SÈRIE 1

1.- Donada la recta r: $\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$ **:**

(a) Trobeu-ne un vector director.

(b) Calculeu l'equació contínua de la recta que és paral·lela a r ***i que passa pel punt*** $P = (1, 0, -1)$.

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) El vector director de la recta r es pot trobar de diferents maneres. Potser la més senzilla és efectuar el producte vectorial dels vectors normals dels plans que la defineixen. És a dir, si

$$v_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -i + j + k = (-1, 1, 1)\,,$$

v_r és vector director de la recta r.

<u>Altres formes de buscar el vector director:</u>

- Resolent el sistema de dues equacions amb tres incògnites que defineix la recta, arribem, per exemple, a que $y = -5 - x$ i $z = -1 - x$. Això ens porta a les equacions paramètriques de la recta,
$$x = \lambda\,; \quad y = -5 - \lambda\,; \quad z = -1 - \lambda\,.$$
Així, el vector director és $v_r = (1, -1, -1)$, els coeficients del paràmetre λ.

- Les igualtats $y = -5 - x$ i $z = -1 - x$ es poden transformar en $x = -1 - z = -5 - y$, d'on l'equació contínua de r és
$$\frac{x - 0}{1} = \frac{y + 5}{-1} = \frac{z + 1}{-1}\,.$$
El vector director és $v_r = (1, -1, -1)$.

- El vector director de r ha de ser ortogonal als vectors normals dels plans que determinen la recta. Busquem, doncs, (a, b, c) tal que $(a, b, c) \cdot (2, -1, 3) = 0$ i $(a, b, c) \cdot (1, 0, 1) = 0$. D'aquí, $2a - b + 3c = 0$ i $a + c = 0$. La solució d'aquest sistema és, per exemple, $b = -a$, $c = -a$. Per tant, el vector director buscat és de la forma $v_r = (a, -a, -a)$. Qualsevol valor no nul de a ens dóna un vector director.

(b) L'equació contínua de la recta buscada és $\dfrac{x - 1}{-1} = \dfrac{y - 0}{1} = \dfrac{z + 1}{1}$.

2.- Si tenim la matriu invertible A ***i l'equació matricial*** $X \cdot A + B = C$**:**

(a) Aïlleu la matriu X.

(b) Trobeu la matriu X ***quan***

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{\textit{i}} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Tenim que $X \cdot A + B = C \Longrightarrow X \cdot A = C - B \Longrightarrow X = (C - B) \cdot A^{-1}$.

(b) Com que

$$C - B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

ens queda

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Evidentment, també es pot resoldre aquest apartat posant $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ i plantejant el sistema

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3.- Definim les funcions $f(x) = a(1 - x^2)$ i $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{a}$, en què $a > 0$.

(a) Comproveu que l'àrea del recinte limitat per les gràfiques de les funcions és

$$\frac{4(1 + a^2)}{3a}.$$

(b) Busqueu el valor del paràmetre a perquè aquesta àrea sigui mínima.

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Cal buscar els punts d'intersecció de les dues gràfiques. El valor de l'abscissa en un punt d'intersecció és la solució de l'equació $f(x) = g(x)$; és a dir,

$$a(1 - x^2) = \frac{x^2 - 1}{a}.$$

D'aquí ens queda $(a^2 + 1)(1 - x^2) = 0$. Com que $a^2 + 1$ no és zero per cap valor del paràmetre a, tenim $x = \pm 1$.

Llavors, tenint en compte que en l'interval $[-1, 1]$ es compleix que $f(x) > g(x)$ ja que

$$f(0) = a > g(0) = -\frac{1}{a}, \quad \text{per ser} \quad a > 0,$$

és clar que l'àrea buscada és

$$A = \int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))\,, dx = \int_{-1}^{1} \left(a(1 - x^2) - \frac{x^2 - 1}{a} \right) dx = \int_{-1}^{1} \frac{(a^2 + 1)(1 - x^2)}{a}\, dx$$

$$= \frac{(a^2 + 1)}{a} \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \frac{4(1 + a^2)}{3a}.$$

(b) Definim la funció $h(a) = \dfrac{4(1 + a^2)}{3a}$. Perquè el seu valor sigui mínim cal que la primera derivada sigui nul·la. Com que

$$Dh(a) = \frac{4(a^2 - 1)}{3a^2},$$

els valors "candidats" a donar un màxim o un mínim són $a = 1$ i $a = -1$. A l'enunciat ens diuen que $a > 0$. Per tant, l'únic valor possible és $a = 1$. A més a més, és fàcil veure que

$$D^2h(a) = \frac{8}{3a^3} \quad \text{i, per tant,} \quad D^2h(1) = \frac{8}{3} > 0.$$

És a dir, es tracta d'un mínim, tal com es volia.

Si es vol, l'estudi de si en $a = 1$ hi ha realment un mínim es pot realitzar buscant els signes de la primera derivada abans i després d'aquest valor:

$$Dh(0{,}5) = \frac{4(0{,}5^2 - 1)}{3(0{,}5)^2} = -4 < 0\,; \quad Dh(1{,}5) \simeq 0{,}74 > 0\,.$$

Com que la funció derivada és negativa a l'esquerra (funció decreixent) i positiva a la dreta (funció creixent), en $a = 1$ hi ha un mínim.

4.- Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{rcl} x + 2y - az &=& -3 \\ 2x + (a-5)y + z &=& 4a+2 \\ 4x + (a-1)y - 3z &=& 4 \end{array}\right\}$$

(a) Calculeu els valors del paràmetre a perquè el sistema no sigui compatible determinat.

(b) Hi ha algun valor de a per al qual $x = 1$, $y = -3$, $z = -1$, sigui l'única solució del sistema?

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Com que la matriu del sistema és quadrada d'ordre 3, els valors del paràmetre que fan que el sistema no sigui compatible determinat són aquells que anul·len el seu determinant.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -a \\ 2 & a-5 & 1 \\ 4 & a-1 & -3 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -a \\ 0 & a-9 & 2a+1 \\ 0 & a-9 & 4a-3 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} a-9 & 2a+1 \\ a-9 & 4a-3 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} \begin{vmatrix} a-9 & 2a+1 \\ 0 & 2a-4 \end{vmatrix} = (a-9)(2a-4)\,.$$

Les operacions elementals fetes a cada pas han estat:

(1) $F_2 - 2F_1$; $F_3 - 4F_1$. (2) Desenvolupament per la primera columna. (3) $F_2 - F_1$.

Com que $\det A = 0$ si i sol si $a = 2$ o $a = 9$, aquest són els valors per als quals el sistema no és compatible determinat.

Aquest estudi es pot fer també escalonant la matriu ampliada (o inclús sense ampliar) del sistema,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -a & | & -3 \\ 2 & a-5 & 1 & | & 4a+2 \\ 4 & a-1 & -3 & | & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -a & | & -3 \\ 0 & a-9 & 2a+1 & | & 4a+8 \\ 0 & a-9 & 4a-3 & | & 16 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -a & | & -3 \\ 0 & a-9 & 2a+1 & | & 4a+8 \\ 0 & 0 & 2a-4 & | & 8-4a \end{pmatrix}.$$

Els valors que fan que $\operatorname{rang} A \neq 3$ són, evidentment, $a = 2$ i $a = 9$.

(b) Quan $x = 1$, $y = -3$ i $z = -1$, el sistema es transforma en

$$\left.\begin{array}{rcl} 1 - 6 + a &=& -3 \\ 2 - 3(a-5) - 1 &=& 4a+2 \\ 4 - 3(a-1) + 3 &=& 4 \end{array}\right\}.$$

Les tres equacions donen el mateix valor per al paràmetre: $a = 2$. És molt important comprovar que a les tres equacions surt el mateix valor de a; si no es comprova, l'apartat està mal resolt.

Per tant, quan $a = 2$, els valors proposats formen una solució del sistema. Ara bé, a l'apartat anterior hem vist que per $a = 2$ el sistema no és compatible determinat. Això vol dir que per a $a = 2$ el sistema és compatible indeterminat.

En definitiva, no existeix cap valor del paràmetre a per al qual els valors proposats siguin solució única.

5.- Siguin $r_1\colon x-2 = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{1-z}{2}$ ***i*** $r_2\colon \dfrac{x+3}{2} = y+1 = \dfrac{z+1}{2}$ **.**

(a) Comproveu que r_1 ***i*** r_2 ***són perpendiculars.***

(b) Comproveu que es tallen mitjançant la determinació del punt de tall.

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Posem l'equació de la recta r_1 en forma contínua (la recta r_2 ja està donada en aquesta forma):

$$r_1\colon \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{-2}\,.$$

Els vectors directors respectius són $v_1 = (1,2,-2)$ i $v_2 = (2,1,2)$. Com que el seu producte escalar és

$$(1,2,-2)\cdot(2,1,2) = 2+2-4 = 0\,,$$

podem assegurar que els vectors són ortogonals i, per tant, les rectes r_1 i r_2 són perpendiculars.

(b) Les equacions de les rectes donen lloc a un sistema de quatre equacions lineals amb tres incògnites,

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & & & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 4 \\ x & - & 2y & & & = & -1 \\ x & & & - & z & = & -2 \end{array}\right\}.$$

De la primera equació, $y = 2x-1$; substituint aquest valor a les altres tres equacions obtenim

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 2x & + & z & = & 5 \\ -3x & & & = & -3 \\ x & - & z & = & -2 \end{array}\right\}$$

La segona equació d'aquest sistema reduït ens porta a què $x = 1$. Llavors, les altres dues equacions són equivalents, amb solució $z = 3$. Així, les rectes es tallen i el punt de tall és el $(1,1,3)$.

També es pot comprovar que les rectes es tallen trobant el rang de les matrius $(v_r\ v_s)$ i $(v_r\ v_s\ \overrightarrow{PQ})$, on $P = (2,3,1)$ és un punt de la recta r_1 i $Q = (-3,-1,-1)$ és un punt de la recta r_2. Per tal que es tallin, cal que el rang de les dues matrius sigui 2. Aquest mètode <u>no</u> és el que es demana a l'enunciat i, a més a més, no ens dóna el punt de tall, que encara hauríem de calcular.

6.- Sigui $f(x) = x^2e^{-ax}$ ***, quan*** $a \neq 0$ **.**

(a) Calculeu el valor de a ***perquè aquesta funció tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa*** $x = 2$ **.**

(b) Quan $a = 2$***, classifiqueu-ne els extrems relatius.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) La condició necessària perquè una funció tingui un extrem relatiu en un punt és que la primera derivada en ell valgui zero. Busquem la primera derivada de la funció $f(x)$.

$$Df(x) = 2xe^{-ax} + x^2(-ae^{-ax}) = e^{-ax}(2x-ax^2)\,.$$

Llavors, $Df(x) = 0$ si i sol si $x = 0$ o $x = 2/a$ ja que la funció exponencial és sempre diferent de zero. Si volem que la funció tingui un extrem relatiu en $x = 2$, cal que $a = 1$.

NOTA: De fet és necessari encara comprovar que $D^2f(2) \neq 0$. Com que $D^2f(x) = e^{-ax}(2-4ax+a^2x^2)$, és clar que per $a = 1$ el valor de $D^2f(2)$ no és zero.

(b) Podem aprofitar la feina feta a l'apartat anterior: quan $a = 2$, tenim que la funció pot tenir extrems en $x = 0$ i en $x = 2/2 = 1$.

D'altra banda, quan $a = 2$, $D^2f(x) = e^{-2x}(2 - 8x + 4x^2)$. Com que $D^2f(0) = 2 > 0$, en el punt d'abscissa $x = 0$ hi ha un mínim; així mateix la desigualtat $D^2f(1) = -2e^{-2} < 0$ ens diu que en el punt d'abscissa $x = 1$ hi ha un màxim.

Igual que a la qüestió 3, la classificació dels extrems es pot realitzar estudiant el signe de la derivada abans i després dels punts trobats.

SÈRIE 4

1.- Calculeu l'àrea del recinte limitat per les corbes d'equació $f(x) = x^2 - x + 2$ ***i*** $g(x) = 5 - 3x$ ***.***

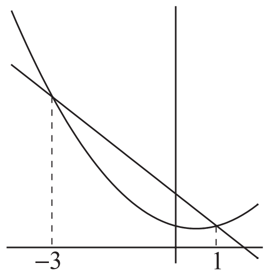
[2 punts]

Solució

Cal començar buscant les abscisses dels punts d'intersecció d'ambdues corbes. Per fer-ho, plantejem l'equació $f(x) = g(x)$,

$$f(x) = g(x) \iff x^2 - x + 2 = 5 - 3x \iff x^2 + 2x - 3 = 0 \iff x = 1 \text{ o } x = -3\,.$$

La gràfica de les dues funcions és



Com que $f(0) = 2$ i $g(0) = 5$, podem assegurar que, en l'interval que ens interessa, $g(x) \geq f(x)$. L'àrea demanada és

$$\int_{-3}^{1} (g(x) - f(x))\,dx = \int_{-3}^{1} (3 - 2x - x^2)\,dx = \left[3x - x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{1} = \left(3 - 1 - \frac{1}{3}\right) - (-9 - 9 + 9) = \frac{32}{3}\,.$$

2.- Donat el pla $\pi\colon 2x + y - z = 5$***:***

(a) Calculeu l'equació del pla paral·lel al pla π ***que passa pel punt*** $P = (1, 0, -1)$ ***.***

(b) Determineu també la distància entre el punt P ***i el pla*** π***.***

[1 punt per cada apartat]

Solució

(a) Hi ha dues maneres de trobar el pla demanat. La primera consisteix en escriure la forma general dels plans paral·lels a π, $\pi'\colon 2x + y - z + D = 0$, i trobar el valor del paràmetre D perquè passi pel punt P,

$$P \in \pi' \iff 2 \cdot 1 + 0 - (-1) + D = 0 \iff D = -3\,.$$

El pla buscat és $2x + y - z - 3 = 0$.

La segona forma consisteix en utilitzar la fórmula del pla que passa per un punt amb un vector normal conegut.

$$2(x - 1) + (y - 0) - (z + 1) = 0 \iff 2x + y - z - 3 = 0\,.$$

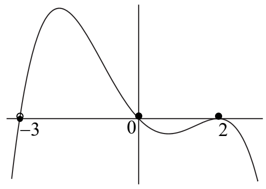
(b) La distància d'un punt $P = (x_0, y_0, z_0)$ a un pla $\pi\colon Ax + By + Cz + D = 0$ es pot calcular per la fórmula

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\,.$$

En el nostre cas,

$$d(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 + 0 - (-1) - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}\,.$$

3.- La gràfica corresponent a la derivada d'una funció $f(x)$ és la següent:



(a) Expliqueu raonadament quins valors de x corresponen a màxims o a mínims relatius de $f(x)$.

(b) Determineu els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x)$.

[1,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b]

Solució

(a) Perquè la funció $f(x)$ tingui un extrem relatiu en un punt, és necessari que la seva derivada valgui zero en aquest punt. D'acord amb la gràfica, això passa per $x = -3$, $x = 0$ i $x = 2$.

Abans del punt $x = -3$, la funció derivada és negativa i després és positiva; això vol dir que en aquest punt hi tenim un mínim relatiu.

Amb un raonament paral·lel podem comprovar que en $x = 0$ la funció $f(x)$ té un màxim relatiu i en el punt $x = 2$ no hi ha ni màxim ni mínim (la derivada és negativa als dos costats); de fet, en aquest punt hi ha un punt d'inflexió.

(b) D'acord amb els signes de la derivada,

- La funció $f(x)$ és creixent a l'interval $(-3, 0)$.
- La funció $f(x)$ és decreixent a $(-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$.

4.- Analitzeu, segons els valors del paràmetre k, el caràcter (és a dir, si és compatible o no i si és determinat o no) del sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{c} 2x + y - z = k - 4 \\ (k-6)y + 3z = 0 \\ (k+1)x + 2y = 3 \end{array}\right\}$$

[2 punts]

Solució

La matriu del sistema és quadrada. Busquem el seu determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & k-6 & 3 \\ k+1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3(k+1) - [-(k+1)(k-6) + 12] = k^2 - 2k - 15\,.$$

Busquem els valors de k perquè aquest determinant valgui zero,

$$k^2 - 2k - 15 = 0 \Longrightarrow k = -3 \quad \text{o} \quad k = 5\,.$$

També es pot realitzar aquest estudi escalonant la matriu, ampliada o no, del sistema,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & k-4 \\ 0 & k-6 & 3 & 0 \\ k+1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & k-4 \\ 0 & k-6 & 3 & 0 \\ 0 & 3-k & k+1 & 10+3k-k^2 \end{array}\right).$$

A partir d'aquí, l'escalonament es fa molt feixuc. Per això la millor forma d'acabar és veient per a quins punts les files segona i tercera de la matriu sense ampliar són proporcionals.

$$\frac{k-6}{3-k} = \frac{3}{k+1} \iff k=-3 \text{ o } k=5\,.$$

D'una o altra manera, tenim:

- Si $k \neq -3$ i $k \neq 5$, el rang de la matriu del sistema és 3; el de l'ampliada també és tres. Així, en aquest cas, el sistema és compatible determinat.
- Quan $k=-3$, escalonem la matriu ampliada del sistema,
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & -7 \\ 0 & -9 & 3 & | & 0 \\ -2 & 2 & 0 & | & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & -7 \\ 0 & -3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 3 & -1 & | & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & -7 \\ 0 & -3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -4 \end{pmatrix}.$$
Clarament, rang $A=2$ i rang $(A|b)=3$; el sistema és incompatible.
- Finalment, pel valor $k=5$,
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 3 & | & 0 \\ 6 & 2 & 0 & | & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 3 & | & 0 \\ 0 & -1 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$
Ara, rang $A = $ rang $(A|b) = 2 < 3$. El sistema és compatible indeterminat.

Observeu que si s'ha realitzat l'escalonament de la matriu, l'estudi dels casos $k=-3$ i $k=5$ se simplifiquen, substituint el valor de la k a la matriu que ja està mig escalonada.

5.- Trobeu l'equació general (o sigui de la forma $Ax+By+Cz+D=0$***) dels plans que contenen la recta*** $r: \begin{cases} y=2 \\ z=1 \end{cases}$ ***i formen un angle de*** 45^o ***amb el pla*** $z=0$***.***

[2 punts]

Solució 1

Qualsevol punt de la forma $P=(a,2,1)$ pertany a la recta r. Per simplicitat, agafarem $P=(0,2,1)$. El vector director de la recta és $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,0,0)$. El vector normal del pla $z=0$ és $v_z=(0,0,1)$.

Si el pla buscat és $\pi' : Ax+By+Cz+D=0$, tenim que el seu vector normal és $v_{\pi'}=(A,B,C)$. Com que conté la recta r, sabem que $v_{\pi'}$ és perpendicular a v_r; per formar 45^o amb el pla $z=0$ cal que $\cos(\widehat{v_{\pi'},v_z}) = \sqrt{2}/2$. És a dir,

$$v_{\pi'}\cdot v_r = (A,B,C)\cdot(1,0,0) = A = 0\ ; \qquad \frac{v_{\pi'}\cdot v_r}{\|v_{\pi'}\|\cdot\|v_z\|} = \frac{(0,B,C)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{B^2+C^2}\cdot 1} = \frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La solució és $A=0$, $B^2=C^2$ ($\iff$ $C=B$ o $C=-B$). Podem posar, sense perdre generalitat, $B=1$. Així, tenim dos plans que compleixen les condicions, $y+z=D_1$ i $y-z=D_2$. Fent que passin pel punt P (condició perquè continguin la recta r), ens queda

$$y+z=3\,, \qquad y-z=1\,.$$

Solució 2

La qüestió es pot resoldre també utilitzant l'equació del feix de plans que passa per la recta r,

$$(y-2)+\lambda(z-1)=0\,.$$

El vector director d'un pla qualsevol d'aquest feix és $v_\pi = (0, 1, \lambda)$. Llavors, s'ha de complir que

$$\frac{(0,1,\lambda)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{1+\lambda^2}\cdot 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ .$$

Aquesta equació ens porta a que $\lambda = \pm 1$. Llavors, els plans buscats són:

- Per $\lambda = 1$, $(y-2)+(z-1)=0$; és a dir, $y+z=3$.
- Per $\lambda = -1$, $(y-2)-(z-1)=0$; per tant, $y-z=1$.

6.- Dins d'un triangle rectangle, de catets 3 i 4 cm, hi ha un rectangle. Dos costats del rectangle estan situats en els catets del triangle i un dels vèrtex del rectangle és a la hipotenusa del triangle.

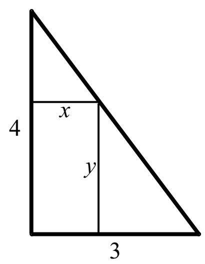
(a) Feu un esbós de la situació descrita.

(b) Si x és la longitud del costat del rectangle que està situat en el catet petit i y és l'altre costat del rectangle, comproveu que es compleix que $4x + 3y = 12$.

(c) Determineu les dimensions del rectangle perquè la seva àrea sigui màxima.

[2 punts]

(a) La gràfica de la situació és



(b) Per semblança de triangles, $\dfrac{4}{3} = \dfrac{4-y}{x}$. És a dir, $4x+3y=12$. Hi ha altres relacions de semblança que ens porten a la mateixa relació; per exemple, $\dfrac{4}{3} = \dfrac{y}{3-x}$.

També es pot arribar a la relació entre x i y utilitzant geometria en el pla. En efecte, podem considerar com a eixos de coordenades les rectes que contenen els catets. Llavors, la recta que conté la hipotenusa passa pels punts $(3,0)$ i $(0,4)$; per tant, la seva equació és

$$\frac{x-3}{0-3} = \frac{y-0}{4-0}\,, \quad \text{és a dir,} \quad 4x+3y=12\,.$$

Com que el punt (x,y) pertany a aquesta recta, ha de complir la seva equació.

(c) De la relació trobada a l'apartat anterior se'n dedueix, per exemple, que $y = \dfrac{12-4x}{3}$. Llavors, l'àrea del rectangle és

$$A = x\cdot y = x\cdot\frac{12-4x}{3} = \frac{12x-4x^2}{3}\,.$$

Per tenir un valor màxim, cal que la primera derivada sigui nul·la.

$$A' = \frac{12-8x}{3}\,; \quad A'=0 \iff 12-8x=0 \iff x=\frac{3}{2}\,.$$

Llavors, $y = \dfrac{12-4(3/2)}{3} = 2$. Les dimensions del rectangle buscat són $3/2$ de base i 2 d'altura.