SÈRIE 3

- Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals. Ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar qualsevol decimal i després arrodonir la suma total. Podeu matisar la nota de cada pregunta amb signes + i –, de manera que es compensin els matisos entre totes les preguntes.
- Aquestes pautes no preveuen tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Tampoc no pretenen donar totes les possibles solucions a un problema ni tan sols la millor.
- Hi haurà molts casos concrets en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos dubtosos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.
- Valoreu totes les parts de cada subapartat que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.
- Penalitzeu els errors simples de càlcul amb 0, 0,25 o 0,5 punts segons la importància de l'error i el vostre criteri. Els errors de càlcul que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzeu-los amb 0,75 o 1 punt. Si l'error és molt escandalós, podeu puntuar tot l'apartat amb 0 punts.
- Copieu la nota de la pregunta *i* en la casella *i,* a fi de poder fer estadístiques sobre cada qüestió.

QÜESTIONS

1.- Trobeu les equacions dels plans paral·lels a $\pi: 2x - y + 2z = 3$ situats a distància 6 d'ell.

Els plans demanats tenen equacions de la forma $2x - y + 2z + D = 0$ i han de passar a distància 6 de qualsevol punt del pla π, per exemple el $(0,-3,0)$. Per tant, s'ha de verificar

$$6 = \left|\frac{3+D}{\sqrt{4+1+4}}\right| = \left|\frac{3+D}{3}\right| \to 3 + D = \pm 18 \to D = 15 \quad \text{i} \quad D = -21.$$

Substituint els valors de D s'obtenen les equacions demanades.

$$2x - y + 2z + 15 = 0\,, \quad 2x - y + 2z - 21 = 0\,.$$

PUNTUACIÓ:

1 punt pel plantejament i arribar a escriure alguna expressió matemàtica equivalent a "pla paral·lel situat a distància 6 de π".

0.5 punts per cada solució.

2.- Donada la matriu següent depenent d'un paràmetre *m*,

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & m & 2m\\ m & 2 & 2+m\end{pmatrix}$$

a) Estudieu el seu rang segons els valors de *m*.

b) Digueu quina és la posició relativa dels plans $\pi_1: x+y+2z=2$, $\pi_2: 2x+my+2mz=2+m$ i $\pi_3: mx+2y+(2+m)z=0$, segons els valors de *m*.

a) Esglaonant,

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & m & 2m\\ m & 2 & 2+m\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & m-2 & 2m-4\\ 0 & 2-m & 2-m\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & m-2 & 2m-4\\ 0 & 0 & m-2\end{pmatrix}$$

Llavors, el rang de la matriu es 3 si $m\neq 2$ i 1 si $m=2$.

L'obtenció del valor de m que discrimina també es pot fer igualant a zero el determinant de la matriu.

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & m & 2m\\ m & 2 & 2+m\end{vmatrix}=m^2-4m+4=(m-2)^2=0\rightarrow m=2\,.$$

A partir d'aquí cal esbrinar quin rang té la matriu quan $m=2$

b) Val la pena observar que la matriu de l'apartat anterior és la matriu de coeficients dels plans donats. Així, si $m\neq 2$, el sistema és compatible determinat; per tant, els plans es tallen en un punt. Si $m=2$, les equacions són $\pi_1: x+y+2z=2$, $\pi_2: 2x+2y+4z=4$ i $\pi_3: 2x+2y+4z=0$, els dos primers plans són coincidents i el tercer és paral·lel a ells.

PUNTUACIÓ:

1 punt per cada apartat.

3.- Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$. Trobeu els valors de p i q que fan que es verifiqui $A^2 = A$. En aquest cas, raoneu sense calcular què val A^{10}.

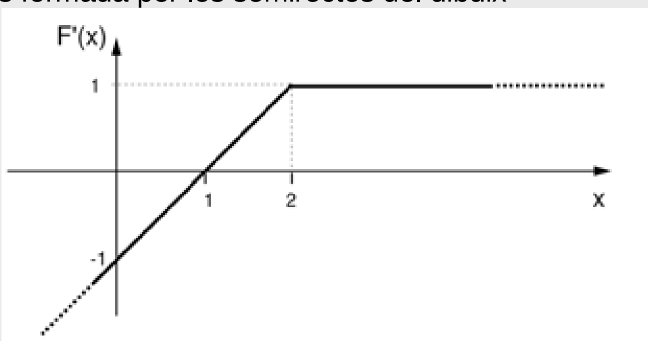
$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ pq & p+q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$$

i la igualtat es compleix quan $p = 0$ i $q = 1$.

Si la matriu verifica $A^2 = A$, llavors, $A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot A = A$. Procedint de manera successiva, es pot veure que qualsevol altra potència de la matriu *A* també val *A*.

1 punt per trobar els valors de *p* i *q*.
1 punt per justificar que $A^{10} = A$. No es demana fer una demostració per inducció o similar. Simplement que justifiquin aquest resultat sense fer càlculs.

4.- La funció derivada $F'(x)$ d'una funció contínua $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que passa per l'origen és una funció a trossos formada per les semirectes del dibuix



Escriviu l'expressió de la funció *F(x)* com una funció a trossos.

La derivada de la funció *F(x)* es pot expressar com

$$F'(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases},$$

ja que la primera branca és una recta de pendent 1 que passa per (1,0) i la segona és una funció constant. El punt $x = 2$ s'ha d'incorporar a una i només una de les dues branques. Ara bé, per continuïtat es pot escollir la que es vulgui.

Llavors, integrant, $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}-x+C & \text{si} \quad x<2 \\ x+K & \text{si} \quad 2\le x\end{cases}$.

Com que la funció passa per l'origen, la primera constant indeterminada val $C=0$. Llavors, donat que la funció ha de ser contínua a $x=2$, $\dfrac{4}{2}-2=2+K \rightarrow K=-2$ i la funció és

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}-x & \text{si} \quad x<2 \\ x-2 & \text{si} \quad 2\le x\end{cases}.$$

PUNTUACIÓ:
0.5 punts per l'expressió de *F'(x)*.

0.5 punts per la integració.

0.5 punts per l'obtenció de *C*.

0.5 punts per l'obtenció de *K*.

PROBLEMES

5.- Una recta *r* és paral·lela a la recta $s: x-1=y-1=z-1$, talla en un punt *A* a la recta $t: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{2}=z+1$ i en un punt B a la recta $l: \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{3}$.
a) Trobeu l'equació del pla determinat per les rectes *r* i *t*.
b) Calculant el punt d'intersecció del pla anterior amb la recta *l*, trobeu el punt *B*.
c) Trobeu l'equació de la recta *r*.
d) Trobeu el punt *A*.

a) El pla demanat és paral·lel als vectors directors de les rectes *s* i *t*, (1,1,1) i (3,2,1) respectivament. Llavors, el vector de coeficients (*a,b,c*) del pla demanat és qualsevol que sigui perpendicular als dos vectors. Per exemple, es pot plantejar el sistema

$$\begin{cases}(a,b,c)\cdot(1,1,1)=0 \\ (a,b,c)\cdot(3,2,1)=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=0\end{cases} \rightarrow b=-2a,\ c=a.$$

Per tant, qualsevol vector de la forma (*a,-2a,a*), per exemple (1,-2,1), serveix com a vector de coeficients o perpendicular al pla. Per construir l'equació només resta trobar un punt del pla. Qualsevol de la recta *t* serveix, per exemple el (1,0,-1).

Equació del pla: $(x-1)-2y+(z+1)=0 \quad \rightarrow \quad x-2y+z=0$.

També es pot obtenir el vector (*a,b,c*) per mitjà del producte vectorial

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 2, -1)$$

i a partir d'aquí es completa la construcció de l'equació.

b) Punt d'intersecció de la recta $l: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$ i el pla $x - 2y + z = 0$:

La primera igualtat de l'equació de la recta permet escriure $x = y + 1$. Si es substitueix dins l'equació del pla i s'aïlla z s'obté $z = y - 1$. Finalment, substituint z dins la segona igualtat de l'equació de la recta, $\frac{y-1}{2} = \frac{y-1}{3} \rightarrow y = 1$ i el punt buscat és B=(2,1,0).

c) La recta r és la paral·lela a s que passa per B,

$$x - 2 = y - 1 = z\,.$$

d) Finalment, el punt A és el d'intersecció de r i t,

$$\begin{cases} x - 2 = y - 1 = z \\ \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{2} = z + 1 \end{cases}$$

De les dues igualtats de l'equació de r es pot escriure $x = z + 2$ i $y = z + 1$. Quan es substitueixen dins l'equació de t,

$$\frac{z+1}{3} = \frac{z+1}{2} = z + 1,$$

on les dues igualtats es verifiquen quan $z = -1$. Per tant, el punt A és (1,0,-1).

PUNTUACIÓ:

Apartat a) 0.5 punts pel vector de coeficients i 0.5 per l'equació del pla.

Apartats b), c) i d) 1 punt cada un.

6.- Donades les funcions $f(x) = x^2 - ax - 4$ i $g(x) = \frac{x^2}{2} + b$,

a) Calculeu *a* i *b* de manera que les gràfiques de *f(x)* i de *g(x)* siguin tangents en el punt d'abscissa $x = 3$, és a dir, que tinguin la mateixa recta tangent en aquest punt.
b) Trobeu l'equació de la recta tangent esmentada a l'apartat anterior.
c) Pel valor de *a* obtingut al primer apartat, calculeu el valor de l'àrea de la regió limitada per l'eix d'abscisses *OX* i la funció *f(x)*.

a) Les gràfiques d'ambdues funcions seran tangents en el punt d'abscissa $x = 3$ quan en aquest punt coincideixin les funcions i les derivades, és a dir,

$$f(3) = g(3), \quad f'(3) = g'(3).$$

Llavors,

$$\begin{cases} 9 - 3a - 4 = \frac{9}{2} + b \\ 6 - a = 3 \end{cases} \rightarrow \quad a = 3, \quad b = -\frac{17}{2}.$$

b) L'equació de la recta tangent demanada es pot construir a partir de qualsevol de les dues funcions, per exemple a partir de *f(x)*.

Com que $f(3) = -4$, $f'(3) = 3$, l'equació és $y + 4 = 3(x - 3)$.

c) Per calcular l'àrea demanada, primer cal trobar els punts de tall amb l'eix i esbrinar si la funció queda per sobre o per sota del mateix.

$$f(x) = 0 \rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow \quad x = -1, \; x = 4 .$$

En un punt intermedi, per exemple quan $x = 0$, la funció és negativa i, per tant, en l'interval d'integració queda per sota de l'eix. També s'admet una representació gràfica o, també, com que la corba $y = f(x)$ és una paràbola amb les branques orientades amunt, necessàriament ha de tancar la regió per sota de l'eix.

$$Àrea = -\int_{-1}^{4} (x^2 - 3x - 4)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x \right]_{-1}^{4} = \frac{125}{6} u^2$$

PUNTUACIÓ:

Apartat a)

0.5 punts per plantejar la igualtat de la funció i de la derivada quan $x = 3$.

0.5 pel càlcul de *a* i 0.5 pel càlcul de *b*.

Apartat b) 1 punt.

Apartat c)

0.5 punts pel planteig de la integral (punts de tall, orientació i expressió de la integral que s’ha de calcular).

0.5 punts pel càlcul correcte de la primitiva.

0.5 punts per l’aplicació correcta de la regla de Barrow.