

### SÈRIE 3.

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar fraccions de 0,25 punts en els diferents apartats i després arrodonir la suma total.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0,25 o 0,5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0,75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.

### QÜESTIONS

1. Considereu la funció  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ . Es demana:

- a) calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de  $f(x)$  en el punt d'abscissa  $x = 3$ ;
- b) existeix alguna altra recta tangent a la gràfica de  $f(x)$  que sigui paral·lela a la que heu trobat? Raoneu la resposta i, en cas afirmatiu, trobeu-ne l'equació.

### SOLUCIÓ.

a) [1 punt] El punt de tangència és  $(3, f(3)) = (3, 8)$ . El pendent de la recta tangent és  $f'(3)$ . Com que  $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ ,  $f'(3) = 11$ .  
L'equació de la tangent és

$$y - 8 = 11 \cdot (x - 3).$$

Arreglada queda com

$$11x - y - 25 = 0.$$

*Accepteu com a correcta l'equació sense arreglar.*

b) [1 punt] En cas d'existir, ha de ser tangent en un punt on  $f'(x) = 11$ . Resolem l'equació  $3x^2 - 6x + 2 = 11$  i obtenim  $x = 3$  (que ja teníem) i  $x = -1$ . Per tant, la recta tangent en el punt  $(-1, f(-1)) = (-1, -4)$  és paral·lela a l'anterior. La seva equació és

$$y + 4 = 11 \cdot (x + 1)$$

que, un cop arreglada, queda com

$$11x - y + 7 = 0.$$

*Accepteu com a correcta l'equació sense arreglar. Puntueu 0,25 punts si reconeixen que la nova tangent ha de tenir pendent 11.*

2. Donada la funció  $f(x) = \cos x - \cos^3 x$ , es demana:

a) trobeu la seva integral indefinida;

b) quina és la primitiva de  $f(x)$  que passa pel punt  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ?

**Indicació.** Recordeu que  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ .

**SOLUCIÓ.**

a) [1,5 punts]

$$\int (\cos x - \cos^3 x) dx = \int \cos x \cdot (1 - \cos^2 x) dx = \int \cos x \cdot \sin^2 x dx = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

b) [0,5 punts] Si la primitiva ha de passar pel punt  $(\pi/2, 0)$ ,

$$\frac{\sin^3 \frac{\pi}{2}}{3} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{3}.$$

La primitiva demanada és, doncs,  $\frac{\sin^3 x - 1}{3}$ .

3. Considereu la funció  $f(x) = 1 + \frac{a}{x} + \frac{6}{x^2}$  on  $a$  és un paràmetre.

a) Calculeu el valor del paràmetre  $a$  sabent que  $f(x)$  té un extrem relatiu en el punt d'abscissa  $x = 3$ .

b) Aquest extrem relatiu, es tracta d'un màxim o d'un mínim? Raoneu la resposta.

**SOLUCIÓ.**

a) [1,5 punts] Hem de tenir  $f'(3) = 0$ . Ara,  $f'(x) = -\frac{a}{x^2} - \frac{12}{x^3}$ . O sigui que

$$f'(3) = \frac{-3a - 12}{27}. \text{ Igualant a } 0, \text{ tenim } a = -4.$$

Puntueu 0,5 punts si fan bé la derivada.

b) [0,5 punts] Per veure el caràcter de l'extrem, calculem la derivada segona,

$$f''(x) = \frac{8}{x^3} + \frac{36}{x^4}. f''(3) = \frac{4}{27} > 0 \text{ per tant l'extrem és un mínim relatiu.}$$

4. Considerem els punts de l'espai  $A(1,1,0)$ ,  $B(0,1,2)$  i  $C(-1,2,1)$ . Ens diuen que aquests tres punts formen part del conjunt de solucions d'un sistema de tres equacions lineals amb tres incògnites. Es demana:

- a) aquests punts, estan alineats?  
b) podem saber el rang de la matriu del sistema d'equacions?  
Raoneu adequadament les respostes.

### SOLUCIÓ.

a) [1 punt] Els tres punts no estan alineats perquè els vectors  $\vec{AB} = (-1,0,2)$  i  $\vec{AC} = (-2,1,1)$  són linealment independents (no són proporcionals).

b) [1 punt] Com que els tres punts no estan alineats, la solució del sistema d'equacions lineals no pot representar una recta. Ha de ser doncs un pla o tot l'espai (aquest últim cas, encara que tèoricament correcte, requeriria que la matriu dels sistema fos de rang 0, o sigui una matriu idènticament 0). Si la solució és un pla, el nombre de graus de llibertat del sistema és 2 i el rang de la matriu del sistema, 1: les tres equacions representen el mateix pla.

## PROBLEMES

5. Donat el sistema

$$\begin{cases} y + z = 2 \\ -2x + y + z = -1 \\ (2-2m)x + (2m-2)z = m-1, \end{cases}$$

on  $m$  és un paràmetre, es demana:

- a) discuteix el sistema segons els valors de  $m$ ;  
b) resoleu els casos compatibles;  
c) en cada un dels casos de la discussió de l'apartat a), feu una interpretació geomètrica del sistema.

### SOLUCIÓ.

a) [1,5 punts] Si el discutim a través del determinant del sistema,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2-2m & 0 & 2m-2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (m-1),$$

- 1) per  $m \neq 1$ , el sistema és compatible determinat.  
2) per  $m = 1$ , el sistema queda reduït a dues equacions,

$$\begin{cases} y + z = 2 \\ -2x + y + z = -1, \end{cases}$$

el rang de la matriu del sistema és 2 i, per tant, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

També es pot discutir tot observant que restant la segona equació de la primera s'obté  $x = 3/2$ . Substituint aquest valor a la tercera equació,

$$3(1-m) + 2(m-1)z = m-1 \Rightarrow (m-1)z = 2(m-1).$$

Si  $m \neq 1$ ,  $z = 2$  i, substituint a la primera equació,  $y = 0$ . El sistema té, doncs, solució única: compatible determinat. De passada tenim la solució:

$$x = 3/2; \quad y = 0; \quad z = 2.$$

Si  $m = 1$ , el valor de  $z$  queda indeterminat i, de la primera equació,  $y = 2 - z$ . El sistema té doncs, infinites solucions que depenen del valor de  $z$ : sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat. Tenim també la solució:

$$x = 3/2; \quad y = 2 - z; \quad z = z.$$

Per últim, també es pot discutir per Gauss. Intercanviem l'ordre de les dues primeres equacions,

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2-2m & 0 & 2m-2 & m-1 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{tot suposant que } m \neq 1)$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-m & m-1 & 2m-2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2m-2 & 4m-4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

O sigui que si  $m \neq 1$  el sistema és compatible determinat.

El cas  $m = 1$  porta a la matriu reduïda,

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ de rang 2.}$$

per tant, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

b) **[1,5 punts]** El cas  $m \neq 1$ . La solució és  $x = 3/2$ ;  $y = 0$ ;  $z = 2$ .

El cas  $m = 1$ . La solució és  $x = 3/2$ ;  $y = 2 - z$ ;  $z = z$ .

*Puntueu 0,5 punts la resolució del cas determinat i 1 punt la del cas indeterminat.*

c) **[1 punt]** Cada equació representa l'equació d'un pla a l'espai.

En el cas  $m \neq 1$ , els tres plans es tallen en un únic punt.

En el cas  $m = 1$ , els dos plans que queden es tallen en una recta d'equació paramètrica

$$\begin{cases} x = 3/2 \\ y = 2 - s \\ z = s. \end{cases}$$

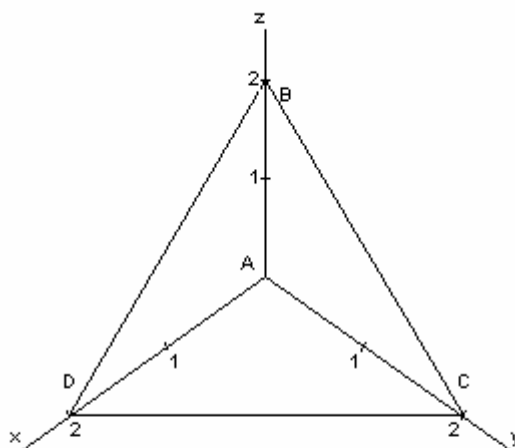
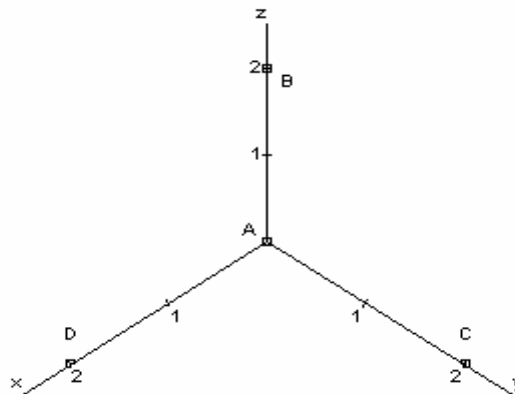
*Puntueu 0,5 punts cada interpretació.*

6. Tenim quatre punts a l'espai:  $A(0,0,0)$ ;  $B(0,0,2)$ ;  $C(0,2,0)$  i  $D(2,0,0)$ . Es demana:

- representeu gràficament els quatre punts;
- calculeu el volum del tetràedre (piràmide de base triangular)  $ABCD$ ;
- trobeu l'equació del pla que passa per  $B, C$  i  $D$ ;
- calculeu la distància de l'origen al pla de l'apartat anterior.

**SOLUCIÓ.**

a) [0,5 punts]



b) [1,5 punts]

A partir del gràfic, el volum del tetràedre es pot calcular directament com el volum de la piràmide de base el triangle rectangle  $ABC$  i altura 2:

$$V = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \right) \cdot 2 = \frac{4}{3}.$$

Per calcular el volum del tetràedre, també es pot fer servir la fórmula que l'expressa com 1/6 del producte mixt dels vectors  $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$  (en valor absolut):

$$\frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-8}{6}, \text{ en}$$

valor absolut,  $\frac{4}{3}$ .

c) [1 punt] L'equació general del pla que ens demanen és (prenem  $(0,0,2)$  com punt base i  $(0,2,-2);(2,0,-2)$  com vectors directors):

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ y & 2 & 0 \\ z-2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0; \text{ és a dir, } -4 \cdot (x + y + z - 2) = 0.$$

El pla demanat té per equació general  $x + y + z - 2 = 0$ .

Qualsevol altra forma d'equació també és acceptable.

d) [1 punt] La distància de l'origen al pla  $x + y + z - 2 = 0$  és, fent servir la fórmula de la distància d'un punt a un pla,

$$\left| \frac{-2}{\sqrt{3}} \right| = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

També es pot fer servir el fet que sabem el volum del tetràedre és  $\frac{4}{3}$  i que el mateix volum el podem calcular prenent com a base el triangle equilàter  $BCD$ , de costat  $l = 2\sqrt{2}$ , i altura la distància que ens demanen,  $d$ . L'àrea del triangle és

$$\frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{8\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}. \text{ Tenim doncs } \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot d = \frac{4}{3} \Rightarrow d = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

## SÈRIE 1

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar fraccions de 0,25 punts en els diferents apartats i després arrodonir la suma total.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0,25 o 0,5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0,75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.

## QÜESTIONS

1. La matriu ampliada d'un sistema d'equacions lineals, un cop reduïda pel mètode de Gauss, és

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) El sistema, és compatible o incompatible? Raoneu la resposta.  
b) En cas que sigui compatible resoleu-lo.

## SOLUCIÓ.

a) **[1 punt]** El sistema reduït té dues equacions i tres incògnites. El rang de la matriu del sistema i de la matriu ampliada és 2. Per tant, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

b) **[1 punt]** El sistema reduït és

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + 2z = 1. \end{cases}$$

Fent servir  $z$  com a incògnita secundària, la solució és pot expressar com

$$\begin{cases} x = 5z - 2 \\ y = 1 - 2z \\ z = z. \end{cases}$$

2. Considereu els punts de l'espai  $A(0,0,1)$ ,  $B(1,1,2)$  i  $C(0,-1,-1)$ .

a) Trobeu l'equació del pla  $ABC$ .

b) Si  $D$  és el punt de coordenades  $(k,0,0)$ , quant ha de valer  $k$  per tal que els quatre punts  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$  siguin coplanaris?

**SOLUCIÓ.**

a) [1 punt] L'equació del pla determinat per  $A$ ,  $B$  i  $C$  és

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 1 & -1 \\ z-1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -x + 2y - z + 1 = 0.$$

(Hem fet servir  $A$  com a punt base i  $\vec{AB} = (1,1,1)$  i  $\vec{AC} = (0,-1,-2)$  com a vectors directores del pla). També són igualment vàlides les equacions vectorial o paramètrica:

$$(x, y, z) = (0, 0, 1) + s \cdot (1, 1, 1) + t \cdot (0, -1, -2); \quad \begin{cases} x = s \\ y = s - t \\ z = 1 + s - 2t \end{cases}$$

b) [1 punt] Substituint  $x$ ,  $y$  i  $z$  per les coordenades del punt  $D(k,0,0)$  a l'equació general obtenim  $-k+1=0$ . Per tant  $k=1$ . El punt  $D(1,0,0)$  és coplanari amb  $A$ ,  $B$  i  $C$ .

Això mateix es pot fer amb l'equació vectorial o paramètrica del pla trobant el valor dels paràmetres  $s$  i  $t$  que fan compatible el sistema:

$$\begin{cases} k = s \\ 0 = s - t \\ 0 = 1 + s - 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 1 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow k = 1.$$

També es pot estudiar la coplanarietat dels quatre punts exigint que el determinant d'ordre 4 següent valgui 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Arribem a  $k=1$ .



3. Considereu les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Trobeu una matriu  $X$  que compleixi  $A \cdot X + A = B$ .

**SOLUCIÓ.**

**[2 punts]** La matriu  $X$  només pot ser quadrada d'ordre 2. El problema es pot resoldre directament, fent  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  i efectuant  $A \cdot X + A$  i igualant a  $B$ . S'obté el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} 2a + c = -1 \\ a + c = 1 \\ 2b + d = 1 \\ b + d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \\ c = 3 \\ d = 1 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

També es pot resoldre directament l'equació matricial:

$$AX + A = B \Rightarrow AX = B - A \Rightarrow X = A^{-1}(B - A)$$

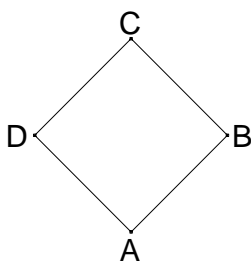
La inversa de  $A$  és  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

Ara,

$$X = A^{-1}(B - A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Puntueu 1 punt si es planteja correctament el sistema o s'obté  $X$  correctament aïllada. L'altre punt per la resolució correcta.*

4. Els punts  $A(k-3, 2, 4)$ ,  $B(0, k+2, 2)$  i  $C(-2, 6, k+1)$  són tres dels vèrtexs d'un rombe  $ABCD$  (vegeu la figura).



Es demana:

- calculeu el valor de  $k$ ;
- demostreu que el rombe és un quadrat.

**SOLUCIÓ.**

a) **[1 punt]** Si el paral·lelogram  $ABCD$  és un rombe,  $d(A,B) = d(B,C)$ :

$$\sqrt{(k-3)^2 + k^2 + 4} = \sqrt{4 + (4-k)^2 + (k-1)^2} \Rightarrow k = 2.$$

b) **[1 punt]** El rombe és un quadrat atès que els vectors  $\vec{AB} = (1, 2, -2)$  i

$\vec{BC} = (-2, 2, 1)$  (o un altre parell adequat,  $AB$ ,  $AD$ , etc.) són perpendiculars:

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 = 0.$$

També es pot fer per Pitàgores aplicat a un dels triangles  $ABC$ ,  $ABD$ , etc.

PROBLEMES

5. Considerem la funció  $f(x) = x^3 + mx^2 + 1$ ,  $m \geq 0$ .

- a) Calculeu el valor de  $m$  per tal que l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció, l'eix OX i les rectes  $x=0$  i  $x=2$  sigui de 10 unitats quadrades.  
b) Per a  $m=1$ , indiqueu el punt o els punts on la recta tangent a la gràfica de la funció forma un angle de  $45^\circ$  amb el semieix positiu de OX.

SOLUCIÓ.

a) [2 punts] La funció es manté positiva per sobre de l'interval  $[0,2]$  perquè per  $x \geq 0$  i  $m \geq 0$  forçosament  $x^3 + mx^2 + 1 \geq 1$ . Alternativament es pot raonar que  $f(x)$  es manté positiva a l'interval  $[0,2]$  perquè  $f(0) = 1$  i  $f'(x) = 3x^2 + 2mx \geq 0$  per  $x \in [0,2]$  (recordem que  $m \geq 0$ ).

En conseqüència, l'àrea del recinte que ens diu l'enunciat és

$$\int_0^2 (x^3 + mx^2 + 1) dx = \frac{x^4}{4} + m \frac{x^3}{3} + x \Big|_0^2 = 6 + \frac{8m}{3}.$$

Així,

$$6 + \frac{8m}{3} = 10 \Rightarrow m = \frac{3}{2}.$$

Valoreu 0,5 punts el raonament que  $f(x) \geq 0$  a l'interval  $[0,2]$ .

b) [2 punts] Per  $m=1$  la funció és  $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ . El pendent de la recta tangent que ens diuen ha de ser igual a 1. Per tant, el punt o punts que ens demanen han de ser aquells on  $f'(x) = 3x^2 + 2x = 1$ . O sigui  $x = -1$  i  $x = 1/3$ . Els punts en qüestió són  $(-1,1)$  i  $(\frac{1}{3}, \frac{31}{27})$ .

Valoreu amb 0,5 punts el fet el pendent de la recta és 1.

Si la resposta es limita a donar  $x = -1$  i  $x = 1/3$  doneu-la per bona.

6. Donats la funció  $f(x) = \sqrt{x}$  i el punt  $A(2,0)$  situat sobre l'eix de les abscisses, es demana:

a) trobeu la funció que expressa la distància del punt  $A$  a un punt qualsevol de la gràfica de la funció;

b) trobeu les coordenades del punt de la gràfica de  $f(x)$  més proper a  $A$ .

### SOLUCIÓ.

a) [1 punt] Un punt qualsevol de la gràfica de la funció és  $(x, \sqrt{x})$ . La distància a  $A$  és:

$$d(x) = \sqrt{(x-2)^2 + x} = \sqrt{x^2 - 3x + 4}.$$

b) [3 punts] El punt que ens demanen ha de fer mínima la funció  $d(x)$ :

$$d'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+4}} = 0 \Rightarrow 2x-3=0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$$

[També es pot calcular el punt on s'assoleix el mínim de la funció  $d^2(x)$ .]

En aquest punt hi ha un mínim de  $d(x)$  atès que per  $x < \frac{3}{2}$ ,  $d'(x) < 0$  i per

$x > \frac{3}{2}$ ,  $d'(x) > 0$ . El criteri de la segona derivada porta a la mateixa conclusió:

$$d''(x) = \frac{7}{4(x^2-3x+4)^{3/2}}; \quad d''\left(\frac{3}{2}\right) > 0.$$

Per tant el punt demanat és  $\left(\frac{3}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ .

*Puntueu 2 punts per trobar correctament el valor  $x=3/2$  i 1 punt per la comprovació de mínim.*