Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals (ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar altres decimals per als diferents apartats i després arrodonir la suma).
Aquestes pautes no pretenen planificar tots els casos que en la pràctica es poden presentar ni donar la *millor solució* a cada pregunta. Hi haurà molts casos concrets, doncs, en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos en què les pautes siguin de difícil aplicació, feu prevaler sempre el vostre criteri i sentit comú.

Qüestions

1. *Donada* $f(x) = (2x+1)\,e^{(x^2+x)}$ *determineu la funció* $g(x)$ *tal que* $g'(x) = f(x)$ *(és a dir, una primitiva de* $f(x)$*) i que el seu gràfic passa pel punt* $(0, 2)$.

Les funcions primitives de $f(x) = (2x+1)\,e^{(x^2+x)}$ són de la forma $g(x) = e^{(x^2+x)}+C$, on C és qualsevol constant. Si es demana que el seu gràfic passi pel punt $(0, 2)$ cal que $2 = g(0) = e^0 + C$ d'on es dedueix que $C = 1$ i $g(x) = e^{(x^2+x)} + 1$.

Compteu un punt (1) per la determinació correcta de les primitives de $f(x)$ i l'altre pel càlcul de la constant que fa que el gràfic passi justament pel $(0, 2)$.

---

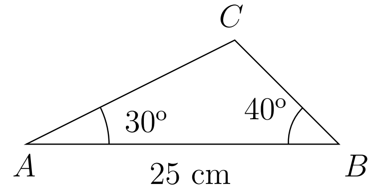
2. *Calculeu el punt de la corba* $y = 2 + x - x^2$ *on la tangent és paral·lela a la recta* $y = x$.

La recta $y = x$ té pendent 1. Per tant el que es busca és el punt on la derivada de $f(x) = 2 + x - x^2$ val 1. Com que $f'(x) = 1 - 2x$ això es produeix per a $x = 0$ i el punt corresponent és el $(0, 2)$.

Es difícil que en aquest exercici es produeixin errors de càlcul i és d'esperar que l'alumne ho faci bé si té els conceptes clars. En general, poseu zero (0) o dos punts (2), si ho creieu necessari matitzeu aquestes notes segons el vostri criteri.

---

3. *Calculeu l'àrea del triangle* ABC *representat en l'esquema següent:*



L'angle α en C compleix $\alpha = 180^o - 40^o - 30^o = 110^o$. La longitud b del costat AC complirà

$$\frac{b}{\sin(40^o)} = \frac{25}{\sin(110^o)} \Leftrightarrow b = \frac{25\sin(40^o)}{\sin(110^o)} \sim 17.10100716 \text{ cm}$$

L'altura h del triangle és

$$h = b\sin(30^o) = \frac{b}{2} \sim 8.550503581 \text{ cm}$$

Finalment, l'àrea serà

$$\frac{25h}{2} \sim 106.8812948 \text{ cm}^2$$

Poseu un punt i mig (1.5) pel planteig correcte i l'expressió de l'àrea del triangle i deixeu el mig punt restant (0.5) pel càlcul final. Valoreu sempre el coneixement que l'alumne demostri de les tècniques de resolució de triangles.

---

4. *Considereu els punts de l'espai* $A = (0, -2a - 1, 4a - 2)$, $B = (1, -3, 4)$, $C = (3, -5, 3)$.

a) *Comproveu que el triangle de vèrtexs A, B i C és rectangle en B per a qualsevol valor de a.*

b) *Calculeu els valors de a que fan que aquest triangle sigui isósceles.*

---

a) L'únic que cal fer és comprovar que els vectors $\vec{AB} = (1, 2a - 2, -4a + 6)$ i $\vec{CB} = (2, -2, -1)$ sempre són perpendiculars. Calculant el producte escalar obtenim

$$\vec{AB} \cdot \vec{CB} = 1 \times 2 + (2a - 2) \times (-2) + (-4a + 6) \times (-1) = 0$$

que és el que voliem veure.
Alternativament, també es pot comprovar que la suma dels quadrats de les distàncies entre A i B i entre C i B coincideix amb la distància entre A i C al quadrat.

b) El triangle serà isósceles quan la distància d_1 de A a B i la distància d_2 de C a B coincideixin. Calculant els quadrats de d_1 i d_2 s'obté

$$\begin{aligned} {d_1}^2 &= 1 + (2a - 2)^2 + (-4a + 6)^2 = 20a^2 - 56a + 41 \\ {d_2}^2 &= 2^2 + (-2)^2 + (-1)^2 = 9 \end{aligned}$$

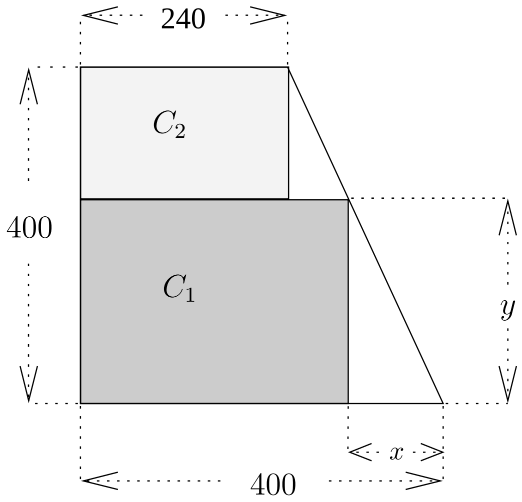
Les dues distàncies coincideixen quan

$$20a^2 - 56a + 41 = 9 \Leftrightarrow a = 2 \text{ o bé } a = \frac{4}{5}$$

Compteu un punt (1) per cada apartat i valoreu-los de forma independent. Per errors de càlcul no treieu més de mig punt (0.5).

Problemes

1. *Un camp té forma de trapezi rectangle, de bases 240 m i 400 m i el costat perpendicular a les bases també de 400 m. Es vol partir tal com indica la figura per fer dos camps rectangulars C_1 i C_2. Anomenem x i y els catets d'un dels triangles rectangles que es formen.*



a) *Comproveu que $y = \dfrac{5}{2}x$.*

b) *Utilitzant la igualtat anterior, escriviu la suma de les àrees dels dos camps en funció de x.*

c) *El camp C_1 es vol sembrar amb blat de moro i el camp C_2 amb blat. Amb el blat de moro s'obté un benefici de 0,12 € per m^2 i amb el blat un benefici de 0,10 € per m^2. Determineu les mides de cada un dels camps per tal d'obtenir el benefici màxim.*

---

a) S'ha de tenir en compte que es compleix

$$\frac{y}{x} = \frac{400}{400-240} = \frac{5}{2}$$

b) La superfície del camp C_1 serà

$$(400 - x) \times y = (400 - x) \times \frac{5}{2} \times x$$

mentre que la del camp C_2 serà

$$240 \times (400 - y) = 240 \times (400 - \frac{5}{2}x)$$

La suma de les dues superfícies, en funció de x, resultarà

$$(400 - x) \times \frac{5}{2} \times x + 240 \times (400 - \frac{5}{2}x) = 96000 + 400x - \frac{5}{2}x^2$$

c) El benefici $B(x)$ que s'obté en funció de x ve donat per

$$B(x) = 0,12 \times \frac{5}{2} \times x \times (400 - x) + 0,1 \times 240 \times (400 - \frac{5}{2}x) = 9600 + 60x - 0,3x^2$$

(per a x entre 0 i $160 = 400 - 240$).

Aquesta funció té derivada $B'(x) = 60 - 0,6x$ que s'anul·la únicament per a $x = 100$ i per a aquest valor s'obté el benefici màxim. En aquesta situació les dimensions del camp C_1 són 300×250 metres i les del camp C_2 són 240×150 metres.

Compteu un punt (1) pels apartats a) i b) i dos punts (2) per l'apartat c). Intenteu puntuar els tres apartats independentment i per errors en els càlculs no treieu més d'un punt (1) del total dels quatre.

---

2. *Un segment d'extrems $A = (5, 3, 1)$ i $B = (4, 2, -1)$ es divideix en tres parts iguals mitjançant dos plans perpendiculars a aquest segment. Calculeu les equacions dels dos plans i la distància entre ells.*

Es pot prendre com a vector normal $\vec{n}$ a aquests plans el vector $\vec{BA} = (1, 1, 2)$ de forma que les equacions d'aquests plans han de ser de la forma $x + y + 2z = k$, on k és una constant diferent per a cada un d'ells. Els punts P i Q que divideix el segment AB en tres parts iguals són

$$P = B + \frac{1}{3}\vec{BA} = \left(\frac{13}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right), \qquad Q = B + \frac{2}{3}\vec{BA} = \left(\frac{14}{3}, \frac{8}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Aleshores el pla que passa per P serà $x + y + 2z = 6 (= 13/3 + 7/3 - 2 \times (1/3))$ i el que passa per Q serà $x + y + 2z = 8 (= 14/3 + 8/3 + 2 \times (4/3))$.

La distància entre aquests dos plans es pot determinar com un terç de la longitud del vector $\vec{AB}$ i, per tant, val $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(Teniu en compte que hi ha altres maneres d'obtenir aquests mateixos resultats.)

Compteu fins a dos punts (2) pel plantejament, fins a un punt mig més (1.5) per la determinació correcta de les equacions dels plans (valorant si l'alumne ha interpretat correctament quins són els plans) i deixeu el mig punt restant (0.5) pel càlcul explícit de la distància entre els dos plans. Per errors en els càlculs no treieu més d'un punt (1) del total del quatre.
