SÈRIE 3

1. Una fàbrica de mobles de cuina ven 1000 unitats mensuals d'un model d'armari a 200 euros per unitat. Per tal de reduir-ne l'estoc, fa una oferta als compradors i estima que, per cada euro de reducció del preu, les vendes mensuals del producte s'incrementaran en 100 unitats.

   (a) Quantes unitats caldrà vendre per a d'obtenir el màxim d'ingressos mensuals? (1,5 punts)

   Si anomenem x a la reducció del preu de venda en euros, aleshores la funció que ens dóna els beneficis serà $B(x) = (200 - x) \cdot (1000 + 100x) = -100x^2 + 19000x + 200000$. La seva derivada és $B'(x) = -200x + 19000$, que val 0 quan $x = 95$. Com que la funció és una paràbola amb coeficient del terme quadràtic negatiu, aquest valor correspon a un màxim: els ingressos màxims s'obtindran quan es redueixi el preu en 95 euros, és a dir, quan el nombre d'unitats venudes sigui $1000 + 100 \cdot 95 = 10500$ unitats.

   (b) A quant pujaran aquests ingressos? (0,5 punts)

   La quantitat màxima ingressada serà $B(95) = 1102500$ euros.

2. Sigui la funció
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

   (a) Estudieu-ne el creixement i, si en té, determineu-ne i classifiqueu els extrems relatius. (1 punt)

   $f'(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$. El denominador és sempre positiu. Per tant, quan $x < 0$ f' és positiva, i la funció és creixent, mentre que quan $x > 0$ f' és negativa, i la funció és decreixent. En conseqüència, l'únic punt estacionari és $x = 0$, que correspon a un màxim relatiu.

   (b) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de f en el punt d'abscissa $x = 1$. (1 punt)

   $f(1) = \dfrac{1}{2}$ i $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$. Per tant, la recta és $y - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}(x-1)$.

3. Sigui el sistema d'equacions
$$\left.\begin{array}{rcl} x - y + z & = & 0 \\ 3x + 4y - 5z & = & 6 \\ x - y & = & 2 \end{array}\right\}$$

   (a) Justifiqueu si és compatible determinat. (1 punt)

   $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -8 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$. Tant la matriu associada com l'ampliada són de rang 3. Per tant, el sistema és compatible determinat.

   (b) Resoleu el sistema format per les dues primeres equacions. (1 punt)

   De $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -8 & 6 \end{array}\right)$ obtenim $x = \dfrac{y+6}{8}$, $y = y$, $z = \dfrac{7y-6}{8}$. Si parametritzem per z obtenim $x = \dfrac{z+6}{7}$, $y = \dfrac{8z+6}{7}$, $z = z$.

4. Durant la darrera epidèmia d'Ebola es va considerar que, sense cap intervenció, el virus es propagava augmentant en un 3% diari el nombre d'afectats. Suposeu que, en una població, avui, hi ha 25 persones infectades.

   (a) Escriviu la fórmula de la funció que dóna el nombre de persones infectades en passar els dies. Quantes persones estaran infectades al cap de 20 dies? (1 punt)

   La funció és $f(x) = 25 \cdot 1,03^x$. Al cap de 20 dies el nombre de persones infectades serà $f(20) = 25 \cdot 1,03^{20} = 45$ o 46 persones infectades.

   (b) A partir d'una data determinada, en aquesta població s'apliquen unes mesures sanitàries que permeten que el nombre de persones infectades disminueixi segons la funció $g(x) = 1000 \cdot (0.95)^x$.

Si considerem controlada l'epidèmia quan el nombre d'afectats és igual o inferior a 10 persones, quants dies hauran de passar després d'aplicar les mesures sanitàries per a poder declarar controlada l'epidèmia? (1 punt)

$1000 \cdot (0.95)^x = 10 \rightarrow 0,95^x = 0,01 \rightarrow x = \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,95} = 89.78...$ L'epidèmia estarà controlada passats 89 dies.

5. La butlleta guanyadora d'una loteria està formada per tres nombres. Sabem que la suma del primer i el segon excedeix en dues unitats al tercer; que el primer nombre menys el doble del segon és deu unitats menor que el tercer, i que la suma dels tres nombres és 24. Quina és la butlleta guanyadora? (2 punts)

Si anomenem als tres nombres x, y i z respectivament, les dades del problema es tradueixen com:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y-2 &=& z \\ x-2y+10 &=& z \\ x+y+z &=& 24 \end{array}\right\}$$

que, resolt per qualsevol mètode, dóna com a solucions $x=9$, $y=4$, $z=11$.

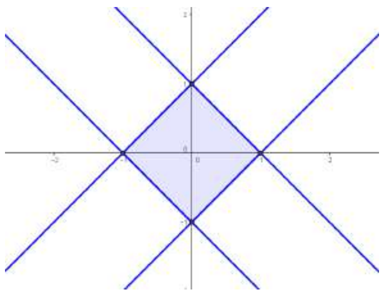
6. Tenim quatre rectes: la recta r_1 passa pels punts $(-1,0)$ i $(0,1)$; la recta r_2 passa per $(-1,0)$ i $(0,-1)$. r_3 passa per $(1,0)$ i per $(0,1)$. Finalment, r_4 passa per $(1,0)$ i $(0,-1)$.

(a) Escriviu les inequacions que compleixen els punts de la frontera i de l'interior del quadrat que determinen aquestes quatre rectes i dibuixeu-lo. (1 punt)

Les inequacions són:

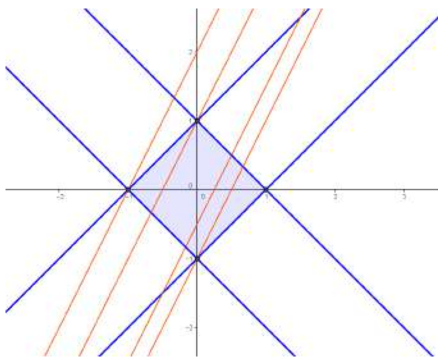
$$\left.\begin{array}{rcl} y &\leq& x+1 \\ y &\geq& x-1 \\ y &\leq& -x+1 \\ y &\geq& -x-1 \end{array}\right\}.$$

Gràficament, el quadrat és:



(b) Determineu el valor màxim de k que fa que la recta $y = 2x + k$ tingui algun punt en comú amb el quadrilàter anterior. (1 punt)

El valor màxim, i el mínim, de k es donarà en un dels vèrtexs del quadrat. Si posem $k = y - 2x$ Tindrem que $k(-1,0) = 2$, $k(1,0) = -2$, $k(0,1) = 1$, $k(0,-1) = -1$. Per tant, el valor màxim és $k = 2$. També es pot veure gràficament:



SÈRIE 5

---

1. Dues de les escales que se solen usar per a mesurar temperatures, l'escala Fahrenheit i l'escala Celsius, estan relacionades linealment, és a dir, la funció que ens dóna la temperatura F en graus Fahrenheit a partir de la temperatura C en graus Celsius, és una recta. L'escala Celsius estableix els 0 °C com a temperatura de congelació de l'aigua i els 100 °C com la temperatura d'ebullició. En l'escala Fahrenheit, aquests canvis d'estat de l'aigua s'esdevenen als 32 °F i als 212 °F respectivament.

a. Escriviu la funció que, per a cada temperatura expressada en graus Celsius, dóna la temperatura expressada en graus Fahrenheit. [1 punt]

Anomenarem C la temperatura Celsius, i F la Fahrenheit.

Es tracta de determinar a i b en F = a·C + *b* amb les dades del problema:

$a + b \cdot 0 = 32$, $a + b \cdot 100 = 212$, i d'aquí obtenim a = 32, b = 1,8.

Per tant, l'equació que ens demanen és F = 1,8C + 32.

b. A quina temperatura coincideixen els graus Celsius amb els graus Fahrenheit? [1 punt]

C = 1,8·C + 32, i d'aquí C = -40. És a dir -40 °C equivalen a -40 °F.

---

2. Dues famílies van a una cafeteria. La primera família pren 1 refresc, 3 cafès i 7 magdalenes, i paga un total d'11,75 €. La segona família demana 1 refresc, 4 cafès i 10 magdalenes, i paga per tot plegat 15,5 €.

a. Digueu, raonadament, si és possible saber el preu d'un cafè, el que costa un refresc i el que val una magdalena. [1 punt]

Si anomenem R el preu del refresc, C el que costa un cafè i M el preu de la magdalena, les dades del problema es tradueixen en les equacions següents:

$$\left.\begin{array}{l} R + 3C + 7M = 11{,}75 \\ R + 4C + 10M = 15{,}5 \end{array}\right\},$$

En tenir menys equacions que incògnites, el sistema serà indeterminat. Per tant, amb aquestes dades no n'hi ha prou per a determinar els preus.

b. Calculeu quant ha de pagar una família que prengui un refresc, un café i una magdalena. [1 punt]

Si resolem el sistema, per qualsevol mètode, obtenim

$M=\lambda, C=3,75-3\lambda, R=0,5+2\lambda$.

Per tant, sumant les tres equacions tenim que M + C + R = 4,25

Un cafè, un refresc i una magdalena costaran per tant, 4,25 €.

---

3. Sigui la funció

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}.$$

a. Estudieu en quins intervals f creix i en quins decreix. Determineu i classifiqueu, si n'hi ha, els màxims o mínims de f. [1 punt]

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{(1-x)(1+x)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Per tant, f és decreixent a $\left(-\infty,-1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$, i creixent a l'interval $\left(-1,1\right)$.

La funció té un mínim a x = -1 i un màxim a x = 1.

b. Escriviu l'equació de la recta tangent a la gràfica de f en el punt d'abscissa x = 2. [1 punt]

$f(2)=\frac{2}{5}, f'(2)=-\frac{3}{25}$. Per tant, l'equació de la recta tangent és $y-\frac{2}{5}=-\frac{3}{25}(x-2)$.

4. Sabem que la funció derivada f' d'una funció f, polinòmica de tercer grau, talla l'eix d'abscisses en els punts x = -1 i x = 2.

   a. Justifiqueu si és possible que, a més dels dos valors citats, f' també talli l'eix d'abscisses en un altre punt. [1 punt]

   La funció derivada d'una funció polinòmica de tercer grau és de grau 2 i, per tant, no pot tenir més de dos valors que l'anul·lin.

   b. Si ens diuen que f'(1) = 2, indiqueu i classifiqueu els màxims i mínims de la funció f. [1 punt]

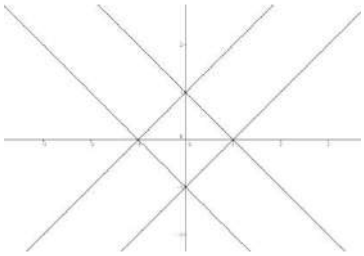
   Com que -1 < 1 < 2 i f'(1) és positiva, f ha de tenir un mínim a x = -1 i un màxim a x = 2.

5. Considereu la regió del pla limitada per les rectes següents:

$$y = x + 1\,,\; y = -x + 1\,,\; y = x - 1\,,\; y = -x - 1$$

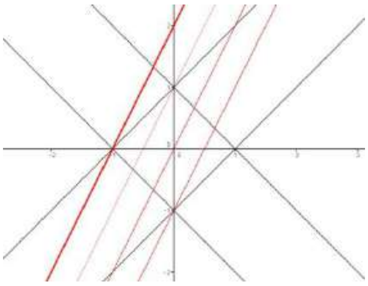
a. Dibuixeu-la i calculeu-ne els vèrtexs. [1 punt]

Els vèrtexs del quadrat resultant són, sense necessitat de càlculs, (1,0), (-1,0), (0,1), (0-1).



b. Considereu ara la família de rectes $y = 2x + k$. Calculeu en quin punt de la regió s'obté el valor més gran de *k*, i determineu aquest valor. [1 punt]

Es pot veure gràficament que correspon al punt (-1,0), on *k* = 2. També es veu substituint els valors dels vèrtexs a la família de rectes.



---

6. Considereu les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Calculeu les matrius $A \cdot B$ i B·A. [1,5 punts]

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 8 \end{pmatrix},\; B \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

b. Justifiqueu si en algun cas és possible calcular P^2 quan P és una matriu no quadrada. [0,5 punts]

En no ser quadrada, el nombre de columnes de la primera matriu, P, no coincidirà amb el nombre de files de la segona, que és la mateixa. Per tant, mai no es pot calcular el quadrat d'una matriu no quadrada.