

SÈRIE 1

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar qualsevol decimal i després arrodonir la suma total. Podeu matisar la nota de cada pregunta amb signes + i -, de manera que es compensin els matisos entre totes les preguntes.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Valoreu totes les parts de cada subapartat que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0,25 o 0,5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0,75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.
- Copieu la nota de la pregunta i en la casella i , a fi de poder fer estadístiques sobre cada qüestió.

QÜESTIONS

1.- Trobeu les coordenades dels punts situats sobre la recta d'equació $(x, y, z) = (-1, 1, 1) + t \cdot (1, 2, 1)$ que estan a distància 1 del pla $2x + 2y + z = 5$.

Un punt qualsevol de la recta és $(t - 1, 2t + 1, t + 1)$. Imposar que es troba a distància 1 del pla equival a fer

$$\left| \frac{2(t-1) + 2(2t+1) + t+1 - 5}{\sqrt{4+4+1}} \right| = 1$$

Ara només resta resoldre $\frac{7t-4}{3} = \pm 1$, resultant $t = 1$ i $t = 1/7$. Així els punts buscats són

$$(0, 3, 2) \text{ i } \left(-\frac{6}{7}, \frac{9}{7}, \frac{8}{7} \right).$$

1 punt per arribar a l'expressió DISTÀNCIA=1.
0.5 punts per cada solució.

2.- Esbrineu si el sistema següent pot ser compatible indeterminat per algun valor de m .

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 4y + 3z = 0 \\ x + y + mz = 0 \end{array} \right\}$$

És incompatible per algun valor de m ?

En primer lloc s'estudia el rang de la matriu de coeficients.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & m-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & m-1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, si $m=1$ $\text{rang}(A) = 2$ i és igual a 3 per a la resta de valors de m .

Així, si $m=1$ el sistema és compatible indeterminat.

Finalment, com que el sistema és homogeni mai pot ser incompatible.

1 punt per l'estudi del rang o, simplement, per esbrinar quin valor de m discrimina.

0.5 punts per dir quan és compatible indeterminat.

0.5 punts per raonar que el sistema no pot ser incompatible

3.- Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calculeu $A \cdot B$ i $B \cdot A$.

b) Comproveu que $(A+B)^2 = A^2 + B^2$.

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

b) $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + B^2$, ja que al primer apartat es comprova que $AB = -BA$.

a) 0.5 punts per cada producte.

b) 1 punt. Evidentment, els estudiants ho poden comprovar operant les matrius.

4.- Trobeu el domini i les asímptotes de la funció definida per $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 1}$.

El domini de la funció és $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

La funció té per asímptota vertical la recta $x = 1$, corresponent a la discontinuïtat.

D'altra banda,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2 - x} = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x + 1}{x - 1} = -3.$$

Per tant, $y=x-3$ és una asímptota obliqua a dreta i esquerra.

0.5 punts per identificar domini.

0.5 per l'asímtota vertical.

0.5 pel pendent de l'asímtota obliqua.

0.5 per l'ordenada a l'origen.

PROBLEMES

5.- Una recta r passa pel punt $A=(3,0,2)$ i té la direcció del vector $(-1,1,4)$.

- a) Trobeu quin angle forma r amb el pla horitzontal.
- b) Comproveu que no passa pel punt $B=(1,3,10)$.
- c) Trobeu l'equació de la recta que passa per A i B .

a) Se sap que el sinus de l'angle α que forma el vector $(-1,1,4)$ amb el pla horitzontal, és a dir, $z = 0$, s'obté de fer

$$\sin \alpha = \cos(90 - \alpha) = \frac{(-1,1,4) \cdot (0,0,1)}{\sqrt{18}} = \frac{4}{3\sqrt{2}},$$

que també serveix per trobar el cosinus de l'angle complementari. Llavors, $\alpha = 70.529^\circ = 1.231 \text{ rad}$.

b) El vector \vec{v} que uneix els punts A i B és $\vec{v} = (1,3,10) - (3,0,2) = (-2,3,8)$. Com que aquest vector no és paral·lel a $(-1,1,4)$, la recta no passa pel punt B .

c) L'equació de la recta és $(x,y,z) = (3,0,2) + t(-2,3,8)$.

1.5 punts pel primer apartat. Si en lloc del sinus de l'angle o el cosinus del complementari es fa servir el cosinus de l'angle, penalitzeu però no poseu zero.

1 punt pel segon apartat. Cal pensar que alguns estudiants poden buscar l'equació de la recta i comprovar si el punt B és d'ella.

1.5 punts pel tercer apartat.

6. Considereu la funció $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$.

- a) Calculeu c sabent que la seva recta tangent en el punt d'abscissa $x=0$ és horitzontal.
- b) Per al valor de c trobat a l'apartat anterior, calculeu a i b sabent que aquesta funció té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x=-2$ i que talla a l'eix OX quan $x=1$.
- c) Per als valors obtinguts als altres apartats, calculeu els intervals on la funció creix i decreix, els seus extrems relatius i feu una representació gràfica aproximada.

a) La condició equival a demanar $f'(0) = 0$. Com que $f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$, llavors $c = 0$.

b) La condició d'extrem relatiu a $x = -2$ és $f'(-2) = 0$, és a dir, $-32 + 12a - 4b = 0$.

La de tall a l'eix OX quan $x = 1$ correspon a $f(1) = 0$ i, per tant, $1 + a + b + 7 = 0$.

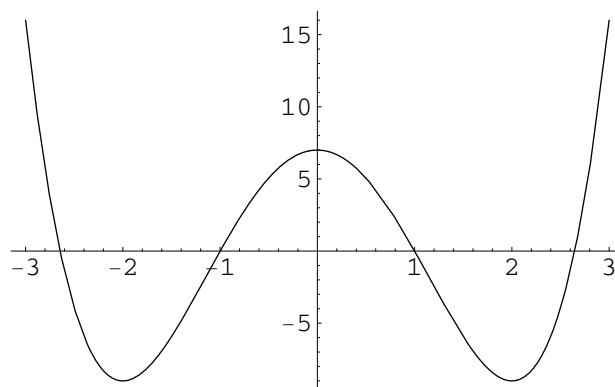
Per tot això, cal resoldre $\left. \begin{matrix} 3a - b = 8 \\ a + b = -8 \end{matrix} \right\}$ que té per solució $a = 0$, $b = -8$.

c) Els càlculs anteriors condueixen a $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$, que té per derivada $f'(x) = 4x^3 - 16x$. Per trobar els extrems relatius es resol $f'(x) = 0$ que té per solucions $x = 0$, $x = -2$, $x = 2$. La derivada és positiva a $(-2, 0) \cup (2, \infty)$ i la funció creix en aquesta regió. La funció decreix en els intervals en què la derivada és negativa, és a dir, dins $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$.

Considerant els signes de la derivada, es pot afirmar que a $x = -2$ i a $x = 2$ hi ha mínims relatius, mentre que a $x = 0$ es troba un màxim.

Màxim relatiu: $(0, 7)$. Mínims relatius: $(-2, -9)$, $(2, -9)$.

La gràfica és



1 punt per l'apartat a).

1 punt per l'apartat b).

0.5 punts pels intervals de creixement i decreixement.

0.5 punts pels extrems relatius.

1 punt per la gràfica.

SÈRIE 3

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar qualsevol decimal i després arrodonir la suma total. Podeu matisar la nota de cada pregunta amb signes + i -, de manera que es compensin els matisos entre totes les preguntes.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Valoreu totes les parts de cada subapartat que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0,25 o 0,5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0,75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.
- Copieu la nota de la pregunta i en la casella i , a fi de poder fer estadístiques sobre cada qüestió.

QÜESTIONS

1. Considereu la funció definida per $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$. Calculeu quant val el pendent de la recta tangent a la seva gràfica pel punt d'abscissa $x = 0$. Trobeu si hi ha altres punts en els que el pendent de la tangent sigui igual a l'obtingut.

En primer lloc es calcula la derivada de la funció, $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x + 1)^2}$. Ara només resta calcular $f'(0)$,

que proporciona un pendent igual a -1 .

Per veure si hi ha altres punts, cal resoldre $\frac{x^2 + 2x - 1}{(x + 1)^2} = -1$ que, operant, es transforma en l'equació

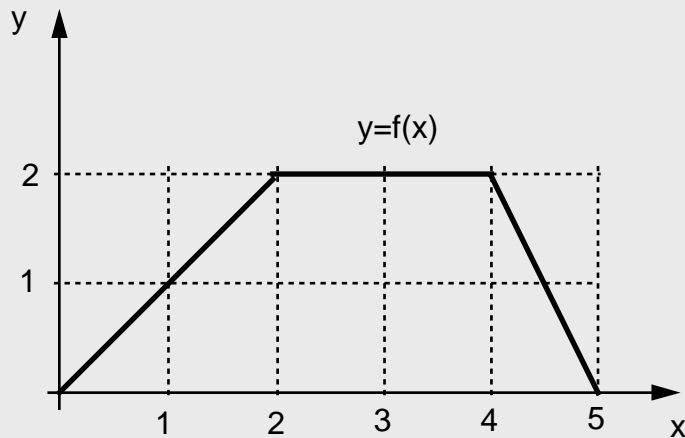
de segon grau $2x^2 + 4x = 0$. Les solucions són $x = -2$ i $x = 0$. Aquest últim és el punt estudiat a la primera part de la qüestió.

0.5 punts pel càlcul de la derivada.

0.5 punts pel càlcul del pendent

1 punt per la segona part de la qüestió.

2. Considereu la funció $y = f(x)$ definida per $x \in [0,5]$ que apareix dibuixada a la figura adjunta.



a) Quina és l'expressió de la seva funció derivada quan existeix.

b) Calculeu $\int_0^3 f(x) dx$.

a) La funció de la gràfica està constituïda per segments de recta que, d'esquerra a dreta, tenen pendent igual a 1, 0 i -2. Per tant, la funció derivada és

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0,2) \\ 0 & \text{si } x \in (2,4) \\ -2 & \text{si } x \in (4,5) \end{cases} .$$

b) La integral demanada no és més que l'àrea del trapezi que limita a l'esquerra amb $x = 0$ i a la dreta amb $x = 3$.

$$\int_0^3 f(x) dx = \frac{3+1}{2} \cdot 2 = 4 .$$

1 punt per cada apartat. Si al segon apartat l'estudiant busca les equacions de les rectes que formen la funció i calcula la integral, s'ha de donar per correcte, evidentment.

3. Determineu l'equació del pla perpendicular a la recta $r : \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{cases}$ que passa pel punt $(1,1,2)$. Quina distància hi ha d'aquest pla a l'origen de coordenades?

En primer lloc cal trobar un vector director de la recta, ja sigui escrivint l'equació paramètricament o per altres mètodes. Així, per exemple, l'equació de la recta es pot escriure

$$r : (x, y, z) = (0, -1, -2) + t(1, 1, -1)$$

i el vector és, llavors, $(1, 1, -1)$.

L'equació del pla és $\pi: x - 1 + y - 1 - (z - 2) = 0$ o bé, simplificant, $\pi: x + y - z = 0$. És evident que el pla passa per l'origen de coordenades i, per això, la distància del $(0, 0, 0)$ al pla val zero.

0.5 punts pel càlcul del vector director.

1 punt per l'equació del pla.

0.5 punts per justificar que la distància val zero.

4. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -m \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix}$. Determineu els valors de m per als quals $\text{rang}(A) < 3$.
Pot ser $\text{rang}(A) = 1$ per algun valor de m ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & m \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4-m \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4-m \\ 0 & 0 & 3-4m+m^2 \end{pmatrix}.$$

Si $m^2 - 4m + 3 = 0$, és a dir, si $m = 1$ o $m = 3$, $\text{rang}(A) = 2 < 3$.

Tal com es veu a les dues primeres files, el rang no pot valer 1 ja que mai poden ser proporcionals.

1 punt per l'esglaonament de les matrius. Si es calcula el determinant, cal comptar també 1 punt.

0.5 punts per determinar els valors que proporcionen rangs inferiors a 3.

0.5 punts per justificar que el rang no pot valer 1.

PROBLEMES

5. Donada la funció $f(x) = e^{-x^2+2x}$,
- trobeu el seu domini i les possibles interseccions amb els eixos;
 - trobeu els intervals on creix i decreix i els extrems relatius;
 - trobeu les possibles asímptotes;
 - feu la representació gràfica de la funció.

a) El domini de la funció és tot \mathbb{R} .

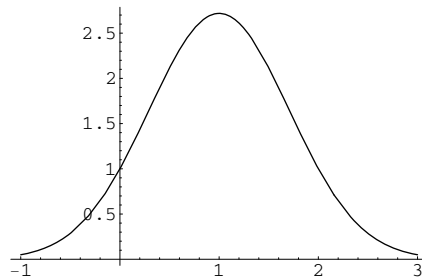
Com que $e^{-x^2-2x} = 0$ no té solució, la funció no talla l'eix horitzontal.

Donat que $f(0) = 1$, la funció talla l'eix vertical en el punt $(0, 1)$.

b) La derivada és $f'(x) = e^{-x^2+2x}(-2x+2) = 2e^{-x^2+2x}(1-x)$. Llavors, la derivada només s'anul·la quan $x = 1$. Per qualsevol valor de x inferior a 1 la derivada és positiva i en qualsevol superior és negativa; per tant, la funció creix a $(-\infty, 1)$, decreix a $(1, \infty)$ i, com a conseqüència, el punt $(1, e)$ és un màxim relatiu.

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2+2x} = 0$. Per això $y = 0$ és asímptota horitzontal en ambdós costats. La funció no té altres asímptotes.

d) La representació gràfica és



1 punt cada apartat.

6. Considereu la recta $r: \begin{cases} 2x - 5y - z - 3 = 0 \\ x - 3y - z - 2 = 0 \end{cases}$ i el pla $p: 2x - y + az + 2 = 0$ on a és un paràmetre.

- Trobeu un vector director de la recta i un vector perpendicular al pla.
- Quin ha de ser el valor d' a perquè la recta i el pla siguin paral·lels.
- Esbrineu si existeixen valors d' a pels quals la recta i el pla siguin perpendiculars. En cas afirmatiu calculeu-los.
- Esbrineu si existeixen valors d' a pels quals la recta i el pla formin un angle de 30° . En cas afirmatiu calculeu-los.

a) La recta es pot expressar en forma paramètrica com

$$r: (x, y, z) = (-1, -1, 0) + t(2, 1, -1).$$

Així, un vector director és $\vec{v} = (2, 1, -1)$.

Un vector perpendicular al pla, en funció d' a , és $\vec{w} = (2, -1, a)$.

b) La recta i el pla seran paral·lels quan \vec{v} i \vec{w} siguin perpendiculars, és a dir, quan $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$. Llavors, $(2, 1, -1) \cdot (2, -1, a) = 3 - a = 0$ i, quan el paràmetre val 3 la recta i el pla són paral·lels.

c) De forma anàloga, la recta i el pla seran perpendiculars quan els dos vectors siguin paral·lels, però això no pot passar ja que no hi ha cap valor d' a que permeti que

$$\frac{2}{2} = \frac{-1}{1} = \frac{a}{-1}.$$

d) Ara cal que els vectors formin un angle α de 60° o bé de 120° . Utilitzant el producte escalar,

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \alpha,$$

$$3 - a = \sqrt{6} \sqrt{5 + a^2} \left(\pm \frac{1}{2} \right),$$

$$a^2 + 12a - 3 = 0,$$

$$a = -6 \pm \sqrt{39}.$$

1 punt cada apartat.