



Proves d'accés a la Universitat. Curs 2008-2009

Matemàtiques

Sèrie 4

Responeu a TRES de les quatre qüestions i resolcu UN dels dos problemes següents. En les respostes, expliqueu sempre què és el que voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts, i el problema, 4 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es poden fer servir calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

QÜESTIONS

1. Donats el punt $P = (1, 2, 3)$ i la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-5}{-1}$:

a) Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla π que passa per P i és perpendicular a la recta r .

b) Trobeu el punt de tall entre la recta r i el pla π .

[1 punt per cada apartat]

2. Siguin $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Comproveu que la inversa de A és A^2 .

b) Comproveu també que $A^{518} = B$.

[1 punt per cada apartat]

3. Considereu la funció $f(x) = \frac{x(a-x)}{a^3}$, amb $a > 0$.

a) Trobeu els punts de tall de la funció $f(x)$ amb l'eix OX .

b) Comproveu que l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció $f(x)$ i l'eix d'abscisses no depèn del valor del paràmetre a .

[0,5 punts per l'apartat a ; 1,5 punts per l'apartat b]

4. En la resolució pel mètode de Gauss d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites ens hem trobat amb la matriu següent:

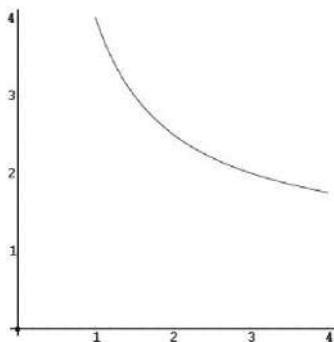
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 6 \end{array} \right)$$

- a) Expliqueu, raonadament, quin és el caràcter del sistema inicial.
b) Si és compatible, trobeu-ne la solució.

[1 punt per cada apartat]

PROBLEMES

5. La gràfica de la funció $f(x) = \frac{3+x}{x}$, des de $x = 1$ fins a $x = 4$, és la següent:



- a) Calculeu l'equació de les rectes tangents a aquesta funció en els punts d'abscissa $x = 1$ i $x = 3$.
b) Dibuixeu el recinte limitat per la gràfica de la funció i les dues rectes tangents que heu calculat.
c) Trobeu els vèrtexs d'aquest recinte.
d) Calculeu la superfície del recinte damunt dit.

[1 punt per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b; 1 punt per l'apartat c; 1,5 punts per l'apartat d]

6. Siguin r i s dues rectes de l'espai les equacions respectives de les quals, que depenen d'un paràmetre real b , són les següents:

$$r: \begin{cases} bx + y + 3z = 1 \\ x + 2y + 5z = 1 \end{cases}, \quad s: \frac{x}{1} = \frac{y-b}{b+1} = \frac{z+1}{-1}$$

- a) Trobeu el punt de tall de la recta r amb el pla d'equació $x = 0$ i el punt de tall de la recta s amb aquest mateix pla.
b) Calculeu un vector director per a cada una de les dues rectes.
c) Estudieu la posició relativa de les dues rectes en funció del paràmetre b .

[1 punt per l'apartat a; 1 punt per l'apartat b; 2 punts per l'apartat c]





Proves d'accés a la Universitat. Curs 2008-2009

Matemàtiques

Sèrie 3

Responen a TRES de les quatre qüestions i resolou UN dels dos problemes següents. En les respostes, expliqueu sempre què és el que voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts, i el problema, 4 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es poden fer servir calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

QÜESTIONS

1. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \\ b & a^2 \end{pmatrix}$. Trobeu els valors dels paràmetres a i b perquè

la matriu tingui rang 1.

[2 punts]

2. Considereu les corbes $y = 4x - x^2$ i $y = x^2 - 6$.
- Trobeu-ne els punts d'intersecció.
 - Representeu les dues corbes en una mateixa gràfica, on es vegi clarament el recinte que limiten entre elles.
 - Trobeu l'àrea d'aquest recinte limitat per les dues corbes.

[0,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b; 1 punt per l'apartat c]

3. Donat el sistema $\begin{cases} x + py = p \\ px + y = p \end{cases}$:

- Discutiu-ne el caràcter en funció del paràmetre p .
- Resoleu-lo quan $p = 2$.

[1,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b]

4. Donats el pla $\pi: x + 2y - z = 0$ i el punt $P = (3, 2, 1)$:

- Calculeu l'equació contínua de la recta r que passa per P i és perpendicular a π .
- Calculeu el punt simètric del punt P respecte del pla π .

[1 punt per cada apartat]

PROBLEMES

5. Sigui la funció $f(x) = a + \frac{4}{x} + \frac{b}{x^2}$.

a) Calculeu els valors de a i b , sabent que la recta $2x + 3y = 14$ és tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 3$.

Per a la resta d'apartats, considereu que $a = -3$ i que $b = 4$.

b) Trobeu els intervals de creixement i de decreixement de la funció $f(x)$. Trobeu i classifiqueu els extrems relatius que té la funció.

c) Calculeu els punts de tall de la funció $f(x)$ amb l'eix OX .

d) Trobeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció $f(x)$, l'eix OX i les rectes $x = 1$ i $x = 3$.

[1 punt per l'apartat *a*; 1 punt per l'apartat *b*; 0,5 punts per l'apartat *c*; 1,5 punts per l'apartat *d*]

6. Siguin $P = (3 - 2a, b, -4)$, $Q = (a - 1, 2 + b, 0)$ i $R = (3, -2, -2)$ tres punts de l'espai \mathbb{R}^3 .

a) Calculeu el valor dels paràmetres a i b per als quals aquests tres punts estiguin alineats.

b) Trobeu l'equació contínua de la recta que els conté quan estan alineats.

c) Quan $b = 0$, trobeu els valors del paràmetre a perquè la distància entre els punts P i Q sigui la mateixa que la distància entre els punts P i R .

d) Si $b = 0$, calculeu el valor del paràmetre a perquè els punts P , Q i R determinin un triangle equilàter.

[1 punt per cada apartat]

