

Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals (ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar altres decimals per als diferents apartats i després arrodonir la suma).

Aquestes pautes no pretenen planificar tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Hi haurà molts casos concrets, doncs, en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos en què les pautes siguin de difícil aplicació, feu prevaler sempre el vostre criteri i sentit comú.

### Qüestions

1. Calculeu la primitiva de la funció  $f(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$  que s'anul·la en el punt d'abscissa  $x = 2$ .

Les primitives de  $f(x)$  són les funcions de la forma

$$g(x) = \int x\sqrt{x^2 - 1} dx = \frac{1}{3}(x^2 - 1)^{3/2} + C$$

on  $C$  és una constant qualsevol. Llavors la primitiva que s'anul·la en  $x = 2$  és la que compleix  $\frac{1}{3}(2^2 - 1)^{3/2} + C = 0$ , d'on  $C = -\sqrt{3}$  i per tant la que busquem és  $g(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 1)^{3/2} - \sqrt{3}$ .

Compteu un punt i mig pel plantejament i el càlcul de la primitiva i deixeu el mig punt restant pels càlculs finals.

2. Determineu el valor que ha de tenir  $k$  perquè la funció  $f(x) = \frac{2x^2 - 3kx + 5}{x - 2}$  tingui límit quan  $x$  tendeix a 2 (és a dir, existeixi  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ) i calculeu el valor que tindrà aquest límit.

El polinomi  $2x^2 - 3kx + 5$  s'ha d'anul·lar per a  $x = 2$ . Llavors  $2 \times 2^2 - 3 \times k \times 2 + 5 = 0$  i  $k = \frac{13}{6}$ . Ara tenim  $f(x) = 2x^2 - \frac{13}{2}x + 5 = 2(x - 2)(x - \frac{5}{4})$  i per tant

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2(2 - \frac{5}{4}) = \frac{3}{2}$$

Compteu un punt per la determinació del valor de  $k$  (el punt fonamental és saber que el valor del polinomi en  $x = 2$  ha de ser 0) i l'altre punt pel càlcul del límit. No traieu més de mig punt per errors en els càlculs.

3. Considereu els plans d'equacions:  $\pi_1 : x + 2y - z = 3$  i  $\pi_2 : ax + (a - 2)y + 2z = 4$ .
- a) Hi ha algun valor del paràmetre  $a$  per al qual la intersecció dels plans  $\pi_1$  i  $\pi_2$  no és una recta?

SÈRIE 3

Pautes de correcció (PAU 2002)

MATEMÀTIQUES

- b) Calculeu un vector director de la recta que s'obté quan es fa la intersecció de  $\pi_1$  i  $\pi_2$  per al valor del paràmetre  $a = 0$ .
- 

- a) Dos plans tenen com a intersecció una recta o són paral·lels (això inclou el fet que considerem el mateix pla dues vegades). Els plans  $\pi_1$  i  $\pi_2$  seran paral·lels quan els seus vectors perpendiculars  $(1, 2, -1)$  i  $(a, (a - 2), 2)$  siguin proporcionals. Això només passa si  $a = -2$ .
- b) Si  $a = 0$  tenim els plans  $x + 2y - z = 3$  i  $-2y + 2z = 4$ . Solucionant el sistema d'equacions corresponent veurem que la recta intersecció d'aquests dos plans es pot donar com els punts  $(x, y, z)$  amb  $x = 7 - z$  i  $y = z - 2$ , que és una recta que passa per  $(7, -2, 0)$  i té com a vector director  $(-1, 1, 1)$ .

Compteu un punt per cada apartat. Valoreu sobretot el coneixement que es demostri de la discussió de sistemes d'equacions lineals. Per errors en els càlculs no resteu més de mig punt.

---

4. Considereu la recta  $r$  d'equacions:  $x - 1 = \frac{y - 5}{-3} = \frac{z - 7}{-4}$ . Calculeu els punts d'aquesta recta situats a distància 3 del punt  $A = (1, 0, 1)$ .
- 

La recta  $r$  també es pot escriure com els punts  $(x, y, z)$  que compleixen  $y = -3x + 8$  i  $z = -4x + 11$ . Els punts de  $r$  que estan a distància 3 de  $A$  hauran de complir  $(x - 1)^2 + (-3x + 8)^2 + (-4x + 10)^2 = 9$ . Desenvolupant els quadrats quedarà  $13x^2 - 64x + 78 = 0$ , que té com a solucions  $x = 2$  i  $x = 3$ . Aquestes dues solucions corresponen als punts  $(2, 2, 3)$  i  $(3, -1, -1)$  respectivament.

Compteu fins a un punt i mig per l'expressió correcta de la distància dels punts de la recta al punt  $A$  i deixeu el mig punt restant pels càlculs finals.

---

### Problemes

1. S'ha de construir un gran dipòsit cilíndric de  $81\pi \text{ m}^3$  de volum. La superfície lateral ha de ser construïda amb un material que costa 30 euros el  $\text{m}^2$  i les dues bases amb un material que costa 45 euros el  $\text{m}^2$ .
- a) Determineu la relació que hi haurà entre el radi  $r$  de les bases circulars i l'altura  $h$  del cilindre, i doneu el cost  $C(r)$  del material necessari per a construir aquest dipòsit en funció de  $r$ .
- b) Quines dimensions (radi i altura) ha de tenir el dipòsit per tal que el cost del material necessari per construir-lo sigui el mínim possible?
- c) Quin serà, en aquest cas, el cost del material?
- 

Denotem per  $r$  el radi i per  $h$  l'altura del cilindre.

- a) La superfície lateral és  $2 \times \pi \times r \times h$  m<sup>2</sup> i el cost de la construcció serà  $2 \times \pi \times r \times h \times 30 = 60 \times \pi \times r \times h$  euros. La superfície de les dues bases és  $2 \times \pi \times r^2 \times h$  m<sup>2</sup> i el cost del material per a la construcció serà  $2 \times \pi \times r^2 \times 45 = 90 \times \pi \times r^2$  euros. El cost total dels materials serà  $60\pi r h + 90\pi r^2$ . Com que el volum del cilindre és  $\pi r^2 h = 81\pi$ , es compleix  $h = \frac{81}{r^2}$  i el cost dels materials serà, en funció de  $r$ ,

$$C(r) = \frac{4860\pi}{r} + 90\pi r^2$$

- b) La derivada de  $C(r)$  és  $C'(r) = -\frac{4860\pi}{r^2} + 180\pi r$  que és 0 quan  $r = 3$  i per aquest valor s'obté el mínim cost. En aquest cas  $h = \frac{81}{9} = 9$ .
- c) Per a  $r = 3$  tenim  $C(3) = \frac{4860\pi}{3} + 810\pi \simeq 7634,07$  euros.

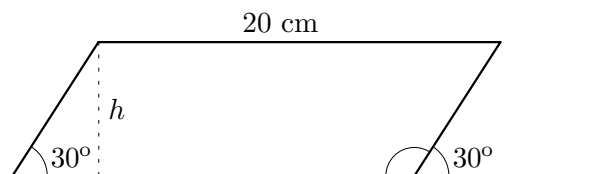
Compteu dos punt per l'apartat a) i un punt per cada un dels altres dos apartats. Intenteu puntuar els apartats b) i c) encara que la funció que expressa el cost no sigui correcta, valorant en l'apartat b) els coneixements que es demostrin de les tècniques per a calcular extrems locals. Per errors en els càlculs no resteu més de mig punt.

2. D'un paral·lelogram sabem que el costat més llarg mesura 20 cm, que la seva àrea és de 120 cm<sup>2</sup> i que l'angle més petit val 30°.

Determineu:

- El valor de l'altre angle del paral·lelogram (el més gran).
- La longitud del costat petit.
- El que mesura la diagonal més llarga.

Un esquema de la situació seria:



Aleshores:

- L'altre angle del paral·lelogram valdrà  $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ .
- Si l'àrea del paral·lelogram és 120 i prenem com a base el costat llarg, l'altura  $h$  serà  $h = \frac{120}{20} = 6$  cm. Ara podem calcular el costat petit que valdrà  $\frac{6}{\sin 30^\circ} = 12$  cm.

SÈRIE 3

Pautes de correcció (PAU 2002)

MATEMÀTIQUES

c) Aplicant el teorema del cosinus les diagonals valen

$$\sqrt{12^2 + 20^2 - 2 \times 12 \times 20 \times \cos 150^\circ} \simeq 30,9789$$

$$\sqrt{12^2 + 20^2 - 2 \times 12 \times 20 \times \cos 30^\circ} \simeq 11,3273$$

(ja hauria de ser clar que només s'ha de calcular la primera).

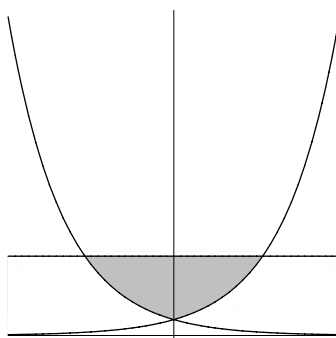
Compteu dos punts per l'apartat b) i un punt pels altres dos apartats. Valoreu que el dibuix de la situació sigui el correcte i el coneixement que es demostrï de les tècniques de resolució de triangles. Per errors de càlcul no resteu més d'un punt.

Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals (ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar altres decimals per als diferents apartats i després arrodonir la suma).

Aquestes pautes no pretenen planificar tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Hi haurà molts casos concrets, doncs, en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos en què les pautes siguin de difícil aplicació, feu prevaler sempre el vostre criteri i sentit comú.

### Qüestions

1. Calculeu l'àrea compresa entre les gràfiques de les corbes  $y = e^{2x}$  i  $y = e^{-2x}$  i la recta  $y = 5$  representada en l'esquema següent:



Per simetria respecte l'eix  $y$ , l'àrea demanada és el doble de l'àrea  $A$  determinada per les gràfiques donades quan  $x > 0$ . El punt d'intersecció de la recta  $y = 5$  i la corba  $y = e^{2x}$  és la solució de l'equació  $5 = e^{2x}$ , és a dir,  $x = \frac{1}{2} \ln 5$ . Llavors

$$A = \left(\frac{1}{2} \ln 5\right) \times 5 - \int_0^{\frac{1}{2} \ln 5} e^{2x} dx = \frac{5}{2}(\ln 5) - 2$$

i l'àrea total és el doble ( $5(\ln 5) - 4 \simeq 4,0472$ ).

Compteu fins a un punt i mig pel plantejament i el càlcul correcte de la primitiva (incloent-hi la determinació dels límits d'integració) i deixeu el mig punt restant pels càlculs.

2. Sabent que la funció  $y = (x + a)(x^2 - 4)$ , on  $a$  és un nombre real, té un màxim i un mínim relatiu, i que el màxim relatiu s'assoleix en el punt  $x = \frac{1}{3}$ , trobeu l'abscissa del mínim relatiu.

La derivada de  $y$  és  $y' = 3x^2 + 2ax - 4$ . Com que  $\frac{1}{3}$  és una solució de l'equació  $y' = 0$  l'altra solució ha de ser  $\alpha = 4$ . És a dir, l'abscissa del mínim relatiu és  $x = 4$ .

Valoreu el coneixement que es demostri del mètode per a calcular extrems relatius. Traieu com a màxim mig punt per errors en els càlculs.

3. Sigui  $f(x) = \frac{mx}{x-1} - 2$ , on  $m$  és un paràmetre.

- a) Determineu per a cada valor del paràmetre  $m$  el valor del límit  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  (si existeix).
- b) Per a quins valors de  $m$  la derivada  $f'(x)$  de la funció  $f(x)$  és positiva per a tot  $x$ ?

a) Excepte quan  $m = 2$  es compleix  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$  i quan  $m = 2$  el resultat que tenim és  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ .

b) La derivada de  $f(x)$  és

$$f'(x) = \frac{m+2}{(x-1)^2}$$

que és positiva quan  $m < 2$ .

Compteu un punt per cada apartat. En l'apartat a) valoreu sobretot si es té en compte el cas  $m = 2$ . Per errors en els càlculs no traieu més de mig punt.

4. Calculeu l'angle que forma el pla  $x - 2y + z = 1$  amb la recta determinada per les

$$\text{equacions } \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 \end{cases}$$

L'angle és el complementari del format per un vector director de la recta i un vector ortogonal al pla. La recta admet com a vector director  $(1, 1, 0)$  i el pla té com a vector perpendicular  $(1, -2, 1)$ . L'angle  $\alpha$  entre aquests dos vectors queda determinat per

$$\cos \alpha = \frac{(1, -2, 1) \cdot (1, 1, 0)}{\|(1, -2, 1)\| \|(1, 1, 0)\|} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

i per tant  $\alpha \simeq 106,77^\circ$ . L'angle entre la recta i el pla serà  $16,77^\circ$ .

Valoreu sobretot el plantejament i el mètode. Per errors en els càlculs traieu com a màxim mig punt. Teniu en compte que us podeu trobar amb respostes en les que es pren com a definició d'angle entre un pla i una recta l'angle entre el vector director de la recta i el vector perpendicular al pla i que, per tant, una resposta coherent amb aquesta definició s'ha de considerar correcta.

## Problemes

1. Considereu les rectes  $r$  i  $s$  amb les equacions següents:

$$r : \begin{cases} x & y + 3 = 0 \\ 2x & z + 2 = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} & y + \frac{1}{3} = 0 \\ x & 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

- a) Calculeu, de cada una de les rectes, un punt i un vector director.
- b) Determineu si existeix cada un dels següents objectes i en cas afirmatiu calculeu la seva equació:
- El pla paral·lel a la recta  $s$  que conté la recta  $r$ .
  - El pla perpendicular a la recta  $s$  que conté la recta  $r$ .
  - La recta perpendicular a les rectes  $r$  i  $s$  que passa per  $(0, 0, 0)$ .

a) Solucionant els sistemes corresponents, les rectes es poden donar com

$$r : (x, y, z) = (1, 2, 0) + z(1/2, 1/2, 1), \quad s : (x, y, z) = (3, 1/3, 0) + z(2, 0, 1)$$

Llavors un punt de  $r$  és  $(1, 2, 0)$  i un vector director  $(1/2, 1/2, 1)$ . El punt  $(3, 1/3, 0)$  és de  $s$  i el vector director pot ser  $(2, 0, 1)$ .

b) i) El pla ve donat pels punts  $(x, y, z)$  amb

$$(x, y, z) = (1, 2, 0) + \lambda(1/2, 1/2, 1) + \mu(2, 0, 1)$$

o per l'equació  $x + 3y - 2z = 5$ .

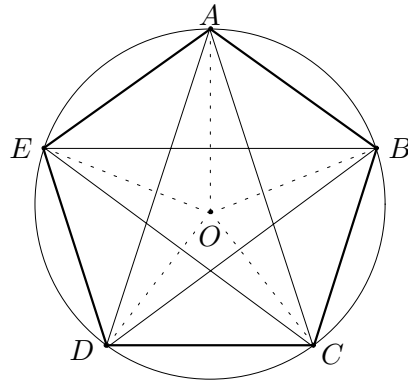
- Com que els vectors directores de  $r$  i  $s$  no són perpendiculars el pla que es demana no existeix.
- Les components dels vectors  $(a, b, c)$  que són perpendiculars als vectors directores de  $r$  i  $s$  han de complir

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + c &= 0 \\ 2a + c &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Una solució és  $(1, 3, -2)$  i per tant la recta està donada pels punts  $(x, y, z)$  de la forma  $(x, y, z) = \lambda(1, 3, -2)$ .

Compteu un punt per l'apartat a) i un punt per cada un dels apartats i), ii), iii). Per errors en els càlculs no traieu més d'un punt.

2. Sobre una circumferència de radi 1 m i centre en el punt  $O$  considerem els cinc vèrtexs  $A, B, C, D, E$  d'un pentàgon regular (és a dir, amb els cinc costats de la mateixa longitud) com el del dibuix següent:



(on hi hem dibuixat també els costats  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  i  $DE$ ; les diagonals  $AC$ ,  $BD$ ,  $CE$ ,  $DA$  i  $EB$ ; i els radis que acaben en cada un dels vèrtexs  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ ,  $OD$  i  $OE$ ).

Calculeu:

- L'angle que formen el radi que acaba en el vèrtex  $A$  amb el costat  $AB$  i l'angle que formen en el vèrtex  $A$  els dos costats que el tenen com extrem (és a dir, l'angle en  $A$  entre els costats  $EA$  i  $AB$ ).
- La longitud de cada un dels costats del pentàgon.
- La longitud de qualsevol de les diagonals (per exemple la  $EB$ ).
- L'àrea del triangle  $EAB$ .

- Si considerem el triangle  $OAB$ , tenim en compte que  $OA$  i  $OB$  valen 1 i que l'angle en  $O$  val  $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ , els angles en  $A$  i  $B$  valdran  $\alpha = 54^\circ$ .

- Aplicant el teorema del cosinus al triangle  $OAB$  tindrem

$$(AB)^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times \cos 72^\circ$$

de forma que  $AB \simeq 1,1755$ .

- En el triangle  $EAB$  l'angle en  $A$  val  $2\alpha = 108^\circ$ . Aplicant el teorema del cosinus

$$EB = \sqrt{2(AB)^2 - 2(AB)^2 \cos 108^\circ} \simeq 1,90211$$

- Com que el triangle  $EAB$  és isòsceles els angles en  $B$  i en  $E$  són iguals i valen  $\beta = 36^\circ$ . L'altura  $h$  des de  $A$  serà

$$h = (AB) \sin 36^\circ \simeq 0,69098$$

i per tant l'àrea  $\frac{(EB) \times h}{2} \simeq 0,65716$ .

Compteu un punt per cada apartat. Valoreu la interpretació correcta de l'enunciat i el coneixement que es demostrï de les tècniques per a resoldre triangles. Per errors en el càlculs no traieu més d'un punt.