SÈRIE 1

QÜESTIONS

1.- Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -b \end{pmatrix}$. Calculeu el valor dels paràmetres a i b perquè $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

[2 punts]

Solució

Calculem el valor de la matriu A^2,

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a-b & b^2 \end{pmatrix}.$$

Quan igualem aquest resultat a la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ens queden les equacions $a^2 = 1$, $a - b = -2$ i $b^2 = 1$. La segona equació permet assegurar que $a = b - 2$. Llavors, la primera equació és $(b-2)^2 = 1$ que té per solucions $b = 3$ i $b = 1$; la tercera equació té per solucions $b = 1$ i $b = -1$. El valor que les compleix simultàniament és $b = 1$; d'aquí, $a = 1 - 2 = -1$.

També es pot treballar de la forma explicitada a continuació.

De la primera equació, resulta $a = \pm 1$; igualment, de la tercera en deduïm que $b = \pm 1$. Ara cal comprovar aquests valors en la segona equació.

- Quan $a = 1$ i $b = 1$, tenim que $a - b = 0$.
- Per $a = 1$ i $b = -1$, surt que $a - b = 2$.
- Si $a = -1$ i $b = 1$, ens queda que $a - b = -2$.
- Finalment, quan $a = -1$ i $b = -1$, tenim que $a - b = 0$.

Així l'única solució és $a = -1$ i $b = 1$.

2.- Considereu en l'espai $\mathbb{R}^3$ les rectes r i s, les equacions respectives de les quals són:

$$r : (x, y, z) = (4, 1, 0) + \lambda(m, 1, 1), \quad s : \begin{cases} x + 2y + mz = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases},$$

en què m és un paràmetre real. Estudieu si hi ha cap valor d'aquest paràmetre per al qual les rectes siguin perpendiculars i es tallin.

[2 punts]

Solució

Dues rectes són perpendiculars si ho són els seus vectors directors. Busquem, per tant, els vectors directors de les rectes.

És clar que com a vector director de la recta r podem agafar $v_r = (m, 1, 1)$.

El vector director de la recta s es pot trobar de diferents maneres; entre elles:

(a) Efectuant el producte vectorial dels vectors característics dels plans que la determinen,

$$v_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2-m, m-1, -1).$$

(b) Buscant un vector (a,b,c) tal que sigui perpendicular als vectors característics dels plans que la determinen,

$$\left\{\begin{array}{l} (a,b,c)\cdot(1,2,m)=0 \\ (a,b,c)\cdot(1,1,1)=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+2b+mc=0 \\ a+b+c=0 \end{array}\right. \Longrightarrow a=(m-2)c,\ b=(1-m)c.$$

Fent $c=1$ (qualsevol altre valor no nul també serveix), tenim que $v_s=(m-2,1-m,1)$.

(c) Trobant les equacions paramètriques de la recta s. Per exemple, de la segona equació que la defineix podem deduir que $x=1-y-z$. Portant aquest valor a la primera, fent els càlculs adequats i aïllant la variable y, ens queda $y=(1-m)z-1$. Amb això, $x=2-(2-m)z$. Les equacions paramètriques obtingudes per aquest camí són

$$\left.\begin{array}{rl} x = & 2-(2-m)\lambda \\ y = & -1+(1-m)\lambda \\ z = & \lambda \end{array}\right\}.$$

El vector director (coeficients del paràmetre λ) és llavors $v_s=(m-2,1-m,1)$.

Així, aquestes dues rectes són perpendiculars si i sol si $(m,1,1)\cdot(m-2,1-m,1)=0$; d'aquí,

$$(m,1,1)\cdot(m-2,1-m,1)=0 \Longrightarrow m^2-3m+2=0 \Longrightarrow m=1 \text{ o } m=2.$$

Comprovem ara si les rectes es tallen per algun d'aquests dos valors.

- Quan $m=1$, les equacions paramètriques de la recta r són $x=4+\lambda$, $y=1+\lambda$, $z=\lambda$. Substituint aquests valors a les equacions que determinen la recta s, tenim $(4+\lambda)+2(1+\lambda)+\lambda=0$ i $(4+\lambda)+(1+\lambda)+\lambda=0$. La primera igualtat es compleix per $\lambda=-3/2$ i la segona per $\lambda=-4/3$. Això vol dir que, en aquest cas, les rectes no es tallen.
- Per $m=2$ obtenim, seguint el mateix procediment, les equacions $(4+2\lambda)+2(1+\lambda)+2\lambda=0$ i $(4+\lambda)+(1+\lambda)+\lambda=1$, que tenen $\lambda=-1$ com a solució comú.

Per tant, l'únic valor del paràmetre m per al qual les rectes són perpendiculars i es tallen és $m=2$.

Naturalment, hi ha altres formes d'imposar la segona condició (que les rectes es tallin). Per exemple, buscant el vector $\overrightarrow{PQ}$, on P és un punt de la recta r i Q un punt de la recta s, i imposant que rang $(\overrightarrow{PQ}, v_r, v_s) < 3$. Això dóna que $m=2$.

De fet, és possible començar la resolució imposant la condició de què les rectes es tallin i comprovar després directament que pel valor obtingut, $m=2$, les rectes són perpendiculars.

3.- Sigui $f(x)=2x^3-x^2+3x+1$. Donades les rectes $r_1: y=x+2$ i $r_2: y=7x-2$:

a) ***Expliqueu, raonadament, si alguna de les dues rectes donades pot ser tangent a la corba $f(x)$ en algun punt.***

b) ***En cas què alguna d'elles ho sigui, trobeu el punt de tangència.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

a) Una recta i una corba són tangents en un punt si les dues passen pel punt i tenen el mateix pendent en ell. El pendent de la corba en un punt és el valor de la derivada de la funció en el punt. Calculem aquesta derivada: $f'(x) = 6x^2 - 2x + 3$.

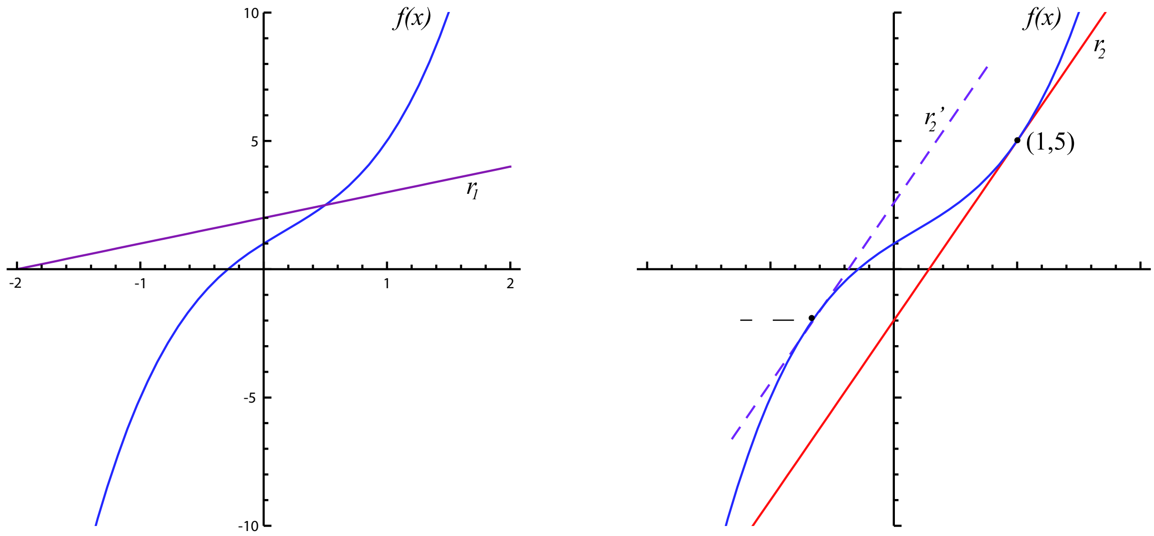
La recta r_1 pot ser tangent a la corba si i sol si existeix algun valor de x per al qual $f'(x) = 1$ (que és el valor del pendent de r_1). Com que l'equació $6x^2 - 2x + 3 = 1$ no té solucions (reals), la recta r_1 no pot ser tangent a la gràfica de $f(x)$.

Paral·lelament, la recta r_2 pot ser tangent a la corba si i sol si l'equació $6x^2 - 2x + 3 = 7$ té alguna solució. Com és fàcil veure, aquesta equació admet com a solucions $x = 1$ i $x = -2/3$. Per tant, la recta r_2 pot ser tangent a la gràfica de $f(x)$.

b) Per $x = 1$, la funció val $f(1) = 2 - 1 + 3 + 1 = 5$ i la recta r_1, $y = 7 - 2 = 5$; o sigui, tant la corba com la recta passen pel punt $(1, 5)$. Aquest és el punt de tangència.

Per $x = -2/3$ tenim que $f(-2/3) = -55/27$ i $y(-2/3) = -20/3$, la qual cosa indica que la recta i la corba, en aquest cas, no són tangents.

Les següents gràfiques il·lustren la situació de la funció i de les rectes donades.



En la de l'esquerra tenim la posició de la funció $f(x)$ i r_1, veient-se clarament que no poden ser tangents. En la de la dreta, la recta r_2 és tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt $(1, 5)$; la recta r_2' és paral·lela a r_2 (és a dir, té el mateix pendent) passant pel punt $(-2/3, -55/27)$, però, evidentment, no és r_2.

4.- Donats els vectors $v_1 = (a + 1, 2a, 1)$, $v_2 = (-2, a, 2a)$, $v_3 = (a, -2, 4a - 2)$ ***de*** $\mathbb{R}^3$***:***

a) ***Calculeu l'angle que formen*** v_1 ***i*** v_2 ***quan*** $a = 0$.

b) ***Trobeu el valor del paràmetre*** a ***perquè els vectors*** v_1, v_2 ***i*** v_3 ***siguin perpendiculars dos a dos.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

a) Sigui α l'angle format pels vectors v_1 i v_2. Llavors,

$$\cos\alpha = \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\|\,\|v_2\|} = \frac{(1,0,1)\cdot(-2,0,0)}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\,\sqrt{(-2)^2+0^2+0^2}} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

D'aquí, $\alpha = 135^o = 3\pi/4$ rad.

b) Cal que es compleixi que $v_1 \cdot v_2 = 0$, $v_1 \cdot v_3 = 0$ i $v_2 \cdot v_3 = 0$.

$$v_1 \cdot v_2 = (a+1, 2a, 1) \cdot (-2, a, 2a) = 2(a^2 - 1) = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$$

$$v_1 \cdot v_3 = (a+1, 2a, 1) \cdot (a, -2, 4a-2) = a^2 + a - 2 = 0 \Longrightarrow a = 1,\ a = -2$$

$$v_2 \cdot v_3 = (-2, a, 2a) \cdot (a, -2, 4a-2) = 8(a^2 - a) = 0 \Longrightarrow a = 1,\ a = 0$$

Solament per $a = 1$ es compleixen les tres igualtats alhora.

PROBLEMES

5.- Considereu la funció real de variable real $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2-1}$.

a) Trobeu-ne el domini.

b) Calculeu l'equació de les seves asímptotes, si en té.

c) Estudieu-ne els intervals de creixement i de decreixement, així com les abscisses dels seus extrems relatius, si en té, classificant-los.

[0,5 punts per l'apartat a; 1,5 punts per l'apartat b; 2 punts per l'apartat c]

Solució

a) No són del domini solament els valors de la variable x que anul·len en denominador. Per tant, $\text{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

b) *Asímptotes verticals.* Com que

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{2x^3}{x^2-1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty, \qquad \lim_{x \to -1^+} \frac{2x^3}{x^2-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty,$$

podem assegurar que la recta $x = -1$ és una asímptota vertical. Paral·lelament, es comprova que $x = 1$ també és una asímptota vertical.

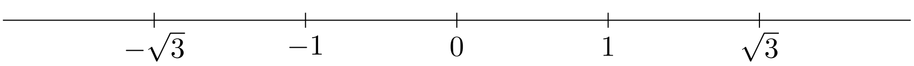
Asímptota horitzontal. El fet de què $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ (ja que el grau del numerador és major que el grau del denominador), ens assegura que no hi ha asímptota horitzontal.

Asímptota obliqua. És de la forma $y = mx + b$ amb $m = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ i $b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - mx)$. En el nostre cas,

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^3}{x^3 - x} = 2; \qquad b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^3}{x^2-1} - 2x \right) = 0.$$

Així, tenim asímptota obliqua, d'equació $y = 2x$.

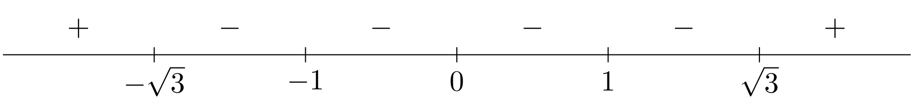
c) La derivada de la funció és $f'(x) = \dfrac{2x^4 - 6x^2}{(x^2-1)^2}$, que val zero quan $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ o $x = \sqrt{3}$. Marquem, a la recta real, els punts que anul·len la primera derivada i els que no són del domini,



Així, la recta real queda dividida en sis intervals: $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \sqrt{3})$ i $(\sqrt{3}, +\infty)$. Busquem el signe de la primera derivada en un punt de cada un d'aquests intervals,

$$f'(-2) > 0;\ f'(-1,5) < 0;\ f'(-0,5) < 0;\ f'(0,5) < 0;\ f'(1,5) < 0;\ f'(2) > 0.$$

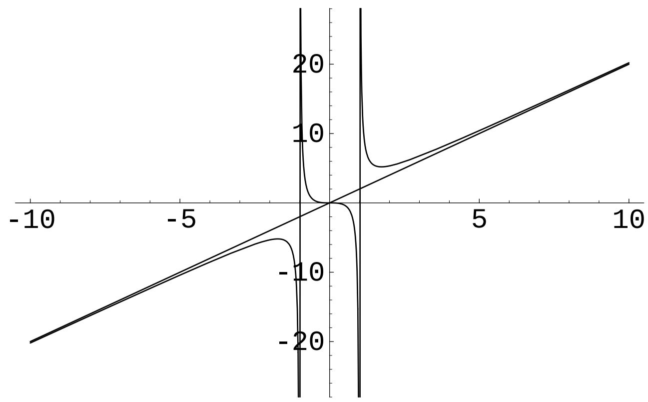
L'esquema de signes per la primera derivada és



Per tant, la funció $f(x)$

- és creixent a $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$;
- és decreixent a $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$;
- té un màxim quan $x = -\sqrt{3}$;
- té un mínim quan $x = \sqrt{3}$.

Encara que en el problema no es demana, la gràfica d'aquesta funció (amb indicació de les asímptotes) és, aproximadament,



6.- Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{r} x + 5y + z + a = 0 \\ (a-2)z + x + 2y - 1 = 0 \\ (a-1)y + (1-a)x + z + a + 2 = 0 \end{array}\right\}$$

a) **Expliqueu, raonadament, si es tracta d'un sistema lineal homogeni.**

b) **Construïu-ne la matriu de coeficients i la matriu ampliada.**

c) **Trobeu els valors del paràmetre a per als quals el sistema no és compatible determinat, i estudieu el caràcter del sistema en cada un d'aquests casos.**

d) **Resoleu-lo solament quan el conjunt de les seves solucions és una recta de $\mathbb{R}^3$.**

[0,5 punt per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b; 2 punts per l'apartat c; 1 punt per l'apartat d]

Solució

a) Un sistema d'equacions lineals és homogeni quan tots els termes independents són nuls, cosa que no passa al nostre cas; per exemple, el terme independent de la segona equació és -1 (o 1, si es considera translladat a la dreta de la igualtat). No és, doncs, un sistema homogeni.

b) La matriu de coeficients del sistema i la matriu ampliada són, respectivament,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & a-2 \\ 1-a & a-1 & 1 \end{pmatrix} \ ; \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & -a \\ 1 & 2 & a-2 & 1 \\ 1-a & a-1 & 1 & -a-2 \end{pmatrix}.$$

c) Escalonem la matriu ampliada per tal de calcular el rang que té, tant ella com la matriu de coeficients,

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & | & -a \\ 1 & 2 & a-2 & | & 1 \\ 1-a & a-1 & 1 & | & -a-2 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & | & -a \\ 0 & -3 & a-3 & | & a+1 \\ 0 & 6a-6 & a & | & -a^2-2 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{(2)}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 1 & & -a \\ 0 & -3 & a-3 & & a+1 \\ 0 & 0 & 2a^2-7a+6 & & a^2-4 \end{array}\right)$$

En (1) s'ha restat la fila 1 a la fila 2 ($F_2 - F_1$) i la fila 1 multiplicada per $1-a$ a la fila 3 ($F_3-(1-a)F_1$); en (2) s'ha sumat la fila 2 multiplicada per $2a-2$ a la fila 3 ($F_3 + (a-2)F_1$).

Cal analitzar quins valors del paràmetre a fan que l'element de la tercera fila tercera columna sigui nul,

$$2a^2 - 7a + 6 = 0 \Longrightarrow a = 2,\ a = 3/2.$$

Quan $a = 2$ o $a = 3/2$ el sistema no és compatible determinat.

Per $a = 2$, la matriu resultant de l'escalonament és $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. En aquest cas, rang $A =$ rang $\overline{A} = 2$; el sistema és compatible indeterminat (amb un grau de llibertat).

Per $a = 3/2$, la matriu resultant de l'escalonament és $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -3/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & -7/4 \end{array}\right)$, i el sistema és incompatible, ja que rang $A = 2 < 3 =$ rang $\overline{A}$.

d) El conjunt de solucions del sistema és una recta a $\mathbb{R}^3$ si i sol si es tracta d'un sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat. Això passa per $a = 2$. Llavors, la solució és, per exemple, $x = 1 - 2y$, $z = -3 - 3y$.