Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2011-2012

Matemàtiques

Sèrie 3

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Digueu per a quin valor del paràmetre m els plans

$$\pi_1: x-y+mz=1,\ \pi_2: x-y+z=m \text{ i } \pi_3: my+2z=3$$

tenen com a intersecció una recta.

[2 punts]

2. Donades la recta $y=3x+b$ i la paràbola $y=x^2$,

a) Calculeu l'abscissa del punt on la recta tangent a la paràbola és paral·lela a la recta donada.

b) Calculeu el valor del paràmetre b perquè la recta sigui tangent a la paràbola.

[1 punt per apartat]

3. Donats el pla $\pi: x-y+2z-5=0$ i la recta $r: \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=10 \end{cases}$,

a) Calculeu el punt d'intersecció entre el pla i la recta.

b) Trobeu l'equació contínua de la recta s continguda en el pla π, que és perpendicular a la recta r i talla la recta r.

[1 punt per apartat]

4. Donades les matrius $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,

a) Comproveu que es compleix la igualtat $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\,(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$.

b) És certa aquesta igualtat per a qualsevol parell de matrius quadrades $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ del mateix ordre? Responeu raonadament utilitzant les propietats generals de les operacions entre matrius, sense utilitzar matrius $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ concretes.

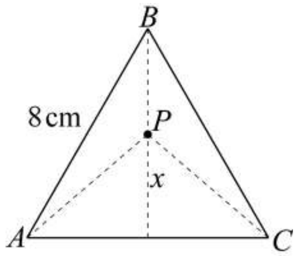
[1 punt per apartat]

5. Un triangle equilàter de vèrtexs A, B i C té els costats de 8 cm. Situem un punt P sobre una de les altures del triangle, a una distància x de la base corresponent.

a) Calculeu l'altura del triangle de vèrtexs A, B i C.

b) Indiqueu la distància del punt P a cadascun dels vèrtexs (en funció de x).

c) Determineu el valor de x perquè la suma dels quadrats de les distàncies del punt P a cadascun dels tres vèrtexs sigui mínima.



[0,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*; 1 punt per l'apartat *c*]

6. Donats els punts $P=(1, 0, 0)$, $Q=(0, 2, 0)$, $R=(0, 0, 3)$ i $S=(1, 2, 3)$,

a) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma $Ax+By+Cz+D=0$) del pla que conté els punts P, Q i R.

b) Comproveu si els quatre punts són coplanaris (és a dir, si els quatre estan continguts en un mateix pla).

[1 punt per apartat]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2011-2012

Matemàtiques

Sèrie 1

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

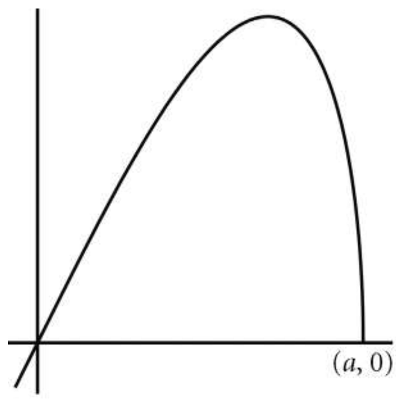
1. Donats els plans $\pi_1: 3x+y-2z+15=0$ i $\pi_2: x+y+2z-103=0$,

a) Comproveu que són perpendiculars.

b) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma $Ax+By+Cz+D=0$) del pla perpendicular a π_1 i π_2, que passa pel punt $P=(1, 3, 2)$.

[1 punt per cada apartat]

2. La gràfica de la funció $f(x)=x\sqrt{9-x^2}$ és la següent:



a) Trobeu el punt de tall, $(a, 0)$, de la funció amb la part positiva de l'eix OX.

b) Calculeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de $f(x)$ i l'eix OX en el primer quadrant.

[0,5 punts per l'apartat *a*; 1,5 punts per l'apartat *b*]

3. Sigui $\boldsymbol{A}$ una matriu quadrada d'ordre n de manera que $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{O}$, en què $\boldsymbol{O}$ és la matriu nul·la (la formada completament per zeros).

a) Comproveu que $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n)^2 = 2\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n$.

b) Comproveu que les matrius $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n$ són l'una inversa de l'altra.

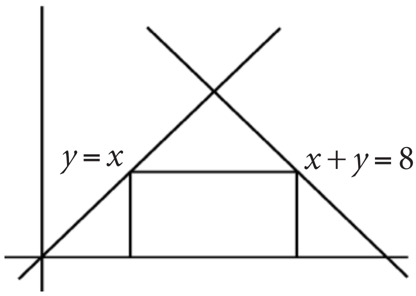
[1 punt per cada apartat]

4. Un rectangle és inscrit en el triangle que té els costats en les rectes d'equacions

$$y = x, \quad x + y = 8, \quad y = 0,$$

i té un costat sobre la recta $y = 0$. Trobeu-ne els vèrtexs perquè la superfície sigui màxima.

[2 punts]



5. Contesteu les preguntes següents:

a) Expliqueu raonadament si una matriu d'ordre 3 i una matriu d'ordre 2 poden tenir el mateix determinant.

b) Considereu les matrius següents:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & p \\ 1 & 1-p & 2 \\ 1 & 2 & p \end{pmatrix} \text{ i } \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & p \\ 0 & p & 4 \end{pmatrix}$$

Calculeu, si és possible, el valor del paràmetre p perquè $\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{B}$.

[1 punt per cada apartat]

6. Siguin $\pi: x - 3y + 2z = 1$ i $r: \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - y + mz = 1 \end{cases}$. Estudieu-ne la posició relativa segons el valor del paràmetre m.

[2 punts]

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés