SÈRIE 1

1.- Trobeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla que conté la recta $r_1 : \dfrac{x-1}{2} = y = 2 - z$ i és palal·lel a la recta $r_2 : \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$.

[2 punts]

Solució

Anomenem π al pla que ens demanen. Cal trobar un vector director per cada una de les rectes; aquests vectors són els generadors de π. Busquem l'equació contínua de la recta r_1,

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1} ,$$

per tenir el vector director $v_1 = (2, 1, -1)$. A més a més, tenim que $P = (1, 0, 2) \in r_1$ i, per tant, també $P \in \pi$.

El vector director de r_2 és

$$v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-3, -2, -1) .$$

L'equació de π és

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & x-1 \\ 1 & -2 & y-0 \\ -1 & -1 & z-2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

és a dir, $3x - 5y + z - 5 = 0$.

2.- Donat el sistema d'equacions lineals $\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = -1 \\ 2x + y + z = 4 \\ x - y + (p-3)z = 5 \end{array}\right\}$ ***:***

(a) ***Estudieu-ne el caràcter (és a dir, si és compatible o no i si és determinat o no) en funció del paràmetre p.***

(b) ***Comproveu que si $p \neq 5$ la solució del sistema no depèn del valor d'aquest paràmetre.***

[1,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) Escalonem la matriu del sistema,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & p-3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & p-2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & p-5 & 0 \end{array}\right) .$$

A partir d'aquí,

- Si $p \neq 5$ el rang de la matriu del sistema i el de l'ampliada valen 3, que és igual al número d'incògnites. Per tant, el sistema és compatible determinat.
- Quan $p = 5$, els rangs valen 2, menor que el número d'incògnites. Per tant, el sistema és compatible indeterminat.

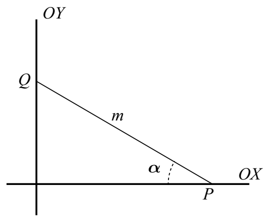
La qüestió es pot resoldre també buscant el determinant de la matriu del sistema, que dóna $15 - 3p$; en igualar-lo a zero, resulta $p = 5$ com a cas a estudiar. Si es fa així, en el cas $p = 5$ cal estudiar el rang de la matriu ampliada arribant a la conclusió de què rang A = rang $(A|b) = 2$.

(b) D'acord amb l'escalonament anterior, si $p \neq 5$ el sistema a resoldre és

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z=-1 \\ -y+z=2 \\ (p-5)z=0 \end{array}\right\} .$$

que té per solució $z=0$, $y=-2$ i $x=3$, independentment del valor de p, sempre que $p \neq 5$.

3.- Un segment de longitud fixada m recolza sobre els eixos de coordenades. Calculeu el valor de l'angle α que forma el segment amb l'eix OX perquè el triangle rectangle determinat pel segment amb els eixos i del qual m és la hipotenusa tingui àrea màxima. Comproveu que es tracta realment d'un màxim.



[2 punts]

Solució 1

Siguin $P=(x,0)$ i $Q=(0,y)$ els punts on el segment toca als eixos de coordenades. Llavors, és evident que $x^2+y^2=m^2$ i que $A=\dfrac{x\cdot y}{2}$. De la primera igualtat, $y=\sqrt{m^2-x^2}$. Substituint aquest valor a la fórmula que ens dóna l'àrea, ens queda $A=\dfrac{x\cdot\sqrt{m^2-x^2}}{2}$. Ara cal trobar el valor de la derivada, o bé de la funció $A(x)$ o bé de la funció $B(x)=[A(x)]^2$, la qual permet simplificar el càlcul de la derivada, sense canviar el resultat.

$$A'(x)=\frac{\sqrt{m^2-x^2}}{2}-\frac{x^2}{2\sqrt{m^2-x^2}}=\frac{m^2-2x^2}{2\sqrt{m^2-x^2}}\ ; \quad B'(x)=\frac{2x(m^2-x^2)-2x^3}{4}=\frac{x(m^2-2x^2)}{2}\ .$$

$A'(x)=0$ té com a solució $x=\pm\dfrac{m}{\sqrt{2}}$ i $B'(x)=0$ admet a més a més, la solució $x=0$. Tant la solució nul·la com la negativa no tenen sentit en aquest exercici. Per tant, ha de ser $x=\dfrac{m}{\sqrt{2}}$. Llavors,

$$y=\sqrt{m^2-x^2}=\sqrt{m^2-\frac{m^2}{2}}=\sqrt{\frac{m^2}{2}}=\frac{m}{\sqrt{2}}\ .$$

Així, el triangle amb àrea màxima és isòsceles ($x=y$). O sigui, $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ $(=45^o)$.

Ara cal comprovar que es tracta realment d'un màxim. Per fer-ho calcularem la derivada segona de $A(x)$ o de $B(x)$, segons quina funció s'hagi utilitzat.

$$A''(x)=\frac{2x^3-3m^2x}{2(m^2-x^2)^{3/2}} \quad \text{d'on} \quad A''(m/\sqrt{2})=-2<0\ ;$$

$$B''(x)=\frac{m^2-6x^2}{2} \quad \text{i, per tant,} \quad B''(m/\sqrt{2})=-m^2<0\ .$$

D'una manera o de l'altra, la derivada segona negativa indica que es tracta d'un màxim.

Solució 2

Aquesta solució utilitza trigonometria, que no entra específicament al temari de les proves d'accés, però que l'alumne ha cursat al seu primer curs de batxillerat. Sigui P el punt on el segment toca a l'eix OX i Q el punt on el segment toca a l'eix OY. És clar que $P = (m \cdot \cos\alpha, 0)$ i que $Q = (0\,, m \cdot \sin\alpha)$. Llavors, l'àrea del triangle rectangle format pels eixos i el segment és

$$A = \frac{(m \cdot \cos\alpha) \cdot (m \cdot \sin\alpha)}{2} = \frac{m^2}{2} \cdot (\sin\alpha \cdot \cos\alpha).$$

Per trobar el seu valor màxim, busquem la derivada de A respecte de α, la igualem a zero i busquem les solucions de l'equació resultant, tenint en compte que ha de ser un angle del primer quadrant.

$$A' = \frac{m^2}{2} \cdot (\cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha) = \frac{m^2}{2} \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \frac{m^2}{2} \cdot \cos(2\alpha)\ .$$

Llavors,

$$A' = 0 \iff \cos(2\alpha) = 0 \iff 2\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (= 90^o + 180^o k) \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \ (= 45^o + 90^o k).$$

Com que α ha de ser del primer quadrant, la resposta és solament $\alpha = \frac{\pi}{4}$ $(= 45^o)$.

Per comprovar que es tracta d'un màxim, busquem la derivada segona de l'àrea i l'avaluem en el punt trobat,

$$A'' = \frac{m^2}{2}(-\sin(2\alpha) \cdot 2) \Longrightarrow A''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -m^2 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = -m^2 < 0\ .$$

En efecte, es tracta d'un màxim.

4.- Donades les rectes $r_1 : \dfrac{x+5}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{-4}$ ***i*** $r_2 : \begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0 \\ 2x - y + z + 11 = 0 \end{cases}$ ***:***

(a) ***Comproveu que són paral·leles.***

(b) ***Trobeu l'equació general (és a dir, de la forma*** $Ax + By + Cz + D = 0$***) del pla que les conté.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) El vector director de la primera recta és $v_1 = (3, 2, -4)$ i el de la segona,

$$v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (3, 2, -4)\ .$$

Com que els vectors directors són, evidentment, proporcionals, les rectes són paral·leles o coincidents. Per descartar aquesta segona possibilitat, cal comprovar simplement que un punt d'una d'elles no pertany a l'altra. En efecte, el punt $(-5, 1, 2)$, que és un punt de r_1, no compleix la segona equació que defineix la recta r_2 (la primera sí que la compleix!) i, per tant, no pertany a r_2.

(b) Podem trobar un únic pla que conté dues rectes si aquestes es tallen o si són paral·leles no coincidents. Estem en el segon cas, i el pla que les conté tindrà per vectors generadors un director de les rectes i un vector que comenci en un punt de r_1 i acabi en un de r_2. Agafarem $P = (-5, 1, 2) \in r_1$. Per trobar el punt Q pertanyent a r_2, donem un valor qualsevol a alguna de les variables x, y o z. Per exemple, si fem $z = 0$, ens queda el sistema

$$\begin{cases} 2x + y + 5 = 0 \\ 2x - y + 11 = 0 \end{cases},$$

que té per solució $x = -4$, $y = 3$. Agafem $Q = (-4, 3, 0) \in r_2$. L'equació del pla buscat és

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x+5 \\ 2 & 2 & y-1 \\ -4 & -2 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 4x + 2y + 4z + 10 = 0 \Longrightarrow 2x + y + 2z + 5 = 0 \ .$$

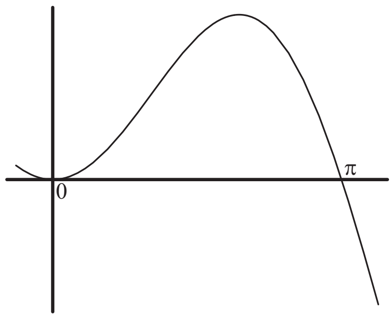
Nota 1: una altra manera de resoldre aquest apartat és utilitzant el feix de plans que determina la recta r_2; la forma d'aquest feix és $2x + y + 2x + 5 + \lambda(2x - y + z + 11) = 0$, és a dir,

$$(2 + 2\lambda)x + (1 - \lambda)y + (2 + \lambda)z + (5 + 11\lambda) = 0 \ .$$

Imposant que aquest pla passi pel punt $P = (-5, 1, 2)$, ens sortirà que $\lambda = 0$, per la qual cosa el pla buscat és $2x + y + 2x + 5 = 0$.

Nota 2: la qüestió es pot resoldre molt més senzillament i ràpida; en efecte, com que el punt P pertany al primer pla que defineix la recta r_2, ja podem assegurar que aquest pla, $2x + y + 2z + 5 = 0$, conté les dues rectes.

5.- La gràfica de la funció $f(x) = x \cdot \sin(x)$ és la següent:



(a) ***Trobeu-ne una primitiva.***

(b) ***Aplicant el resultat de l'apartat anterior, calculeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció $f(x)$ i l'eix d'abscisses des de $x = 0$ fins a $x = \pi$.***

[1,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) Per calcular $\int x \cdot \sin(x)dx$ utilitzarem el mètode de integració per parts. Agafarem $u = x$ i $dv = \sin(x)dx$; llavors, $du = dx$ i $v = -\cos(x)$.

$$\int x \cdot \sin(x)dx = x[-\cos(x)] - \int [-\cos(x)]dx = -x \cdot \cos(x) + \int \cos(x)dx = -x \cdot \cos(x) + \sin(x) \ .$$

No cal sumar cap constant perquè es demana solament **una** primitiva.

(b) Aplicant la regla de Barrow,

$$\int_0^\pi x \cdot \sin(x)dx = \Big[-x \cdot \cos(x) + \sin(x) \Big]_0^\pi = [-\pi \cdot \cos(\pi) + \sin(\pi)] - [-0 \cdot \cos(0) + \sin(0)] = \pi - 0 = \pi.$$

6.- Sigui $A = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix}$. Trobeu els valors de les variables x i y perquè es compleixi que $A^2 = A$.

[2 punts]

Solució

Busquem el valor de la matriu A^2,

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2-6 & 3x+3y \\ -2x-2y & -6+y^2 \end{pmatrix} .$$

La igualtat $A^2 = A$ ens porta al sistema d'equacions

$$x^2 - 6 = x \ ; \quad 3x + 3y = 3 \ ; \quad -2x - 2y = -2 \ ; \quad y^2 - 6 = y \ .$$

De fet, la segona i la tercera equacions són la mateixa, $x + y = 1$. De la primera equació,

$$x^2 - 6 = x \iff x^2 - x - 6 = 0 \iff x = 3 \ \text{ o } \ x = -2 \ .$$

La quarta equació és similar a la primera amb diferent variable. Les solucions són $y = 3$, $y = -2$. En principi, sembla que hi ha quatre solucions diferents,

$$x = 3 \ \text{ amb } \ y = 3; \quad x = 3 \ \text{ amb } \ y = -2; \quad x = -2 \ \text{ amb } \ y = 3; \quad x = -2 \ \text{ amb } \ y = -2.$$

Ara bé, d'aquestes quatre solucions solament dues compleixen l'equació $x + y = 1$:

$$x = 3 \ \text{ amb } \ y = -2 \ ; \quad x = -2 \ \text{ amb } \ y = 3 \ .$$

SÈRIE 4

1.- Donats el pla $\pi : x + 2y + 3z - 4 = 0$ i els punts $P = (3, 1, -2), Q = (0, 1, 2)$:

(a) ***Calculeu l'equació contínua de la recta perpendicular al pla π que passa pel punt P.***

(b) ***Calculeu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla perpendicular a π que passa pels punts P i Q.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Qualsevol recta perpendicular al pla π admet, com a vector director, el vector normal al pla. Si anomenem r a la recta buscada, el seu vector director pot ser $v_r = (1, 2, 3)$. Com que ha de passar pel punt $P = (3, 1, -2)$, la seva equació contínua és

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{3} \ .$$

(b) Els vectors v_π, normal al pla π, i $\overrightarrow{QP} = P - Q = (3, 0, -4)$ generen el pla buscat. A més a més, aquest pla ha de passar pel punt P (o pel punt Q). Per tant, la seva equació general és

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & x-3 \\ 2 & 0 & y-1 \\ 3 & -4 & z+2 \end{vmatrix} = 0 \iff -8x + 13y - 6z - 1 = 0 \ .$$

2.- Considereu la igualtat matricial $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

(a) ***Comproveu si les matrius $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ compleixen o no la igualtat anterior.***

(b) ***En general, donades dues matrius qualssevol A i B quadrades del mateix ordre, expliqueu raonadament si hi ha alguna condició que hagin de complir perquè la igualtat de l'enunciat sigui certa.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Realitzem els càlculs demanats.

$$(A+B)^2 = \left[\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

$$\begin{aligned} A^2 + 2AB + B^2 &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 + 2\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ . \end{aligned}$$

(b) En realitat, $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2+AB+BA+B^2 \neq A^2+2AB+B^2$, ja que, en general, $AB \neq BA$. Així, la condició que han de complir les matrius A i B perquè es verifiqui la igualtat de l'enunciat és que $AB = BA$.

3.- Sigui $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomi qualsevol de segon grau.

(a) ***Trobeu la relació existent entre els paràmetres a, b i c sabent que es compleix que $P(1) = 0$ i $P(2) = 0$.***

(b) ***Quan es compleix la condició anterior, indiqueu quins valors pot tenir*** $P'(3/2)$.

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Com que $P(1) = a + b + c$ i $P(2) = 4a + 2b + c$, tenim el següent sistema,

$$\left.\begin{aligned} a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{aligned}\right\} \iff b = -3a \ , \quad c = 2a \ .$$

Aquestes són les relacions que s'han de verificar: $b = -3a$, $c = 2a$.

(b) La derivada del polinomi $P(x) = ax^2 - 3ax + 2a$ és $P'(x) = 2ax - 3a$. Per tant, $P'(3/2) = 0$ per tot valor del paràmetre a.

4.- Hem escalonat la matriu ampliada d'un sistema d'equacions lineals, $A \cdot X = b$***, i hem obtingut:***

$$(A|b) \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 2 \\ 0 & a+2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & | & 3 \end{pmatrix} .$$

(a) ***Discutiu aquest sistema en funció del paràmetre*** a.

(b) ***Resoleu-lo quan*** $a = 2$.

[1,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) Vist l'enunciat, hi ha dos valors del paràmetre a a estudiar; en efecte,

- Si $a \neq -2$ i $a \neq 1$, tenim que rang $A =$ rang $(A|b) = 3$, que coincideix amb el nombre d'incògnites. Llavors, el sistema és compatible determinat.
- Per $a = 1$, és clar que rang $A = 2$ i rang $(A|b) = 3$. El sistema és, doncs, incompatible (també es pot raonar veient que la tercera equació és $0 = 3$).
- Quan $a = -2$, la matriu no està acabada d'escalonar. Acabant l'escalonament,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & -3 & | & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} ,$$

  es veu que rang $A =$ rang $(A|b) = 2$; el sistema és compatible indeterminat.

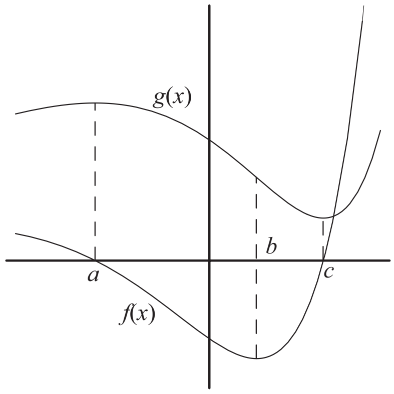
(b) Quan $a = 2$, el sistema d'equacions inicial és equivalent al sistema

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + 3z = 2 \\ 4y + z = -1 \\ z = 3 \end{aligned}\right\}$$

que té per solució $x = -9$, $y = -1$, $z = 3$.

5.- En la figura següent es representen dues funcions. L'una és la derivada de l'altra. Decidiu si la funció $f(x)$ ***és la derivada de la funció*** $g(x)$ ***o és a l'inrevés, estudiant què passa en els punts*** $x = a$, $x = b$ ***i*** $x = c$.

[2 punts]



Solució

En $x = a$, la funció $g(x)$ té un màxim relatiu (per tant $g'(a) = 0$) i la funció $f(x)$ val zero ($f(a) = 0$).

En $x = b$ la funció $g(x)$ té un punt d'inflexió; per tant, la seva segona derivada en aquest punt val zero ($g''(b) = 0$). La funció $f(x)$ té un mínim relatiu en aquest mateix punt ($f'(b) = 0$).

Finalment, en $x = c$ la funció $g(x)$ té un mínim relatiu (un altre cop $g'(c) = 0$) i $f(c) = 0$.

Tot això ens permet assegurar que la funció $f(x)$ és la derivada de la funció $g(x)$.

6.- Siguin** $\vec{u}_1 = (-1,3,2)$**,** $\vec{u}_2 = (2,-1,4)$ **i** $\vec{u}_3 = (a+1, a-1, 4a+2)$**, tres vectors de l'espai vectorial** $\mathbb{R}^3$**.

(a) ***Trobeu el valor del paràmetre** a **per al qual** $\vec{u}_3$ **és combinació lineal dels vectors** $\vec{u}_1$ **i** $\vec{u}_2$**.***

(b) ***Comproveu que per a** $a = 0$ **el conjunt** $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ **és linealment independent.***

[1 punt per apartat]

Solució

(a) Quan un vector és combinació lineal dels altres dos, el determinant format per ells és nul.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & a-1 \\ 3 & -1 & a-1 \\ 2 & 4 & 4a+2 \end{vmatrix} = 2a-4; \quad 2a-4=0 \iff a=2 \ .$$

O sigui, el vector $\vec{u}_3$ és combinació lineal dels vectors $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ si i sol si $a = 2$.

També es pot fer plantejant l'equació $x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 = \vec{u}_3$; és a dir,

$$x(-1,3,2) + y(2,-1,4) = (a+1, a-1, 4a+2) \iff \left.\begin{array}{r} -x+2y = a+1 \\ 3x-y = a-1 \\ 2x+4y = 4a+2 \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{r} -x+2y-a = 1 \\ 3x-y-a = -1 \\ 2x+4y-4a = 2 \end{array}\right\}.$$

Aquest sistema es pot considerar com un sistema de tres equacions amb tres incògnites (x, y i a). El resolem pel mètode de Gauss,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ 0 & 8 & -6 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right).$$

D'aquí, $a = 2$ (també $x = 1$ i $y = 2$, però no ens interessa).

(b) El conjunt $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ és linealment independent si i sol si el determinant format pels tres vectors és no nul:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \ .$$

També es pot raonar que el determinant dels tres vectors val $2a - 4$, que per $a = 0$ és no nul.

Evidentment, també es pot comprovar que el conjunt és linealment independent igualant una combinació dels tres vectors al vector nul i arribant a què els coeficients han de ser nuls.

SÈRIE 5

1.- Considereu un sistema qualsevol de dues equacions amb tres incògnites. Responeu raonadament les qüestions següents:

(a) ***És possible que el sistema considerat sigui compatible determinat?***

(b) ***Pot ser incompatible?***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Si el sistema té solament dues equacions, el rang màxim que poden tenir la matriu del sistema i la matriu ampliada és 2. Com que hi ha 3 incògnites, és impossible que el sistema sigui compatible determinat.

(b) Sí que pot ser-ho. Per exemple, el sistema $\left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$ és incompatible.

2.- Donats el punt $P=(1,0,-2)$ ***i la recta*** $r: \dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+3}{-3}$ ***:***

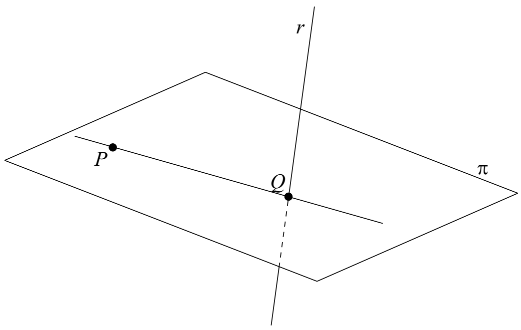
(a) ***Trobeu l'equació contínua de la recta que passa pel punt*** P ***i talla perpendicularment la recta*** r***.***

(b) ***Calculeu la distància del punt*** P ***a la recta*** r***.***

[1,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) La recta que passa pel punt $P=(1,0,-2)$ i que talla perpendicularment la recta r ha d'estar dins del pla π que passa per P i és perpendicular a r.



Aquest pla tindrà el seu vector normal proporcional al vector director de la recta. Per més senzillesa, agafarem el mateix. Així, si v_π és el vector normal al pla π i v_r és el director de la recta r, tenim $v_\pi = v_r = (2,2,-3)$.

L'equació del pla amb vector normal $v_\pi=(A,B,C)$ passant per un punt (x_0,y_0,z_0) és

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

En el nostre cas, $\pi: 2(x-1)+2(y-0)-3(z+2)=0$; és a dir, $\pi: 2x+2y-3z-8=0$.

Busquem ara el punt d'intersecció entre el pla π i la recta r. Podem, per exemple, trobar les equacions paramètriques de la recta i substituir-les en l'equació del pla.

$$\left.\begin{array}{r} x=5+2\lambda \\ y=3+2\lambda \\ z=-3-3\lambda \end{array}\right\} \;;\quad 2(5+2\lambda)+2(3+2\lambda)-3(-3-3\lambda)-8=0 \Longrightarrow \lambda=-1\ .$$

Així, el punt de tall és $Q = (3,1,0)$. La recta buscada passa per $P = (1,0,-2)$ i té com a vector director $\overrightarrow{PQ} = (2,1,2)$. L'equació contínua de la recta buscada és

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{2} \ .$$

(b) Utilitzant el punt Q de l'apartat anterior, el càlcul de la distància entre el punt P i la recta r es pot fer trobant la distància entre els punts P i Q,

$$d(P,r) = d(P,Q) = \sqrt{(3-1)^2 + (1-0)^2 + (0+2)^2} = 3 \ .$$

Aquest apartat també es pot resoldre independentment de l'anterior mitjançant la fórmula

$$d(P,r) = \frac{\|\overrightarrow{PR} \times v_r\|}{\|v_r\|} \ ,$$

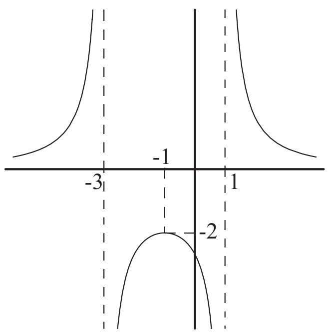
on R és qualsevol punt de la recta r; per exemple, podem agafar $R = (5,3,-3)$; llavors, $\overrightarrow{PR} = (4,3,-1)$ i el producte vectorial és

$$\overrightarrow{PR} \times v_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-7,10,2) \ .$$

Així,

$$d(P,r) = \frac{\|(-7,10,2)\|}{\|(2,2,-3)\|} = \frac{\sqrt{153}}{\sqrt{17}} = \sqrt{9} = 3 \ .$$

3.- Determineu el valor dels paràmetres a, b i c perquè la gràfica de la funció $f(x) = \dfrac{a}{x^2+bx+c}$ sigui la següent:



[2 punts]

Solució

És evident que la funció té dues asímptotes verticals, $x = -3$ i $x = 1$. Això vol dir que el denominador de la funció s'ha d'anul·lar per aquests valors. Arribem, doncs, al sistema

$$\left.\begin{array}{r} 9 - 3b + c = 0 \\ 1 + b + c = 0 \end{array}\right\}$$

que té per solució $b = 2$, $c = -3$.

També es pot resoldre aquest troç de la qüestió adonant-se'n que el denominador ha de ser

$$(x+3)(x-1) = x^2 + 2x - 3 \ .$$

Ara solament cal fer passar la funció pel punt $(-1,-2)$.

$$f(-1) = -2 \iff \frac{a}{(-1)^2 + 2(-1) - 3} = -2 \iff a = 8 \ .$$

Així el valor dels paràmetres és $a = 8$, $b = 2$, $c = -3$.

Observem que no hem utilitzat en cap moment que el punt $(-1,-2)$ és un màxim relatiu de la funció. Si es vol, es pot comprovar que efectivament és així.

$$f'(x) = -\frac{16(1+x)}{(x^2 + 2x - 3)^2} \Longrightarrow f'(-1) = 0 \ .$$

A més a més, $f'(x) > 0$ si $-3 < x < -1$ i $f'(x) < 0$ si $-1 < x < 1$.

4.- Siguin A, B i C matrius quadrades d'ordre n.

(a) ***Expliqueu raonadament si és possible que*** $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$ ***i*** $\det(A \cdot B) = 0$. ***Si és possible, poseu-ne un exemple.***

(b) ***Si sabem que*** $\det A \neq 0$ ***i*** $A \cdot B = A \cdot C$, ***expliqueu raonadament si podem assegurar que*** $B = C$.

[1 punt per apartat]

Solució

(a) Una de les propietats dels determinants ens assegura que $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$. Per tant, la situació proposada és impossible.

(b) Quan $\det A \neq 0$ podem assegurar que la matriu és invertible. Per tant,

$$A \cdot B = A \cdot C \iff A^{-1}(A \cdot B) = A^{-1}(A \cdot C) \iff (A^{-1} \cdot A)B = (A^{-1} \cdot A)C \iff B = C \ .$$

5.- Siguin r i s dues rectes d'equacions

$$r : (x, y, z) = (-4, 3, 4) + t(2, -1, 1) \ , \qquad s : x + 1 = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-a}{3}.$$

(a) ***Trobeu el valor del paràmetre a perquè aquestes rectes es tallin.***

(b) ***En el cas en què es tallen, trobeu l'equació general (és a dir, de la forma*** $Ax + By + Cz + D = 0$***) del pla que les conté.***

[1,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) Els vectors directors respectius de les rectes són $v_r = (2,-1,1)$ i $v_s = (1,-1,3)$. Com que no són proporcionals, les dues rectes es creuen o es tallen. Així doncs, busquem el valor del paràmetre a perquè es tallin. Hi ha vàries maneres de trobar aquest valor. Entre elles, per exemple, podem utilitzar les equacions paramètriques de la recta r per substituir el valor de x, y i z a la recta s.

$$(x, y, z) = (-4, 3, 4) + t(2, -1, 1) \iff x = -4 + 2t, \ y = 3 - t, \ z = 4 + t \ .$$

Llavors, utilitzant la primera igualtat de s,

$$x + 1 = \frac{y-2}{-1} \Longrightarrow (-4 + 2t + 1) \cdot (-1) = 3 - t - 2 \iff t = 2 \ .$$

El punt de tall, si existeix, és $P = (0, 1, 6)$. Agafant ara la segona de les igualtats que defineix s,

$$\frac{1-2}{-1} = \frac{6-a}{3} \iff a = 3 \ .$$

Per tant,

- Si $a \neq 3$ les rectes es creuen.
- Si $a = 3$ les rectes es tallen.

Naturalment, aquest apartat es pot resoldre utilitzant el mètode genèric per trobar la posició relativa de dues rectes a l'espai. Així, cal trobar el rang de la matriu que té per columnes (o per files) els vectors $\overrightarrow{PQ}$, v_r i v_s, i el rang de la matriu formada pels dos últims vectors. Siguin $P = (-4, 3, 4)$ i $Q = (-1, 2, a)$. Llavors, les matrius sobre les que hem de treballar són

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ a-4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \ .$$

Perquè les dues rectes es tallin, cal que rang A = rang $B = 2$. Com que és evident que rang $B = 2$, solament cal imposar que $\det A = 0$.

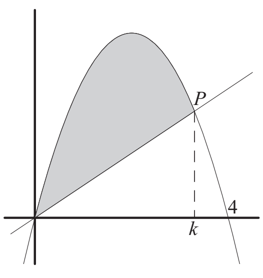
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ a-4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - a \ .$$

O sigui, les rectes es tallen si i sol si $a = 3$.

(b) Per a $a = 3$ els vectors v_r i v_s generen el pla que, si passa pel punt $(-4, 3, 4)$ (i també per $(0, 1, 6)$, per exemple), conté les dues rectes. L'equació general del pla és

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & x+4 \\ -1 & -1 & y-3 \\ 1 & 3 & z-4 \end{vmatrix} = 0 \iff -2x - 5y - z + 11 = 0 \ .$$

6.- En la figura es mostra la corba $y = x(4-x)$ i una recta r que passa per l'origen i talla la corba en un punt P d'abscissa k, amb $0 < k < 4$.



(a) ***Trobeu l'àrea ombrejada, delimitada per la corba i la recta, en funció de k.***

(b) ***Trobeu per a quin valor de k l'àrea de la regió ombrejada és la meitat de l'àrea del recinte limitat per la corba i l'eix OX.***

[1 punt per apartat]

Solució

(a) El punt P de la gràfica té per coordenades $P = (k, 4k - k^2)$. Llavors, l'àrea demanda en aquest primer apartat és l'àrea del recinte que tanca la corba des de $x = 0$ fins a $x = 4$ menys l'àrea del triangle format pels punts $(0, 0)$, $(k, 0)$ i P, que té com a base el valor k i com a altura el valor $4k - k^2$.

$$A = \int_0^k (4x - x^2)dx - \frac{k(4k - k^2)}{2} = \frac{6k^2 - k^3}{3} - \frac{4k^2 - k^3}{2} = \frac{k^3}{6} \ .$$

També és correcte plantejar l'area com la del recinte limitat per la corba i la recta d'equació $y = (4-k)x$ (recta que passa per l'origen i el punt P):

$$A = \int_0^k (4x - x^2 - 4x + kx)dx = \int_0^k (kx - x^2)dx = \left[\frac{kx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^k = \frac{k^3}{6} \ .$$

(b) La corba talla a l'eix OX en els punts on $x = 0$ i $x = 4$. L'àrea del recinte limitat per la corba i l'eix és

$$\int_0^4 (4x - x^2)dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{32}{3} \ .$$

Així, volem que $\dfrac{k^3}{6} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{32}{3} = \dfrac{16}{3}$. La solució d'aquesta equació és $k = \sqrt[3]{32} = 2\sqrt[3]{4}$.