SÈRIE 4

QÜESTIONS

1.- Donats el punt $P = (1, 2, 3)$ ***i la recta*** $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-5}{-1}$***:***

a) ***Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma*** $Ax + By + Cz + D = 0$***) del pla*** π ***que passa per*** P ***i és perpendicular a la recta*** r***.***

b) ***Trobeu el punt de tall entre la recta*** r ***i el pla*** π***.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

a) Podem agafar com a vector característic del pla buscat el vector director de la recta; així, $\pi : 2x + 3y - z + D = 0$. Imposem ara que el punt P compleixi aquesta equació, $2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 3 + D = 0$. D'aquí $D = -5$. L'equació del pla és $\pi : 2x + 3y - z - 5 = 0$.

b) El punt de tall és el que compleix les dues equacions que defineixen la recta i l'equació del pla,

$$\left.\begin{array}{r} -x+1 = 2z-10 \\ -y-2 = 3z-15 \\ 2x+3y-z-5 = 0 \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{rrrcr} x & & +\,2z & = & 11 \\ & y & +\,3z & = & 13 \\ 2x & +\,3y & -\;\;z & = & 5 \end{array}\right\}$$

Encara que aquest sistema es pot resoldre utilitzant el mètode de Cramer, n'hi ha altres (Gauss, substitució,...) molt més fàcils. La solució d'aquest sistema és $x = 3$, $y = 1$, $z = 4$. El punt de tall és, doncs, $(3, 1, 4)$.

2.- Siguin $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ***i*** $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$***.***

a) ***Comproveu que la inversa de*** A ***és*** A^2***.***

b) ***Comproveu també que*** $A^{518} = B$***.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

a) Per comprovar que $A^{-1} = A^2$, cal veure que $A \cdot A^2 = I$, essent I la matriu identitat d'ordre 3. Calculem primer el valor de A^2,

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Llavors,

$$A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tal com volíem.

Naturalment, la qüestió es pot resoldre calculant A^{-1} directament de la matriu A i comprovant després que $A^{-1} = A^2$, encara que no és aquest el procediment demanat; o sigui, en aquesta qüestió no es demana que l'estudiant sigui capaç de calcular la inversa d'una matriu 3×3.

$b)$ Com que $A \cdot A^2 = A^3 = I$, tenim

$$A^{518} = A^{3\cdot 172+2} = \left(A^3\right)^{172} \cdot A^2 = A^2 = B.$$

3.- Considereu la funció $f(x) = \dfrac{x(a-x)}{a^3}$***, amb*** $a > 0$***.***

$a)$ ***Trobeu els punts de tall de la funció amb l'eix*** OX***.***

$b)$ ***Comproveu que l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció*** $f(x)$ ***i l'eix d'abscisses no depèn del valor del paràmetre*** a***.***

[0,5 punts per l'apartat a; 1,5 punts per l'apartat b]

Solució

$a)$ $f(x) = 0 \iff x(a-x) = 0 \iff x = 0$ o $x = a$. Els punts de tall són, doncs, $(0, 0)$ i $(a, 0)$.

$b)$ L'àrea de recinte és

$$A = \int_0^a \frac{x(a-x)}{a^3} dx = \frac{1}{a^3}\left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{1}{6},$$

que, efectivament, no depèn del paràmetre a.

4.- En la resolució pel mètode de Gauss d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites ens hem trobat amb la matriu següent:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 3 & -6 & | & 6 \end{pmatrix}.$$

$a)$ ***Expliqueu, raonadament, quin és el caràcter del sistema inicial.***

$b)$ ***Si és compatible, trobeu-ne la solució.***

[1 punt per cada apartat]

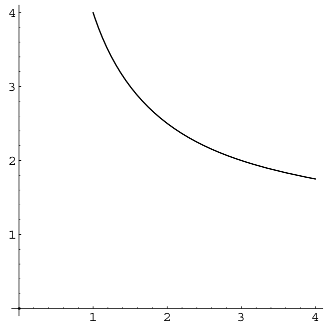
Solució

$a)$ Com que el rang de la matriu de coeficients del sistema i el de la matriu ampliada és dos, podem assegurar que el sistema inicial és compatible indeterminat.

$b)$ El sistema inicial és equivalent al sistema $\left.\begin{array}{r} 3x - 5y + 2z = -5 \\ y - 2z = 2 \end{array}\right\}$, que té per solució $x = (5 + 8z)/3$, $y = 2 + 2z$, on z és un paràmetre.

PROBLEMES

5.- La gràfica de la funció $f(x) = \dfrac{3+x}{x}$***, des de*** $x = 1$ ***fins a*** $x = 4$***, és la següent:***



a) ***Calculeu l'equació de les rectes tangents a aquesta funció en els punts d'abscissa*** $x = 1$ ***i*** $x = 3$.

b) ***Dibuixeu el recinte limitat per la gràfica de la funció i les dues rectes tangents que heu calculat.***

c) ***Trobeu els vèrtexs d'aquest recinte.***

d) ***Calculeu la superfície del recinte damunt dit.***

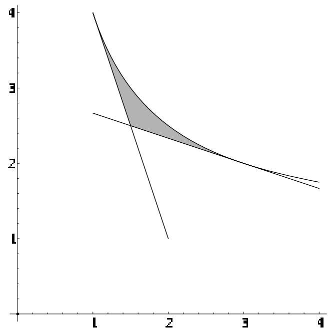
[1 punt per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b; 1 punt per l'apartat c; 1,5 punts per l'apartat d]

Solució

a) L'equació de la recta tangent a la gràfica d'una funció $f(x)$ en un punt x_0 és $y = f(x_0)+f'(x)(x-x_0)$. La derivada de la funció donada és $f'(x) = -\dfrac{3}{x^2}$. Per tant,

- En el punt d'abscissa $x = 1$, l'equació de la recta tangent és $y = f(1) + f'(1)(x - 1)$, és a dir, $y = 7 - 3x$.
- En el punt d'abscissa $x = 3$, l'equació és $y = f(3) + f'(3)(x - 3)$, o sigui, $y = 3 - \dfrac{x}{3}$.

b) El dibuix del recinte limitat per la corba i les dues tangents trobades és



c) Els vèrtexs del recinte són els punts de tall (o de contacte) entre la corba i les dues rectes que el limiten. Com que les rectes són tangents a la corba, els "punts de tall" (de fet, solament de contacte) entre cada una de elles i la corba són $(1, 4)$ i $(3, 2)$, respectivament. El vèrtex que falta és el punt d'intersecció entre les dues rectes,

$$\left.\begin{array}{r} y = 7 - 3x \\ y = 3 - x/3 \end{array}\right\} \iff x = 3/2,\ y = 5/2\ .$$

En resum, els vèrtexs del recinte són, ordenats segons les abscisses, $(1,4)$, $(3/2,5/2)$ i $(3,2)$.

d) La superfície demanada és

$$\begin{aligned} A &= \int_1^{3/2}\left(\frac{3+x}{x}-(7-3x)\right)dx+\int_{3/2}^{3}\left(\frac{3+x}{x}-\left(3-\frac{x}{3}\right)\right)dx \\ &= \int_1^{3/2}\left(\frac{3}{x}-6+3x\right)dx+\int_{3/2}^{3}\left(\frac{3}{x}-2+\frac{x}{3}\right)dx \\ &= \left[3\ln|x|-6x+\frac{3x^2}{2}\right]_1^{3/2}+\left[3\ln|x|-2x+\frac{x^2}{6}\right]_{3/2}^{3} \\ &= \ln(27)-3\simeq 0,2958\ . \end{aligned}$$

6.- Siguin r i s dues rectes de l'espai les equacions respectives de les quals, que depenen d'un paràmetre real b, són les següents:

$$r:\begin{cases} bx+y+3z=1 \\ x+2y+5z=1 \end{cases}\ ,\qquad s:\frac{x}{1}=\frac{y-b}{b+1}=\frac{z+1}{-1}\ .$$

a) ***Trobeu el punt de tall de la recta r amb el pla d'equació $x=0$ i el punt de tall de la recta s amb aquest mateix pla.***

b) ***Calculeu un vector director per a cada una de les rectes.***

c) ***Estudieu la posició relativa de les dues rectes en funció del paràmetre b.***

[1 punt per l'apartat a; 1 punts per l'apartat b; 2 punts per l'apartat c]

Solució

a) El punt de tall de la recta r amb el pla $x=0$, té la primera component nul·la i, per tant, ha de complir que

$$\begin{cases} y+3z=1 \\ 2y+5z=1 \end{cases}.$$

La solució d'aquest sistema és $y=-2$ i $z=1$. Així el punt que estem buscant és $P=(0,-2,1)$.

Quant a trobar el punt de tall de la recta s amb el pla $x=0$, solament cal substituir aquest valor a l'equació contínua de la recta s per veure que, llavors, $y=b$ i $z=-1$. Així el punt buscat és $Q=(0,b,-1)$.

b) El vector director de la recta r ha de ser perpendicular als vectors característics dels plans que la determinen, $v_1=(b,1,3)$, $v_2=(1,2,5)$. Llavors, si $v_r=(\alpha,\beta,\gamma)$, cal que

$$(\alpha,\beta,\gamma)\cdot(b,1,3)=0,\qquad (\alpha,\beta,\gamma)\cdot(1,2,5)=0.$$

Aquests productes escalars donen lloc al sistema d'equacions

$$\left.\begin{array}{l} \alpha b+\ \beta\ +3\gamma=0 \\ \alpha\ +2\beta+5\gamma=0 \end{array}\right\}$$

De la segona equació, $\alpha=-2\beta-5\gamma$. Substituint a la primera equació i fent operacions s'arriba a que $\beta(1-2b)=\gamma(3-5b)$, la qual cosa permet agafar, per exemple, $\beta=3-5b$ i $\gamma=1-2b$. Llavors,

$$\alpha=-2\beta-5\gamma=-2(3-5b)-5(1-2b)=-1.$$

Així el vector director serà $v_r=(-1,3-5b,2b-1)$.

Recordem que v_r també es pot calcular efectuant un producte vectorial,

$$v_r=(b,1,3)\times(1,2,5)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ b & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}=-i+(3-5b)j+(2b-1)k=(-1,3-5b,2b-1).$$

El vector director de la recta s es treu directament de la seva equació, $v_s = (1, b+1, -1)$.

c) Construïm la matriu

$$A = \begin{pmatrix} \overrightarrow{PQ} \\ v_r \\ v_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b+2 & -2 \\ -1 & 3-5b & 2b-1 \\ 1 & b+1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & b+1 & -1 \\ 0 & b+2 & -2 \\ 0 & 4-4b & 2b-2 \end{pmatrix}$$

Estudiem el rang d'aquesta matriu, comprovant per quin valor del paràmetre b les dues últimes files són proporcionals, és a dir,

$$(b+2)(2b-2) = -2(4-4b) \iff b^2 - 3b + 2 = 0 \iff b = 1 \text{ o } b = 2\ .$$

Per tant,

- Si $b \neq 1$ i $b \neq 2$, tenim que rang $A = 3$; les dues rectes es creuen.
- Si $b = 1$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; d'aquí, rang $A = 2$ i rang $\begin{pmatrix} v_r \\ v_s \end{pmatrix} = 1$. Les dues rectes són paral·leles.
- Si $b = 2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -1 & -7 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; o sigui, rang $A = 2$ i rang $\begin{pmatrix} v_r \\ v_s \end{pmatrix} = 2$. Les dues rectes es tallen.

SÈRIE 3

QÜESTIONS

1.- Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \\ b & a^2 \end{pmatrix}$***. Trobeu els valors dels paràmetres*** a ***i*** b ***perquè tingui rang 1.***

[2 punts]

Solució

Escalonem la matriu, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \\ b & a^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & b-2a \\ 0 & a^2-2b \end{pmatrix}$.

Perquè el rang sigui 1 cal que $b - 2a = 0$ i $a^2 - 2b = 0$. De la primera equació se'n dedueix que $b = 2a$; posant-ho a la segona queda $a^2 - 4a = 0$; és a dir, $a = 0$ o $a = 4$. Llavors les solucions són:

$$a = 0,\ b = 0 \qquad \text{o bé} \qquad a = 4,\ b = 8\ .$$

També es pot plantejar l'exercici, per exemple, forçant que les dues columnes siguin proporcionals, però les equacions a resoldre seran les mateixes.

2.- Considereu les corbes $y = 4x - x^2$ ***i*** $y = x^2 - 6$***.***

a) ***Trobeu-ne els punts d'intersecció.***

b) ***Representeu les dues corbes en una mateixa gràfica, on es vegi clarament el recinte que limiten entre elles.***

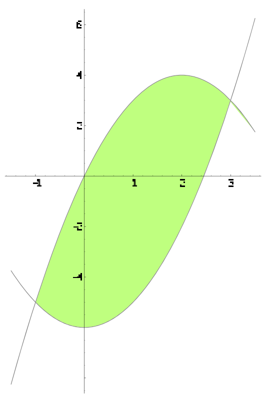
c) ***Trobeu l'àrea d'aquest recinte limitat per les dues corbes.***

[0,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b; 1 punt per l'apartat c]

Solució

a) Les abscisses dels punts de tall d'ambdues corbes, han de complir que $4x - x^2 = x^2 - 6$. Les solucions d'aquesta equació són $x = -1$ i $x = 3$. Així els punts de tall són $(-1, -5)$ i $(3, 3)$.

b) La gràfica és la següent:



c) Comprovem quina és la corba que limita el recinte per dalt

$$y = 4x - x^2 \Longrightarrow y(0) = 0 \ ; \qquad y = x^2 - 6 \Longrightarrow y(0) = -6.$$

La corba d'equació $y = 4x - x^2$ és la que va per damunt. Llavors,

$$A = \int_{-1}^{3} [(4x - x^2) - (x^2 - 6)]dx = \int_{-1}^{3} (4x - 2x^2 + 6)dx = \left[2x^2 - \frac{2x^3}{3} + 6x\right]_{-1}^{3} = \frac{64}{3}\,.$$

3.- Donat el sistema $\begin{cases} x + py = p \\ px + y = p \end{cases}$***:***

a) ***Discutiu-ne el caràcter en funció del paràmetre*** p***.***

b) ***Resoleu-lo quan*** $p = 2$***.***

[1,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b]

Solució

a) Escalonem la matriu ampliada del sistema,

$$\begin{pmatrix} 1 & p & | & p \\ p & 1 & | & p \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & p & | & p \\ 0 & 1 - p^2 & | & p - p^2 \end{pmatrix}$$

Analitzem el valor de l'element $1 - p^2$. Tenim que $1 - p^2 = 0$ si i sol si $p = \pm 1$. Per tant,

- Si $p \neq -1$ i $p \neq 1$, el sistema és compatible determinat, ja que el rang de la matriu del sistema i el de l'ampliada és 2, coincidint, a més a més, amb el número d'incògnites.
- Si $p = -1$, la matriu escalonada és $\begin{pmatrix} 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & | & -2 \end{pmatrix}$. El rang de la matriu del sistema és 1 i el de l'ampliada és 2. El sistema és incompatible.
- Si $p = 1$, la matriu escalonada és $\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$. El sistema és compatible indeterminat perquè el rang de la matriu del sistema i el de l'ampliada coincideixen (valen 1), però és inferior al número d'incògnites.

b) Per $p = 2$, el sistema és $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ o, escalonat, $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ -3y = -2 \end{cases}$. La solució és $x = 2/3$, $y = 2/3$.

4.- Donats el pla $\pi : x + 2y - z = 0$ ***i el punt*** $P = (3, 2, 1)$***:***

a) ***Calculeu l'equació contínua de la recta*** r ***que passa per*** P ***i és perpendicular a*** π***.***

b) ***Calculeu el punt simètric del punt*** P ***respecte del pla*** π***.***

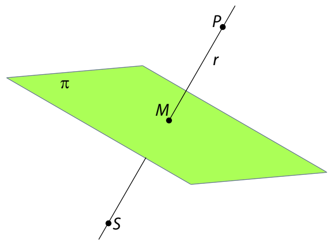
[1 punt per cada apartat]

Solució

a) Els coeficients de l'equació del pla ens proporcionen el seu vector característic, que ens pot servir com a vector director de la recta buscada. Per tant, l'equació d'aquesta recta és

$$r : \frac{x - 3}{1} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 1}{-1}$$

b) El punt de tall entre r i π és el punt mig entre el punt P i el seu simètric respecte del pla π.



Busquem aquest punt, al qual anomenarem M.

$$\begin{cases} (x,y,z)\in r \iff x=3+\lambda,\ y=2+2\lambda,\ z=1-\lambda \\ (x,y,z)\in \pi \iff x+2y-z=0 \end{cases}$$

Llavors, $(3+\lambda)+2(2+2\lambda)-(1-\lambda)=0 \iff 6\lambda+6=0 \iff \lambda=-1$. El punt de tall és $M=(2,0,2)$. Si anomenem $S=(x_s,y_s,z_s)$ al punt simètric, tenim

$$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MS} \iff (2,0,2)-(3,2,1)=(x_s,y_s,z_s)-(2,0,2) \iff x_s=1,\ y_s=-2,\ z_s=3$$

El punt simètric és $S=(1,-2,3)$.

PROBLEMES

5.- *Sigui* $f(x)=a+\dfrac{4}{x}+\dfrac{b}{x^2}$**.**

a) ***Calculeu els valors de*** a ***i*** b***, sabent que la recta*** $2x+3y=14$ ***és tangent a la gràfica de la funció*** $f(x)$ ***en el punt d'abscissa*** $x=3$***.***

Per la resta d'apartats, considereu que $a=-3$ ***i que*** $b=4$***.***

b) ***Trobeu els intervals de creixement i de decreixement de la funció*** $f(x)$***. Trobeu i classifiqueu els extrems relatius que té la funció.***

c) ***Calculeu els punts de tall de la funció*** $f(x)$ ***amb l'eix*** OX***.***

d) ***Trobeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció*** $f(x)$***, l'eix*** OX ***i les rectes*** $x=1$ ***i*** $x=3$***.***

[1 punt per l'apartat a; 1 punt per l'apartat b; 0,5 punts per l'apartat c; 1,5 punts per l'apartat d]

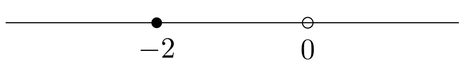
Solució

a) Perquè la recta $y=\dfrac{14-2x}{3}$ sigui tangent a $f(x)$ en el punt $x=3$ cal que $f(3)=y(3)$ i que $f'(3)=y'(3)$. Tenint en compte que $f'(x)=-\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{2b}{x^3}$, ens queda el sistema d'equacions

$$a+\frac{4}{3}+\frac{b}{9}=\frac{8}{3} \quad \text{i} \quad -\frac{4}{9}-\frac{2b}{27}=-\frac{2}{3}\,,$$

que té per solució $a=1$ i $b=3$.

b) La funció, quan $a=-3$ i $b=4$, és $f(x)=-3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{x^2}$ i la seva derivada és $f'(x)=-\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{8}{x^3}$. Els possibles extrems relatius han de complir $f'(x)=0$; de fet, aquesta equació solament té la solució $x=-2$. Cal tenir en compte, a més a més, que el punt $x=0$ no és del domini de la funció. Així, per estudiar els intervals on la funció creix o decreix, haurem d'assenyalar sobre la recta real els punts $x=-2$ i $x=0$,



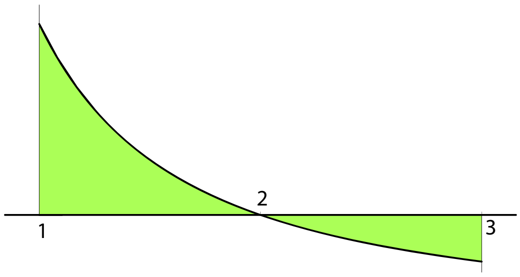
Com que $f'(-3) < 0$, $f'(-1) > 0$ i $f'(1) < 0$, podem assegurar que

- la funció $f(x)$ és creixent a $(-2, 0)$;
- la funció $f(x)$ és decreixent a $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$;
- la funció té un mínim relatiu en $x = -2$; és el punt $(-2, -4)$.

Cal notar que la funció no té extrem relatiu en $x = 0$ perquè aquest punt no és del domini.

c) Les abscisses dels punts de tall d'aquesta funció amb l'eix OX són les solucions de l'equació $f(x) = 0$ (és a dir, $-3 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{x^2} = 0$). Aquestes solucions són $x = -2/3$ i $x = 2$.

d) Com que el punt de tall amb l'eix OX $x = 2$ està dins de l'interval d'integració, tal com es pot veure a la figura següent,



l'àrea demanada s'ha de calcular en dos trossos,

$$A = \int_1^2 \left(-3 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right) dx + \int_2^3 \left(3 - \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2}\right) dx = \left[-3x + 4\ln|x| - \frac{4}{x}\right]_1^2 + \left[3x - 4\ln|x| + \frac{4}{x}\right]_2^3$$
$$= \frac{4}{3} + 4\ln\frac{4}{3} \simeq 2,4841\ .$$

6.- Siguin** $P = (3 - 2a, b, -4)$**,** $Q = (a - 1, 2 + b, 0)$ **i** $R = (3, -2, -2)$ **tres punts de l'espai** $\mathbb{R}^3$**.

a) ***Calculeu el valor dels paràmetres** a **i** b **per als quals aquests tres punts estiguin alineats.***

b) ***Calculeu l'equació contínua de la recta que els conté quan estan alineats.***

c) ***Quan** $b = 0$**, trobeu els valors del paràmetre** a **perquè la distància entre els punts** P **i** Q **sigui la mateixa que la distància entre els punts** P **i** R**.***

d) ***Si** $b = 0$**, calculeu el valor del paràmetre** a **perquè els punts** P**,** Q **i** R **determinin un triangle equilàter.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

a) Els punts P, Q i R estan alineats si i sol si $\overrightarrow{PQ} = k \cdot \overrightarrow{PR}$, és a dir, si i sol si

$$(3a - 4, 2, 4) = k(2a, -2 - b, 2)$$

D'aquí, cal que $3a - 4 = 2ka$, $2 = k(-2 - b)$ i $4 = 2k$. De l'última equació se'n treu que $k = 2$ i, llavors, $a = -4$ i $b = -3$.

b) Per $a = -4$ i $b = -3$, els punts són $P = (11, -3, -4)$, $Q = (-5, -1, 0)$ i $R = (3, -2, -2)$. La recta que passa per P i Q (i, per tant, també per R) té per equació contínua

$$\frac{x - 11}{-5 - 11} = \frac{y + 3}{-1 + 3} = \frac{z + 4}{0 + 4}, \text{ és a dir, } \frac{x - 11}{-16} = \frac{y + 3}{2} = \frac{z + 4}{4}\ .$$

c) Quan $b=0$ els punts són $P=(3-2a,0,-4)$, $Q=(a-1,2,0)$ i $R=(3,-2,-2)$. Llavors,

$$d(P,Q)=\sqrt{[(a-1)-(3-2a)]^2+(2-0)^2+(0+4)^2}=\sqrt{(3a-4)^2+20}\ ,$$

$$d(P,R)=\sqrt{[3-(3-2a)]^2+(-2-0)^2+(-2+4)^2}=\sqrt{4a^2+8}\ .$$

La igualtat entre aquestes dues distàncies es produeix quan $(3a-4)^2+20=4a^2+8$, és a dir, quan $a=14/5$ o $a=2$.

d) Perquè el triangle sigui equilàter ha de passar que $d(P,Q)=d(P,R)=d(Q,R)$. La primera igualtat és la que s'ha estudiat en l'apartat anterior. Imposem ara que $d(P,Q)=d(Q,R)$:

$$d(P,Q)=d(Q,R) \iff 9a^2-24a+36=a^2-8a+36 \iff 8a^2-16a=0 \iff a=0 \text{ o } a=2.$$

Evidentment també podem imposar que $d(P,R)=d(Q,R)$. En aquest cas queda $a=2$ o $a=-14/3$.

Sigui com sigui, el valor del paràmetre a per al qual el triangle determinat per P, Q i R és equilàter és $a=2$.

Aquest apartat es pot resoldre també substituint a cada un dels punts els valors del paràmetre a trobats a l'apartat anterior, comprovant quin dels dos fa que les tres distàncies siguin iguals.