



Proves d'accés a la Universitat. Curs 2007-2008

Matemàtiques

Sèrie 4

Responeu a TRES de les quatre qüestions i resolcu UN dels dos problemes següents. En les respostes, expliqueu sempre què és el que voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts, i el problema, 4 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es poden fer servir calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

QÜESTIONS

1. Considereu la funció $f(x) = ax^2 + x + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Trobeu els valors de a i b que fan que la recta $y = 2x + 1$ sigui tangent a la gràfica de f quan $x = 1$.

[2 punts]

2. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculeu A^2 i A^3 .

b) Determineu, raonadament, el valor de A^{60124} .

[1 punt per cada apartat]

3. Considereu un sistema de dues equacions amb tres incògnites.

a) Pot ser incompatible?

b) Pot ser compatible determinat?

Raoneu les respostes.

[1 punt per cada apartat]

4. Donats el punt $P = (7, 5, 1)$, el pla $\pi: x - 2y - 3z = 10$ i la recta $r: \begin{cases} 3x - 2y + 2z = 7 \\ x - 6y - 2z = 5 \end{cases}$:

a) Trobeu la distància del punt P al pla π .

b) Trobeu la distància del punt P a la recta r .

c) Trobeu la distància de la recta r al pla π .

[0,5 punts per l'apartat a; 1 punt per l'apartat b; 0,5 punts per l'apartat c]

PROBLEMES

5. Donades les funcions $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ i $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$:

a) Comproveu que $[g(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$.

b) Comproveu també que $f'(x) = g(x)$ i $g'(x) = f(x)$.

c) Comproveu que $f(x + y) = f(x) \cdot g(y) + f(y) \cdot g(x)$.

d) Calculeu $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ dividint per e^x el numerador i el denominador; amb un pro-

cediment similar (però no igual), trobeu $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.
[1 punt per cada apartat]

6. Les rectes $r_1: \frac{x - a}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z + 1}{4}$ i $r_2: \frac{x + 2}{1} = \frac{y - b}{2} = \frac{z - 4}{-1}$ són coplanàries (és a dir,

estan incloses en un mateix pla).

a) Expliqueu, raonadament, quina és la posició relativa d'aquestes rectes.

b) Trobeu la relació que hi ha entre els paràmetres a i b .

c) Trobeu els valors de a i b si el pla que les conté passa pel punt $P = (2, 4, 6)$.

[1,5 punts per l'apartat a; 1 punt per l'apartat b; 1,5 punts l'apartat c]

