan x = -1 i quan x = 1. Aquest darrer valor, que és l'únic que té sentit, és un màxim perquè abans la derivada és positiva i després és negativa. Per tant, el sou mitjà que correspon a la màxima venda d'entrades és de 1000 €.



b. Si suposem que els sous de la població creixen indefinidament, com incidiria aquest fet en la venda d'entrades del cinema? [1 punt]

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ perquè el denominador és de grau més gran que el numerador. Acabaria amb el cinema buit.

5. Trobeu les matrius A i B sabent que

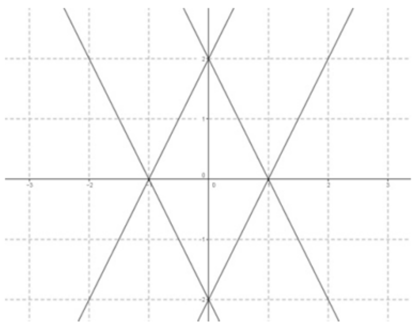
$$A-2B=\begin{pmatrix}0 & -3\\ -3 & 4\end{pmatrix} \quad \text{i que} \quad 2A+3B=\begin{pmatrix}7 & 15\\ 8 & -6\end{pmatrix}. \text{ [2 punts]}$$

$2A-4B=\begin{pmatrix}0 & -6\\ -6 & 8\end{pmatrix}$. Resolent el sistema obtenim $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$.

6. Considereu la regió del pla limitada per les rectes

$y=2x+2$, $y=-2x+2$, $y=2x-2$, $y=-2x-2$

a. Dibuixeu-la i calculeu-ne els vèrtexs. [1 punt]



Els vèrtexs són (1,0), (0,2), (-1,0) i (0,-2).

b. Considereu ara la família de rectes $y=x+k$. Calculeu en quin punt de la regió s'obté el valor més gran de k, i determineu aquest valor. [1 punt]

Del dibuix es dedueix que el valor màxim és k = 2.