



**SERIE 1**

1. Un venedor d'una llibreria de vell cobra, a més a més d'un sou fix, diferents comissions depenent del tipus de llibre que ven. Cobra 1 € per cada còmic, 1,5 € per cada revista i 2 € per cada novel·la.

Ahir, va vendre el doble de revistes que de novel·les, 5 còmics menys que revistes, i va aconseguir en total una comissió de 30 €.

Quantes publicacions va vendre de cada tipus? [2,5 punts]

Si anomenem  $x$  el nombre de còmics venuts,  $y$  el nombre de revistes venudes i  $z$  el nombre de novel·les venudes, sabem que:

$$\begin{aligned}y &= 2z \\x &= y - 5 \\x + 1,5y + 2z &= 30\end{aligned}$$

Per tant, hem de resoldre el sistema:

$$\begin{aligned}x - y &= -5 \\y - 2z &= 0 \\2x + 3y + 4z &= 60\end{aligned}$$

El resollem utilitzant el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & -5 \\0 & 1 & -2 & 0 \\2 & 3 & 4 & 60\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & -5 \\0 & 1 & -2 & 0 \\0 & 5 & 4 & 70\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & -5 \\0 & 1 & -2 & 0 \\0 & 0 & 14 & 70\end{array}\right)$$

D'on obtenim que  $x = 5$ ,  $y = 10$  i  $z = 5$ . És a dir, s'han venut 5 còmics, 10 revistes i 5 novel·les.

*Criteris de correcció: Plantejament del sistema: 1 p. Resolució del sistema: 1 p. Obtenció de la solució final: 0,5 p.*



**Criteris de correcció**

**Matemàtiques aplicades a les ciències socials**

2. L'1 de gener de 2019 va sortir al mercat un nou model d'un producte tècnic d'esquí. La funció de tercer grau  $f(x) = 10x^3 - 210x^2 + 1470x$  ens dona el nombre total d'unitats venudes, en què  $x$  denota el nombre de mesos transcorreguts, des del llançament del producte, durant el primer any (és a dir,  $x \in [0,12]$ ).

a) Quantes unitats s'havien venut al cap de 3 mesos? Quantes se'n van vendre al cap d'un any? Determineu la taxa de variació mitjana entre els mesos 3 i 12.

[1,25 punts]

b) Comproveu que la funció és creixent en l'interval  $[0,12]$  i trobeu en quin instant el creixement ha estat més lent. [1,25 punts]

a) Per saber les unitats venudes al cap de 3 mesos cal calcular  $f(3) = 2.790$ , per tant, s'havien venut 2.790 unitats. Al cap d'un any es van vendre  $f(12) = 4.680$  unitats.

Pel que fa a la taxa de variació mitjana, tenim que

$$TVM(3,12) = \frac{f(12) - f(3)}{12 - 3} = \frac{4.680 - 2.790}{9} = 210.$$

b) Com que  $f$  és una funció polinòmica de grau 3, és contínua i derivable en tots els reals. Per estudiar el creixement de la funció comencem calculant la funció derivada:

$$f'(x) = 30x^2 - 420x + 1.470.$$

Igualem  $f'(x) = 0$  per obtenir els possibles màxims i mínims. L'únic zero el trobem en el punt d'abscissa  $x = 7$ . Observem que  $f'(x) = 30(x - 7)^2$ , per tant, deduïm fàcilment que  $f'(x) \geq 0$  per a tots els reals, i que  $f'(x) = 0$  només per a  $x = 7$ . Així doncs, la funció  $f$  és creixent per a  $x \in [0,12]$  i l'instant en què el creixement és més lent és als 7 mesos del llançament del producte (és on la funció derivada assoleix el valor mínim).

*Criteris de correcció: a) Obtenció de les unitats venudes als 3 mesos: 0,25 p. Obtenció de les unitats venudes al cap de l'any: 0,25 p. Obtenció de la TVM: 0,75 p. b) Càlcul de la derivada: 0,25 p. Justificació que la funció és creixent: 0,5 p. Obtenció del punt on el creixement és més lent: 0,5 p.*



**Criteris de correcció**

**Matemàtiques aplicades a les ciències socials**

3. El cost d'elaboració d'un menú en un restaurant és de 8 €. S'ha realitzat un estudi de mercat i s'ha arribat a la conclusió que si el preu del menú és de 18 € entren a dinar al restaurant 120 clients. També s'ha conclòs que la relació entre el preu del menú i el nombre de clients és lineal, de manera que, per cada euro que augmentem el preu del menú, disminueix en 4 el nombre de clients. I a l'inrevés, per cada euro que disminuïm el preu, augmenta en 4 el nombre de clients.

- a) Obteniu la funció que expressa el benefici del restaurant en funció del nombre d'euros en què augmentem o disminuïm el preu inicial del menú. [1,25 punts]
- b) Trobeu en quants euros cal augmentar o disminuir el preu inicial del menú per tal que el restaurant obtingui el màxim benefici. Quin seria el preu final del menú i quin seria el benefici obtingut amb aquest preu? [1,25 punts]

- a) Comencem fent un esquema del plantejament. Anomenem  $x$  el sobrepreu sobre els 18 €.

| Preu menú (€) | Benefici (€) | Nombre de clients | Benefici total (€)     |
|---------------|--------------|-------------------|------------------------|
| 18            | 10           | 120               | $10 \cdot 120 = 1.200$ |
| $18 + x$      | $10 + x$     | $120 - 4x$        | $(10 + x)(120 - 4x)$   |

Per tant, la funció que expressa el benefici del restaurant és

$$B(x) = (10 + x)(120 - 4x) = 1200 + 80x - 4x^2.$$

- b) Observem que la funció benefici és una paràbola amb coeficient de grau 2 negatiu i, per tant, tindrà el seu màxim en el vèrtex. També podem obtenir aquest màxim derivant i igualant a zero la derivada:

$$B'(x) = 80 - 8x.$$

Igualant a zero obtenim que hi ha un extrem relatiu en  $x = 10$ . Veiem clarament que es tracta d'un màxim perquè  $B'(x) > 0$  per  $x < 10$  i  $B'(x) < 0$  per  $x > 10$ .

Per tant, es conclou que per maximitzar els beneficis el restaurant ha d'apujar el menú en 10 €. El preu final del menú serà de 28 € i el benefici màxim obtingut amb aquest preu serà de  $B(10) = 1.600$  €.

*Criteris de correcció: a) Plantejament del problema: 0,5 p. Obtenció de la funció de beneficis: 0,75p. b) Obtenció dels euros que s'ha d'apujar el menú: 0'5 p. Justificació que és un màxim: 0,25 p. Obtenció del preu final del menú: 0,25 p. Obtenció dels beneficis màxims: 0,25 p.*



**Criteris de correcció**

**Matemàtiques aplicades a les ciències socials**

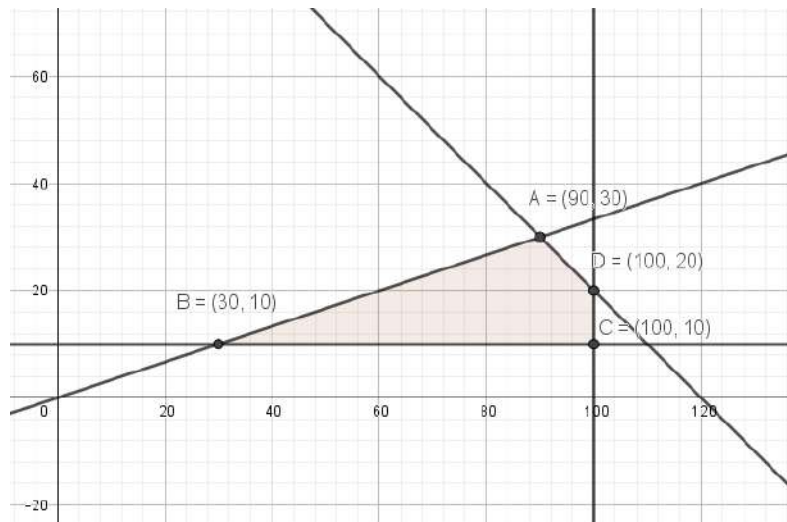
4. Un fabricant de mobles de jardí fabrica cadires i taules de fusta d'exterior. Cada cadira li aporta un benefici de 20 € i cada taula un de 25 €. Sabem que cada mes pot produir com a màxim un total de 120 mobles entre els dos productes. També sabem que, com a màxim, pot fabricar 100 cadires i que ha de fabricar un mínim de 10 taules. D'altra banda, el nombre de cadires fabricades ha de ser igual o superior al triple de taules fabricades.

- Determineu la funció objectiu i les restriccions. Dibuixeu la regió factible. [1,25 punts]
- Quina és la producció mensual que li aporta el màxim benefici un cop venuda? Quin és aquest benefici? [1,25 punts]

a) Anomenem  $x$  el nombre de cadires fabricades i  $y$  el nombre de taules fabricades en un mes.

L'enunciat del problema ens dona les restriccions següents:

$$\begin{cases} x + y \leq 120 \\ x \leq 100 \\ y \geq 10 \\ 3y \leq x \end{cases}$$



Els beneficis venen donats per la funció  $F(x, y) = 20x + 25y$ .

b) Si avaluem la funció en els quatre vèrtexs, tenim que:

$$F(90, 30) = 2.550 \text{ €}$$

$$F(30, 10) = 850 \text{ €}$$

$$F(100, 10) = 2.250 \text{ €}$$

$$F(100, 20) = 2.500 \text{ €}$$

Per tant, la funció objectiu assoleix en la regió factible el seu valor màxim en el punt  $(90, 30)$  i aquest màxim pren el valor 2.550 €.

Així doncs, per maximitzar els beneficis, cal vendre una producció de 90 cadires i 30 taules. Amb aquesta producció s'aconseguiran 2.550 € de benefici.

*Criteris de correcció: a) Càlcul de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de la regió factible: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. b) Obtenció dels vèrtexs: 0,5 p. Obtenció del punt en què s'assoleix el màxim: 0,5 p. Obtenció del benefici màxim: 0,25 p.*



5. Considereu les matrius  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  i  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

- Comprova que es compleix que  $A^{-1} = A^2$ . [1,25 punts]
- Resoleu l'equació matricial  $A \cdot X + B = I$  en què  $I$  és la matriu identitat d'ordre 2. [1,25 punts]

a) Per fer aquesta comprovació comencem calculant la matriu  $A^2$ :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per comprovar que  $A^{-1} = A^2$  hem de veure que  $A^2 \cdot A = I$ . Fem, doncs, el càlcul de  $A^2 \cdot A$ :

$$A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Com que, efectivament hem obtingut que  $A^2 \cdot A = I$  aleshores  $A^{-1} = A^2$ .

Evidentment, una altra solució correcta alternativa seria trobar  $A^{-1}$  i comprovar que efectivament  $A^{-1} = A^2$ .

b) Si aïllem la  $X$  respectant la no commutativitat de les matrius obtenim

$$X = A^{-1} \cdot (I - B).$$

Però com que  $A^{-1} = A^2$  podem resoldre l'equació fent

$$\begin{aligned} X &= A^{-1} \cdot (I - B) = A^2 \cdot (I - B) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Un altre cop tenim una solució alternativa que passaria per considerar  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  i trobar la solució del sistema de quatre equacions i quatre incògnites que se'n deriva.

*Criteris de correcció: a) Plantejament: 0,75 p. Càlculs: 0,5 p. b) Plantejament: 0,75 p. Càlculs: 0,5 p.*



6. El benefici d'una empresa, expressat en milions d'euros, és donat per la funció següent, en què  $x$  indica el nombre d'anys que han passat des del moment que va començar a funcionar:

$$B(x) = \frac{5x+20}{x^2+9} - \frac{20}{9}.$$

- a) Quin és el benefici en el moment en què l'empresa comença a funcionar? En quin moment l'empresa passa de tenir beneficis a tenir pèrdues? [1,25 punts]  
b) En quin moment aconsegueix l'empresa el benefici màxim? Quin és aquest benefici màxim? [1,25 punts]

a) Per trobar el benefici en el moment en què es posa en funcionament l'empresa hem de calcular  $B(0)$ . Observem que  $B(0) = 0$  i, per tant, en el moment inicial l'empresa no té ni beneficis ni pèrdues.

Per saber quan l'empresa passa de tenir beneficis a tenir pèrdues mirem quan s'anul·la la funció benefici.

$$B(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5x+20}{x^2+9} - \frac{20}{9} = 0 \Leftrightarrow x(4x-9) = 0.$$

Per tant  $B(x)$  només s'anul·la per  $x = 0$  i per  $x = \frac{9}{4} = 2,25$ . Observem, d'altra banda, que  $B(x)$  està ben definida per a tot  $x$  i que per als valors de  $x \in (0, \frac{9}{4})$  és positiva. Per tant, l'empresa passa de tenir beneficis a tenir pèrdues quan porta  $\frac{9}{4}$  d'any en funcionament, és a dir, als 2 anys i 3 mesos.

- b) Per trobar el punt on s'assoleix el màxim, comencem calculant la derivada de la funció  $B(x)$ :

$$B'(x) = \frac{-5x^2 - 40x + 45}{(x^2+9)^2}.$$

Igualem la derivada a zero:  $B'(x) = 0$  i obtenim dues solucions  $x = -9$  i  $x = 1$ . Observem que la derivada,  $B'(x)$ , és positiva entre  $x = 0$  i  $x = 1$  i, per tant, el benefici és creixent en aquest interval de temps. A partir de  $x = 1$  la funció benefici és decreixent perquè la derivada és negativa. Per tant, en  $x = 1$ , és a dir, al primer any, la funció benefici assolix un màxim, i a partir d'aquí la funció benefici disminueix. El valor del benefici màxim és:

$$B(1) = \frac{5+20}{1+9} - \frac{20}{9} = \frac{25}{10} - \frac{20}{9} = \frac{25}{90} = \frac{5}{18} = 0,278 \text{ milions d'euros.}$$

*Criteris de correcció: a) Càlcul del benefici inicial: 0,5 p. Càlcul de l'instant on comença a tenir pèrdues: 0,5 p. Justificació de que en aquell instant passa de tenir beneficis a tenir pèrdues (i no al revés): 0,25 p. b) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Càlcul del punt on s'assoleix el màxim: 0,25 p. Comprovació de que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Càlcul del benefici màxim: 0,25 p.*



SÈRIE 3

1. La taula següent reflecteix el preu unitari, expressat en euros, de tres productes  $P_1$ ,  $P_2$  i  $P_3$ , subministrats a un restaurant per dues empreses diferents  $E_1$  i  $E_2$  :

|       | $E_1$ | $E_2$ |
|-------|-------|-------|
| $P_1$ | 6     | 5     |
| $P_2$ | 5     | 8     |
| $P_3$ | 9     | 7     |

El restaurant haurà de fer dues comandes. Aquesta setmana necessita 8 unitats del producte  $P_1$ , 5 unitats del producte  $P_2$  i 12 unitats del producte  $P_3$ . Mentre que per la setmana vinent necessitarà 10 unitats del producte  $P_1$ , 15 unitats del producte  $P_2$  i 7 unitats del producte  $P_3$ .

- a) Escriviu en forma matricial la informació que relaciona el preu unitari i les empreses subministradores i també la informació de les quantitats de cada una de les dues comandes que vol fer el restaurant. [1,25 punts]
- b) Calculeu a quina de les dues empreses ha d'encarregar el restaurant cada una de les comandes per tal que li surti més econòmica i a quin preu li sortirà cadascuna. [1,25 punts]
- a) La matriu que relaciona el preu unitari de cada producte amb l'empresa subministradora és:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

I les matrius files de les dues comandes són:

$$B = (8 \ 5 \ 12) \text{ i } C = (10 \ 15 \ 7)$$



**Criteris de correcció**

**Matemàtiques aplicades a les ciències socials**

- b) Per saber el preu total, en euros, de la primera comanda a cada una de les empreses calculem:

$$B \cdot A = (8 \quad 5 \quad 12) \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} = (181 \quad 164).$$

Per tant la primera comanda és més econòmic fer-la a l'empresa  $E_2$  i ens costarà 164 €.

Per saber el preu de la segona comanda a cada una de les empreses calculem:

$$C \cdot A = (10 \quad 15 \quad 7) \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} = (198 \quad 219).$$

Per tant la segona comanda és més econòmic fer-la a l'empresa  $E_1$  i ens costarà 198 €.

*Criteris de correcció: a) Obtenció de la matriu A: 0,75 p. Obtenció dels vectors de les comandes: 0,25 p. cadascun. b) Plantejament: 0,25 p. Càlcul dels dos productes de matrius: 0,25 p. cadascun. Obtenció dels preus finals de les dues comandes: 0,25 p. Cadascun.*





**Criteris de correcció**

**Matemàtiques aplicades a les ciències socials**

2. Una empresa vol fabricar un producte nou. Encomana un estudi de mercat que determina que l'evolució de les vendes al llarg dels propers sis anys seguirà la funció  $f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$ , en què  $f(t)$  representa la quantitat de milers d'unitats venudes en funció del temps  $t \in [0,6]$  expressat en anys.
- Quantes unitats vendrà el primer any? Tret de l'instant inicial ( $t = 0$ ), es preveu que hi haurà algun altre any en el que no es produirà cap venda? [1,25 punts]
  - En quin any es produirà el màxim nombre de vendes i quants productes s'hauran venut aquell any. [1,25 punts]

- a) Calculem  $f(1) = 1 - 12 + 36 = 25$ . Per tant, el primer any es vendran 25.000 unitats.

D'altra banda, observem que  $f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t = t \cdot (t - 6)^2$ . Per tant, els únics instants en que no es produeix cap venda és a l'instant inicial  $t = 0$  i al sisè any,  $t = 6$ .

- b) Si calculem la derivada  $f'(t) = 3t^2 - 24t + 36 = 3 \cdot (t - 6) \cdot (t - 2)$ , observem que s'anul·la en els punts  $t = 2$  i  $t = 6$ . Sabem, per l'apartat anterior, que en l'instant  $t = 6$  és l'únic  $t > 0$  pel qual no s'ha produït cap venda, per tant serà un mínim. Observem que passa amb l'instant  $t = 2$ . Veiem que  $f'(t) > 0$  per  $t < 2$  i, en canvi  $f'(t) < 0$  per  $t \in (2,6)$ . Per tant, com que nosaltres tenim definida la funció en  $t \in [0,6]$ , el màxim de vendes es produeix el segon any. Calculem  $f(2) = 8 - 48 + 72 = 32$  i, per tant, el nombre de productes venuts aquest any és de 32.000 unitats.

*Criteris de correcció: a) Obtenció de les vendes del primer any: 0,5 p. Obtenció de l'any en que no hi haurà vendes: 0,75 p. b) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció de l'instant en què les vendes són màximes: 0,25 p. Justificació de que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Obtenció de les vendes d'aquest any: 0,25 p.*



**Criteris de correcció**

**Matemàtiques aplicades a les ciències socials**

3. Una fàbrica especialitzada en roba d'esport té problemes amb el subministrament de les fibres. Per satisfer una comanda de samarretes i malles només disposa de 90 km de fibra de polipropilè, 3,2 km de fibra de poliamida i 6,8 km de fibra d'elastà. Ha de fabricar com a mínim 80 samarretes i 50 malles.

Per fabricar cada peça de roba, tant si és una samarreta com si és una malla, calen en total 200 metres de fibra dels quals el 90% són de polipropilè en ambdós casos. En la composició de les samarretes hi ha, a més a més, un 6% de poliamida i un 4% d'elastà i en la composició de les malles hi ha un 2% de poliamida i un 8% d'elastà.

El benefici que el fabricant obté per cada samarreta que fabrica és de 5 € i per cada malla obté un benefici de 3 €.

- Determineu la funció objectiu, les restriccions, i dibuixeu la regió de les possibles opcions que té el fabricant per satisfer la comanda amb les fibres disponibles. [1,25 punts]
- Calculeu quantes samarretes i quantes malles s'han de fabricar perquè el benefici sigui màxim. Quin és aquest benefici? [1,25 punts]

a) Les dades del problema són :

|   | Polipropilè   |       | Poliamida  |      | Elastà     |      |
|---|---------------|-------|------------|------|------------|------|
| $x$ nombre de samarretes que cal fabricar | 90%           | 180 m | 6%         | 12 m | 4%         | 8 m  |
| $y$ nombre de malles que cal fabricar     | 90%           | 180 m | 2%         | 4 m  | 8%         | 16 m |
| Total                                     | $180x + 180y$ |       | $12x + 4y$ |      | $8x + 16y$ |      |

Per tant, les restriccions són:

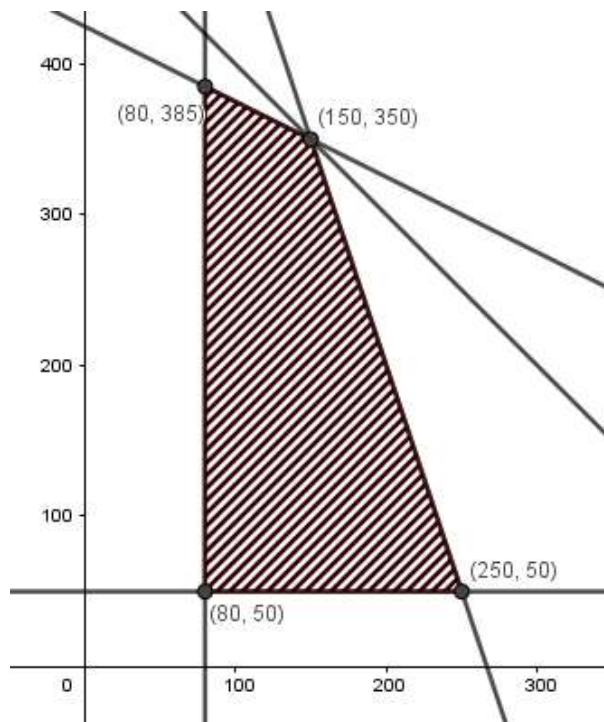
$$\begin{cases} x \geq 80 \\ y \geq 50 \\ 180x + 180y \leq 90.000 \\ 12x + 4y \leq 3.200 \\ 8x + 16y \leq 6.800 \end{cases}$$

Que simplificant ens queden:

$$\begin{cases} x \geq 80 \\ y \geq 50 \\ x + y \leq 500 \\ 3x + y \leq 800 \\ x + 2y \leq 850 \end{cases}$$



La regió factible és la següent:



I la funció objectiu, que ens dona el benefici, ve donada per  $F(x, y) = 5x + 3y$

b) El benefici màxim s'assoleix en un dels vèrtex de la regió factible. Calculem en quin:

|                  |                          |
|------------------|--------------------------|
| $A = (80, 50)$   | $F(A) = 550 \text{ €}$   |
| $B = (250, 50)$  | $F(B) = 1.400 \text{ €}$ |
| $C = (80, 385)$  | $F(C) = 1.555 \text{ €}$ |
| $D = (150, 350)$ | $F(D) = 1.800 \text{ €}$ |

Per tant el benefici màxim és de 1.800 € i s'obté fabricant 150 samarretes i 350 malles.

*Criteris de correcció: a) Càlcul de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de la regió factible: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. b) Obtenció dels vèrtexs: 0,5 p. Obtenció del punt en què s'assoleix el màxim: 0,25 p. Obtenció del benefici màxim: 0,5 p.*



**Criteris de correcció**

**Matemàtiques aplicades a les ciències socials**

4. Considereu la funció  $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$
- a) Trobeu els valors dels paràmetres  $a$ ,  $b$  i  $c$  sabent que té un màxim en el punt  $(2,1)$  i un mínim en el punt  $(0, -1)$ . [1,25 punts]
- b) Trobeu els intervals de creixement i de decreixement de la funció pels valors dels paràmetres  $a$ ,  $b$  i  $c$  trobats a l'apartat anterior. [1,25 punts]

- a) Comencem calculant la derivada de la funció:  $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$ . Sabem que la funció passa pel punt  $(0, -1)$ . D'altra banda,  $f(0) = c$ . Per tant, deduïm que  $c = -1$ .

Sabem també que passa pel punt  $(2,1)$ , i com que  $f(2) = 16a + 4b - 1$  deduïm que  $16a + 4b - 1 = 1$ , és a dir, que  $16a + 4b = 2$ .

Com que en  $x=0$  i en  $x=2$  hi ha extrems relatius, en aquests punts s'ha d'anul·lar la derivada. D'una banda,  $f'(0) = 0$ , i per tant no ens aporta informació addicional, però d'altra banda tenim que  $f'(2) = 32a + 4b$ . I, per tant, sabem que  $32a + 4b = 0$ .

Resolem el sistema

$$\begin{cases} 16a + 4b = 2 \\ 32a + 4b = 0 \end{cases}$$

I trobem que la solució és  $a = -\frac{1}{8} = -0,125$ ,  $b = 1$  i, ja sabíem que,  $c = -1$ .

- b) Tenim la funció  $f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + x^2 - 1$ . Calculem la seva derivada

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x$$

Si l'igualem a zero tenim que  $-\frac{1}{2}x^3 + 2x = 0$ , que és equivalent a,  $x \cdot (x^2 - 4) = 0$  que té per solucions  $x = 0$ ,  $x = 2$  i  $x = -2$ .

Observem que  $f'(x) > 0$  si  $x < -2$ , que  $f'(x) < 0$  si  $x \in (-2,0)$ ,  $f'(x) > 0$  si  $x \in (0,2)$  i  $f'(x) < 0$  si  $x > 2$ . Per tant, la funció és creixent en els intervals  $(-\infty, -2) \cup (0,2)$  i és decreixent en  $(-2,0) \cup (2, +\infty)$ .

*Criteris de correcció: a) Plantejament: 0,5 p. Obtenció dels paràmetres a, b i c: 0,25 p. cadascun. b) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció dels punts crítics: 0,25 p. Obtenció dels intervals de creixement i decreixement: 0,25 p. Justificació de perquè la funció és creixent o decreixent: 0,25 p.*



**Criteris de correcció**

**Matemàtiques aplicades a les ciències socials**

5. En una empresa de tecnologia hi ha un total de 100 empleats dividits en tres seccions: administració, recerca i publicitat. Tots els empleats de cada secció cobren el mateix sou mensual: 2.000 euros els d'administració, 2.400 euros els de recerca i 2.800 euros els de publicitat, i la despesa total mensual en salaris de l'empresa és de 228.000 euros.

- a) Plantegeu i estudeu el sistema d'equacions associat. Justifiqueu si es pot determinar el nombre d'empleats de cada secció. [1,25 punts]
- b) Una reestructuració recent ha obligat a acomiadar  $\frac{1}{10}$  part dels empleats d'administració,  $\frac{1}{6}$  part dels de recerca i  $\frac{1}{5}$  part dels de publicitat. Aquest fet ha suposat un estalvi mensual en salaris de 33.200 euros. Determineu quants empleats tenia cada secció de l'empresa abans de la reestructuració. [1,25 punts]

- a) Considerem les variables  $x, y, z$  com el número d'empleats de les seccions d'administració, recerca i publicitat, respectivament. Obtenim el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 2.000x + 2.400y + 2.800z = 228.000 \end{cases}$$

que podem reescriure com

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x + 6y + 7z = 570 \end{cases}$$

Aplicarem el mètode de Gauss. Prenem les variables en l'ordre donat  $x, y, z$ . Tenim

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 5 & 6 & 7 & 570 \end{array} \right)$$

I, aplicant el mètode de Gauss s'obté

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 2 & 70 \end{array} \right)$$

Per tant tenim que la matriu i la matriu ampliada tenen rang 2, mentre que el número d'incògnites és 3, així que es tracta d'un sistema compatible indeterminat i no poden determinar el nombre d'empleats de cada secció.

- b) Plantegem el problema com abans però afegint l'equació addicional que ens dona l'enunciat:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x + 6y + 7z = 570 \\ 2000 \cdot \frac{x}{10} + 2400 \cdot \frac{y}{6} + 2800 \cdot \frac{z}{5} = 33.200 \end{cases}$$

que reescrivim com a:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x + 6y + 7z = 570 \\ 5x + 10y + 14z = 830 \end{cases}$$

Aplicant el mètode de Gauss tenim

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 5 & 6 & 7 & 570 \\ 5 & 10 & 14 & 830 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 2 & 70 \\ 0 & 5 & 9 & 330 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 2 & 70 \\ 0 & 0 & -1 & -20 \end{array} \right)$$



**Criteris de correcció**

**Matemàtiques aplicades a les ciències socials**

Podem concloure que és un sistema compatible determinat ja que, tant el rang de la matriu, com el de la matriu ampliada, com el nombre d'incògnites, és 3.

Resolent-lo s'obté la solució  $x = 50$ ,  $y = 30$  i  $z = 20$ . És a dir, inicialment hi havia 50 empleats d'administració, 30 de recerca i 20 de publicitat.

*Criteris de correcció: a) Plantejament: 0,5 p. Justificació de que no podem determinar el nombre d'empleats de cada secció: 0,75 p. b) Plantejament: 0,25 p. Resolució i obtenció de la solució final: 1 p.*

---



6. Un centre de formació organitza un curs subvencionat que té un cost fix de 9.000 € al qual cal sumar una quantitat que varia segons el nombre d'alumnes del curs i que ve donada per la funció  $0,02x^3 - 24x$ , en què  $x$  representa el nombre d'alumnes matriculats. El consell comarcal ha atorgat al centre una subvenció de 5.000 € per a l'organització del curs i l'ajuntament paga al centre 30 euros per cada alumne matriculat.

La despesa que ha d'assumir el centre és la diferència entre el cost total del curs i les dues subvencions rebudes.

Quants alumnes s'han de matricular al curs perquè la despesa sigui mínima per al centre i quina seria aquesta despesa? [2,5 punts]

El cost del curs, en funció del nombre d'alumnes matriculats  $x$ , serà:  $C(x) = 9.000 + 0,02x^3 - 24x$ .

La subvenció rebuda en funció del nombre d'alumnes serà:  $S(x) = 5.000 + 30x$ .

Per tant, la despesa en funció del nombre d'alumnes serà:

$$\begin{aligned} D(x) &= C(x) - S(x) \\ &= 9000 + 0,02x^3 - 24x - (5.000 + 30x) \\ &= 0,02x^3 - 54x + 4.000 \end{aligned}$$

Calculem la derivada:  $D'(x) = 0,06x^2 - 54$ . Igualant la derivada a zero obtenim que s'anul·la per  $x = -30$  (que no té sentit en el nostre context) i per  $x = 30$ . Observem que  $f'(x) < 0$  per  $x \in (0,30)$  i, en canvi,  $f'(x) > 0$  per  $x > 30$ . Per tant, en  $x = 30$  hi ha un mínim.

Així doncs la despesa mínima s'obté amb 30 alumnes matriculats. Calculem  $D(30) = 0,02 \cdot 30^3 - 54 \cdot 30 + 4.000 = 2.920$  €.

Per tant, la despesa és mínima si hi ha 30 alumnes matriculats i és de 2.920 €.

*Criteris de correcció: a) Obtenció de la funció de costos: 0,25 p. Obtenció de la funció de subvencions: 0,25 p. Obtenció de la funció de despeses: 0,5 p. Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció del punt on s'obté el mínim: 0,5 p. Justificació de que es tracta d'un mínim: 0,25 p. Càlcul de la despesa mínima: 0,25 p..*