

Curs 1999-2000

A continuació trobareu l'enunciat de quatre qüestions i dos problemes. Heu de respondre només tres de les quatre qüestions i resoldre només un dels dos problemes (podeu triar les qüestions i el problema que vulgueu).

QÜESTIONS

1. a) Trobeu els extrems relatius de la funció polinòmica

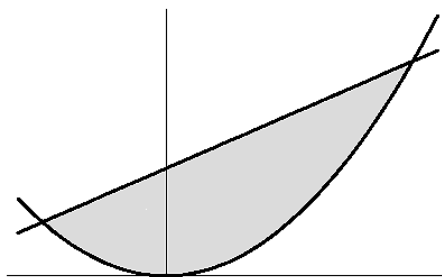
$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x - 3$$

i calculeu els valors de $f(x)$ en aquests punts. A partir d'aquestes dades, feu un dibuix aproximat de la seva gràfica.

- b) Demostreu que l'equació $x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x - 3 = 0$ té, exactament, tres solucions reals.

[2 punts]

2. Calculeu per integració la superfície del recinte delimitat per les corbes $y = x^2$ i la recta d'equació $y - x - 6 = 0$ representat en el dibuix següent:



[2 punts]

3. Donats els vectors $\vec{u} = (1, -1, 4)$, $\vec{v} = (2, 1, 3)$ i $\vec{w} = (1, 0, 0)$

- a) Determineu si són vectors linealment dependents o independents.
b) Calculeu la relació que hi ha d'haver entre els valors de a i b per tal que el vector $(a, 1, b)$ sigui combinació lineal de \vec{u} i \vec{v} .

[2 punts]

4. D'un angle α del primer quadrant coneixeu que $\sin \alpha = 1/3$. Calculeu el valor exacte de:

- a) $\tan \alpha$.
b) $\sin(2\alpha)$.

[2 punts]

PROBLEMES

1. El costat desigual d'un triangle isòsceles mesura 12 m, i l'altura sobre aquest costat és de 5 m.
- Donat un punt arbitrari sobre aquesta altura, obtingueu una expressió de la suma de les distàncies d'aquest punt a cada un dels vèrtexs del triangle.
 - Determineu els punts sobre l'altura que compleixen que la suma de les distàncies als tres vèrtexs del triangle sigui màxima i els punts per als quals sigui mínima.

[4 punts]

2. Considereu la recta

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 5y - z - 3 = 0 \\ x - 3y - z - 2 = 0 \end{array} \right\}$$

i el pla $2x - y + az + 2 = 0$, on a és un paràmetre.

- Per a quin valor de a la recta i el pla són paral·lels? Quina serà llavors la distància entre el punt $P = (1, 0, -1)$ de la recta i el pla?
- Existeix algun valor de a per al qual la recta i el pla siguin perpendiculars?
- Determineu el valor de a perquè la recta i el pla formin un angle de 30° .

[4 punts]

Curs 1999-2000

A continuació trobareu l'enunciat de quatre qüestions i dos problemes. Heu de respondre només tres de les quatre qüestions i resoldre només un dels dos problemes (podeu triar les qüestions i el problema que vulgueu).

QÜESTIONS

1. D'una funció $y = f(x)$ sabem

- a) El seu domini de definició és tot \mathbf{R} .
- b) La seva funció derivada és

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

c) $f(x)$ és contínua en tot punt i $f(-1) = 2$.

Determineu el valor de $f(1)$ i dibuixeu la gràfica de la funció $f(x)$. [2 punts]

2. Donada la funció $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$, determineu l'equació de la recta tangent a la seva gràfica en el punt on s'anul·la la segona derivada. [2 punts]

3. Calculeu el peu de la recta perpendicular a la recta $(x, y, z) = (1, -1, 1) + \lambda(0, 1, 1)$ traçada des del punt $(1, 0, -1)$. [2 punts]

4. Considereu la circumferència del pla d'equació $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 8 = 0$.

- a) Calculeu-ne el centre i el radi.
- b) Comproveu que el punt $(4, 0)$ pertany a la circumferència i determineu l'equació de la seva tangent en aquest punt (la recta tangent en un punt d'una circumferència és la que és perpendicular al radi que passa per aquest punt).

[2 punts]

PROBLEMES

1. Considerem la recta r de l'espai que passa pel punt $P = (1, 1, 3)$ i té per vector director $\vec{v} = (1 - a, a, 1)$. Sigui π el pla que té per equació $2x + y - z = 1$.
- Determineu per a cada valor del paràmetre a la posició relativa de la recta r respecte al pla π (paral·lela, continguda o amb un punt d'intersecció).
 - Hi ha alguna de les rectes r que sigui perpendicular al pla π ?
 - Calculeu la distància que hi ha entre el punt P i el pla π .

[4 punts]

2. Dos amics, l'Àlex i la Berta, són cadascun al terrat de casa seva, veuen un vaixell i els interessa determinar la distància a què es troba.
- Primer de tot volen calcular la distància que separa el teodolit de l'Àlex del de la Berta. Sigui A el punt on l'Àlex té plantat el teodolit i B el punt on la Berta té situat el seu. L'Àlex mesura exactament al seu terrat una distància $AC = 10$ m, de manera que el triangle ACB és rectangle a A . Llavors la Berta mesura l'angle a B d'aquest triangle i resulta que és de $5,6^\circ$. Calculeu la distància AB .
 - Per determinar a quina distància és el vaixell, l'Àlex mesura l'angle que formen a A les visuals A -vaixell i A - B , que resulta que és $75,5^\circ$, i la Berta l'angle que formen a B les visuals B - A i B -vaixell, que és de $81,6^\circ$. A quina distància és el vaixell de la Berta? Es pot saber, sense fer més càlculs, qui és més a prop del vaixell? Per què?

[4 punts]