

SÈRIE 4.

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar fraccions de 0,25 punts en els diferents apartats i després arrodonir la suma total.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0,25 o 0,5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0,75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.

QÜESTIONS

1. Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a i b són nombres reals, trobeu els valors de a i b que fan que les dues matrius commutin, és a dir, que fan que es compleixi $A \cdot B = B \cdot A$.

SOLUCIÓ [2 punts] Tenim que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Per tant, A i B commuten per a tot a i b .

2. Donada la funció $f(x) = \frac{x}{\sqrt{5x^2 - 4}}$ es demana:

- calculeu la integral $\int f(x) dx$;
- trobeu la primitiva F de f que compleixi $F(1) = 1$.

SOLUCIÓ

a) [1 punt]

$$\int \frac{x}{\sqrt{5x^2 - 4}} dx = \frac{1}{10} \int 10x \cdot (5x^2 - 4)^{-1/2} dx = \frac{1}{10} \frac{(5x^2 - 4)^{1/2}}{1/2} + C = \frac{1}{5} \sqrt{5x^2 - 4} + C.$$

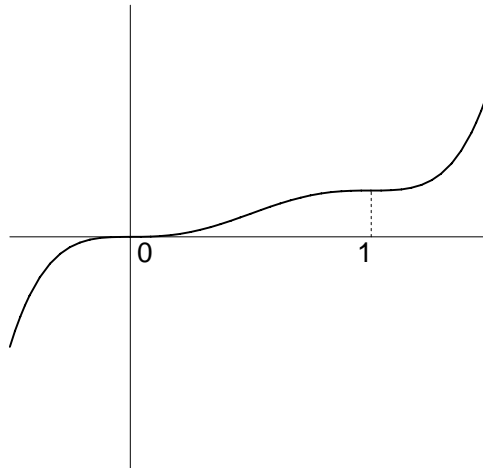
b) [1 punt] Per trobar la primitiva que ens demanen, substituïm a

$$F(x) = \frac{1}{5} \sqrt{5x^2 - 4} + C; 1 = F(1) = \frac{1}{5} + C \Leftrightarrow C = \frac{4}{5}.$$

La primitiva demanada és $F(x) = \frac{1}{5}\sqrt{5x^2-4} + \frac{4}{5}$.

3. Trobeu els màxims i mínims relatius de la funció $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3$.

SOLUCIÓ [2 punts]



Resolem $f'(x) = 0$:

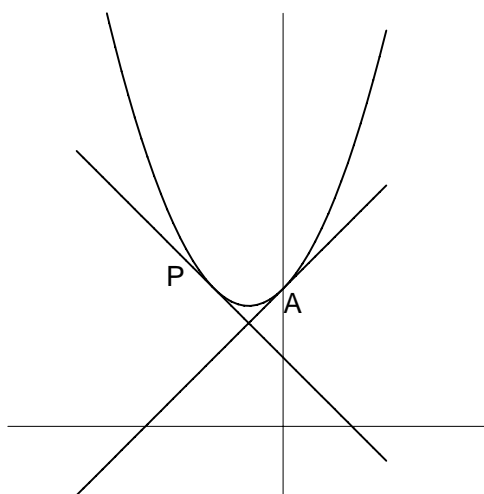
$$30x^4 - 60x^3 + 30x^2 = 0 \Leftrightarrow 30x^2(x^2 - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow 30x^2(x-1)^2 = 0.$$

Les arrels són $x = 0$; $x = 1$, cada una doble. Per classificar màxims i mínims, podem fer servir els signes de f' al voltant de cada un dels punts candidats a màxim o mínim. En aquest cas, com que $f'(x) = 30x^2(x-1)^2 \geq 0$ per a tot x , la funció és sempre creixent i, per tant, no hi ha ni màxims ni mínims. El criteri de la derivada segona també es pot fer servir: $f''(x) = 120x^3 - 180x^2 + 60x = 60x(2x^2 - 3x + 1)$. Tenim que $f''(0) = 0$ i $f''(1) = 0$. Per tant, hem de calcular la derivada tercera, $f'''(x) = 360x^2 - 360x + 60 = 60(6x^2 - 6x + 1)$. Tenim $f'''(0) \neq 0$ i $f'''(1) \neq 0$, en conseqüència, tant a $x = 0$ com a $x = 1$ no hi ha màxims i mínims sinó que hi ha punts d'inflexió.

4. Sigui la paràbola $y = 2x^2 + x + 1$ i sigui A el punt de la paràbola d'abscissa 0. Es demana:

- equació de la recta tangent a la paràbola en el punt A ;
- en quin punt de la paràbola la recta tangent és perpendicular a la recta que heu trobat en l'apartat anterior?

SOLUCIÓ



- [1 punt]** El punt A té coordenades $(0,1)$. El pendent de la recta tangent serà $y'(0) = 1$. La recta tangent és $y - 1 = x$.
- [1 punt]** La recta tangent en un punt qualsevol $(a, 2a^2 + a + 1)$ té pendent $y'(a) = 4a + 1$. Per tal que aquesta recta sigui perpendicular a la de l'apartat a) que té pendent 1, s'ha de complir que $1 \cdot (4a + 1) = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$. El punt demanant, P , té coordenades $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

PROBLEMES

5. De tres nombres, x , y i z , sabem el següent: que el primer més el segon sumen 0; que el primer més el tercer sumen 1; que la suma de tots tres val 0 i, per últim, ens diuen que el primer multiplicat per un nombre k més el doble de la suma del segon i del tercer dóna 1. Es demana:

a) què podem dir del valor de k ?

b) quan valen els tres nombres?

SOLUCIÓ

a) [2 punts] Els nombres han de ser solució del sistema:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ kx + 2(y + z) = 1 \end{cases}$$

Podem optar per dos maneres de resoldre el problema. Una és resoldre el sistema format pels tres primeres equacions: $x = 1$; $y = -1$; $z = 0$. Ara, substituint a la quarta equació, tenim que $k = 3$.

També podem discutir el sistema segons els valors de k . Si triangulem per Gauss la matriu ampliada del sistema, tindrem:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ k & 2 & 2 & 1 \end{array} \right) \square \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2-k & 2 & 1 \end{array} \right) \square \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4-k & 3-k \end{array} \right) \square \\ & \square \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4-k & 3-k \end{array} \right) \square \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-k \end{array} \right). \end{aligned}$$

Es veu clar que, per tal que el sistema sigui compatible, $k = 3$.

b) [2 punts] Per $k = 3$, el sistema es pot resoldre a partir de la matriu triangulada de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ -y + z = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

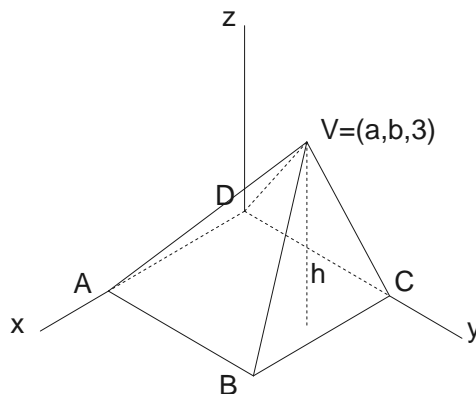
6. Una piràmide de base quadrada té el vèrtex en el pla d'equació $z = 3$. Tres dels vèrtexs de la base són els punts del pla OXY : $A = (1,0,0)$, $B = (1,1,0)$, $C = (0,1,0)$.

Es demana:

- feu un gràfic dels elements del problema. Quines són les coordenades del quart vèrtex de la base, D ?
- quin és el volum de la piràmide? [Volum = $\frac{\text{àrea base} \times \text{altura}}{3}$]
- si el vèrtex de la piràmide és el punt $V = (a,b,3)$, quina és l'equació de la recta que conté l'altura sobre la base?

SOLUCIÓ

a) [1 punt]



El vèrtex $D = (0,0,0)$.

b) [1 punt] El volum de la piràmide serà $\text{Vol} = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$ on S és l'àrea de la base i

h l'altura sobre aquesta base. En el nostre cas, la base és un quadrat de costat 1, per tant, $S = 1$ i el vèrtex de la piràmide, V , està sobre el pla $z = 3$ que és paral·lel al pla de la base, $z = 0$. La distància del vèrtex al pla de la base és doncs (independentment del lloc on es trobi el vèrtex) $h = 3$. Tenim doncs que

$$\text{Vol} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 3 = 1 \text{ unitat de volum.}$$

c) [2 punts] Del vèrtex de la piràmide, V , només sabem que està sobre el pla $z = 3$. Per tant el vèrtex és $V = (a,b,3)$ i a i b són valors que no podem precisar. L'equació demanada serà la d'una recta que passa pel punt $(a,b,3)$ i és perpendicular al pla $z = 0$, o sigui que té per vector director $(0,0,1)$. La recta demanada té per equació contínua $\frac{x-a}{0} = \frac{y-b}{0} = \frac{z-3}{1}$. L'equació general és:

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$$

Puntueu 1 punt si l'alumne pren un punt concret com a vèrtex.

SÈRIE 1

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar fraccions de 0,25 punts en els diferents apartats i després arrodonir la suma total.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0,25 o 0,5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0,75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.

QÜESTIONS

1. Considereu el sistema següent en funció del paràmetre real a :

$$\begin{cases} x - ay = 1 \\ ax + y = 3. \end{cases}$$

- Discutiu-lo en funció del paràmetre a .
- Resoleu els casos compatibles.

SOLUCIÓ. [2 punts] Per Gauss, $\begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ a & 1 & 3 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ 0 & 1+a^2 & 3-a \end{pmatrix}$. Per a qualsevol

valor de a , el rang de la matriu del sistema és 2 i coincideix amb el de la matriu ampliada i el nombre d'incògnites. El sistema és, doncs, compatible determinat per a tot valor de a .

(O bé, el determinant del sistema és $\begin{vmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1+a^2$ que és sempre diferent de 0. El

sistema és, doncs, compatible determinat per a tot valor de a .)

La solució és:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -a \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1+3a}{1+a^2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3-a}{1+a^2}.$$

Puntueu amb 1 punt per la discussió correcta i 1 punt per la solució correcta

2. La següent matriu expressa els preus unitaris, en euros, de quatre articles A, B, C i D procedents de les fàbriques f1, f2 i f3:

$$P = \begin{pmatrix} 34 & 40 & 36 \\ 11 & 8 & 12 \\ 23 & 27 & 32 \\ 25 & 21 & 30 \end{pmatrix}$$

Si una comanda ve representada per un vector fila $C = (x \ y \ z \ t)$, què representa cadascun dels elements del resultat del producte $C \cdot P$? Si volem comprar 25 unitats de A, 30 de B, 60 de C i 75 de D, quina de les fàbriques ens ofereix el millor preu?

SOLUCIÓ [2 punts] Com que la matriu té 4 files i 3 columnes, és clar que cada columna representa la fàbrica i cada fila el producte. Així, una unitat del producte B de la fàbrica 3 té un preu de 12 € (fila 2, columna 3). El producte $C \cdot P$,

$$C \cdot P = (x \ y \ z \ t) \cdot \begin{pmatrix} 34 & 40 & 36 \\ 11 & 8 & 12 \\ 23 & 27 & 32 \\ 25 & 21 & 30 \end{pmatrix} =$$

$$= (34x + 11y + 23z + 25t \quad 40x + 8y + 27z + 21t \quad 36x + 12y + 32z + 30t)$$

és una matriu fila 1x3 i cada element representa el COST de la comanda en cada fàbrica. Pel cas concret $C = (25 \ 30 \ 60 \ 75)$, el cost de la comanda en cada fàbrica és $(4435 \ 4435 \ 5430)$. En conseqüència, tant la fàbrica f1 com la f2 ens ofereixen el millor preu, 4435€.

Puntueu amb 1 punt per donar la interpretació correcta a cada element del producte i 1 punt per la solució correcta.

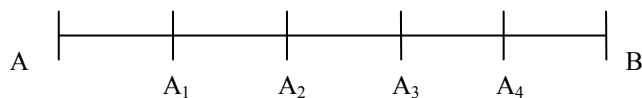
3. Trobeu la distància entre la recta $r: \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{3}$ i el pla $\pi: 3x+4y+7=0$.

SOLUCIÓ [2 punts] Trobem primer la posició relativa de la recta i el pla. Com que el vector normal del pla $\vec{n} = (3, 4, 0)$ i el vector director de la recta, $\vec{v} = (4, -3, 3)$ tenen producte escalar, $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$, resulta que la recta és o bé paral·lela al pla, o està continguda en ell. Com que el punt de la recta $(3, 1, -2)$ no pertany a π , $(3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 7 \neq 0)$, r i π són paral·lels. La distància entre la recta i el pla serà la de qualsevol punt de la recta al pla. La distància de $(3, 1, -2)$ (per exemple) al pla és:

$$\frac{3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 7}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{20}{5} = 4 \text{ unitats.}$$

Puntueu amb 1 punt per trobar la posició relativa i 1 punt per la distància correcta.

4. Un segment d'origen el punt $A = (-1, 4, -2)$ i extrem B està dividit en cinc parts iguals mitjançant els punts de divisió A_1 , A_2 , A_3 i A_4 (vegeu la figura). Si sabem que $A_2 = (1, 0, 2)$, quines són les coordenades de B ?



SOLUCIÓ [2 punts] . És clar que $\overline{AB} = 5 \cdot \overline{AA_1}$ i que

$$\overline{AA_1} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AA_2} = \frac{1}{2} \cdot (1+1, 0-4, 2+2) = (1, -2, 2).$$

Per tant, $\overline{AB} = 5 \cdot (1, -2, 2) = (5, -10, 10)$.

Les coordenades de B són $(-1+5, 4-10, -2+10) = (4, -6, 8)$.

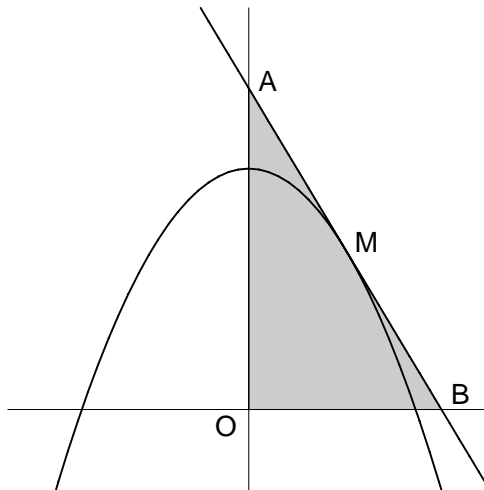
PROBLEMES

5. La recta tangent a la paràbola $y = 3 - x^2$ en un punt M situat dins del primer quadrant ($x > 0, y > 0$), talla l'eix OX en el punt B i l'eix OY en el punt A . Es demana:

- feu un gràfic dels elements del problema;
- trobeu les coordenades del punt M que fan que el triangle OAB tingui àrea mínima.

SOLUCIÓ

a) [1 punt]



b) [3 punts] Les coordenades del punt M seran $M = (a, 3 - a^2)$, amb $a > 0$. Com que la derivada de la funció en el punt d'abscissa a és $y'(a) = -2a$, l'equació de la recta tangent per el punt M serà

$y - (3 - a^2) = -2a(x - a)$, que arreglada queda com $2ax + y - 3 - a^2 = 0$. Els punts

d'intersecció amb els eixos seran: $B = \left(\frac{3+a^2}{2a}, 0\right)$ i $A = (0, 3+a^2)$. El triangle

OAB és rectangle i la seva àrea és:

$$S = \frac{1}{2} \cdot (3 + a^2) \cdot \frac{3 + a^2}{2a} = \frac{(3 + a^2)^2}{4a}$$

S és funció de a . Per trobar-ne el mínim, calculem $S'(a) = \frac{(3 + a^2)(3a^2 - 3)}{4a^2}$. Els

zeros de la derivada són $a = \pm 1$. Descartem el valor negatiu i examinem el signe de S' per valors lleugerament inferiors i lleugerament superiors a 1:

$S'(1-\varepsilon) < 0$ i $S'(1+\varepsilon) > 0$, per tant estem davant d'un mínim. Com que

$S'' = \frac{3(3+a^2)}{2a^3}$, també es pot comprovar que $S''(1) > 0$. Les coordenades del punt

M que ens demanen, són $M = (1,2)$.

Puntueu 1 punt per trobar la recta tangent correctament. 1 punt més per plantejar correctament la funció àrea i trobar el valor de a i un últim punt per classificar correctament el mínim i donar la solució demanada. Penalitzeu amb 0,5 el fet d'oblidar calcular les coordenades de M .

6. Considereu la funció $f(x) = 4x - x^2$. Es demana:

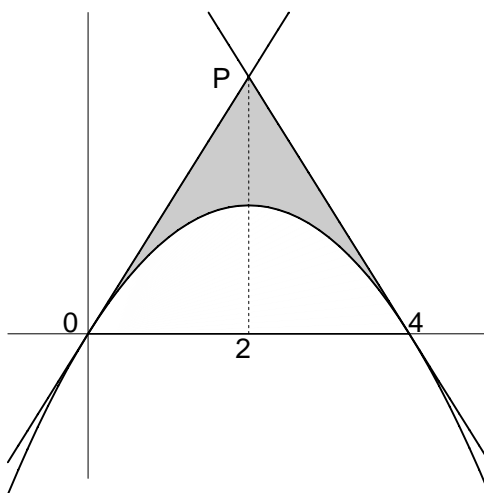
- calculeu l'equació de les rectes tangents a la gràfica de f en els punts d'abscisses $x = 0$ i $x = 4$;
- feu un gràfic dels elements del problema;
- calculeu l'àrea compresa entre la gràfica de f i les rectes tangents que heu trobat a l'apartat a).

SOLUCIÓ

- a) **[1 punt]** La derivada de f és $f'(x) = 4 - 2x$. Els pendents de les rectes tangents demanades són $f'(0) = 4$ i $f'(4) = -4$. La recta tangent en el punt $(0,0)$ té per equació $y = 4x$ i la recta tangent en el punt $(4,0)$ és $y = -4x + 16$.

Puntueu 1 punt per cada tangent trobada. Penalitzeu els errors de càlcul.

b) **[1 punt]**



- c) **[2 punts]** La intersecció de les dues tangents és el punt $P = (2, 8)$ (vegeu la gràfica). L'àrea demana la calcularem en dos trossos: l'àrea per sota de $y = 4x$ i per sobre de $f(x)$ entre 0 i 2:

$$\int_0^2 (4x - 4x + x^2) dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

I l'àrea per sota de $y = -4x + 16$ i per sobre de $f(x)$ entre 2 i 4:

$$\int_2^4 (-4x + 16 - 4x + x^2) dx = \left[16x - 4x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_2^4 = \frac{8}{3}.$$

En total, l'àrea demana és de $\frac{16}{3}$ unitats d'àrea.

Puntueu 1 punt pel plantejament correcte (encara que hi hagi errors en el punt d'intersecció de les tangents) i 1 punt per l'àrea correcta. Penalitzeu errors de càlcul. Si algú trobar una de les integrals i multiplica el resultat per 2 fent servir la simetria, òbviament té correcte el càlcul de l'àrea.