

Proves d'accés a la universitat

Convocatòria 2015

Matemàtiques

Sèrie 2

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\left. \begin{array}{l} -3x + 2y + 3z = 0 \\ (a - 2)y - 3z = 0 \\ -x - y + (-a - 3)z = 0 \end{array} \right\}$$

a) Calculeu per a quins valors del paràmetre a el sistema té més d'una solució.

[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al cas $a = -3$.

[1 punt]

2. Sigui r la recta de l'espai que té per equació $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = z$ i sigui P el punt de coordenades $(6, 0, -1)$.

a) Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que passa pel punt P i talla perpendicularment la recta r .

[1 punt]

b) Trobeu l'equació paramètrica del pla que passa pel punt P i conté la recta r .

[1 punt]

3. Responeu a les qüestions següents:

a) Determineu l'equació de la recta tangent a la corba $y = x^3$ en el punt d'abscissa $x = 2$.

[1 punt]

b) Calculeu l'àrea de la regió plana finita limitada per la corba $y = x^3$ i la recta $y = 3x - 2$.

[1 punt]

4. Considereu a \mathbb{R}^3 la recta que té per equació $r: (x, y, z) = (-4 + 2\lambda, -2, 1 - \lambda)$ i els plans π_1 i π_2 d'equacions $\pi_1: x + 2y + 2z = -1$ i $\pi_2: x - 2y + 2z = -3$, respectivament.

a) Determineu la posició relativa de π_1 i π_2 .

[1 punt]

b) Comproveu que tots els punts de la recta r estan situats a la mateixa distància dels plans π_1 i π_2 .

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ amb l'expressió } \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

5. Responen a les qüestions següents:

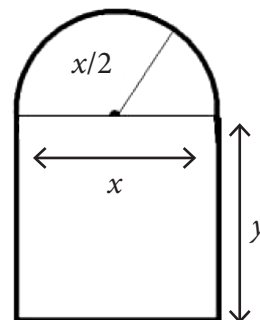
a) Calculeu la matriu de la forma $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ que satisfà $A^2 - A = I$, en què I és la matriu identitat, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[1 punt]

b) Calculeu A^{-1} i comproveu que el resultat es correspon amb el que obteniu de deduir la matriu A^{-1} a partir de la igualtat $A^2 - A = I$.

[1 punt]

6. La portalada d'una catedral està formada, en la part superior, per un arc de mitja circumferència que recolza sobre dues columnes, com il·lustra la figura adjunta, en què x és el diàmetre de la circumferència, és a dir, la distància entre columnes, i y és l'alçària de cada columna.



a) Comproveu que la funció $f(x, y) = \frac{\pi x^2}{8} + xy$ determina l'àrea d'aquesta portalada.

[1 punt]

b) Si el perímetre de la portalada fa 20 m, determineu les mides x i y de la portalada que en maximitzen l'àrea.

[1 punt]



Institut
d'Estudis
Catalans

Proves d'accés a la universitat

Convocatòria 2015

Matemàtiques

Sèrie 4

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Considereu el sistema d'equacions
$$\left. \begin{array}{l} x - 2y - z = 0 \\ -mx + 3y + z = 0 \\ x + y = 4 \end{array} \right\}$$
, en què m és un paràmetre real.
- a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre m .
[1 punt]
- b) Resoleu el sistema per a $m = 1$.
[1 punt]
2. Sigui la funció $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.
- a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x = 1$.
[1 punt]
- b) Calculeu les abscisses dels punts de la gràfica en què hi ha un mínim relatiu, un màxim relatiu o una inflexió.
[1 punt]
3. Sigui el punt $P = (2, 0, 2)$ i el pla π d'equació $x - y + z = 1$.
- a) Calculeu l'equació paramètrica de la recta que passa pel punt P i és perpendicular al pla π .
[1 punt]
- b) Calculeu la distància del punt P al pla π .
[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ amb l'expressió } \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

4. Sigui f la funció $f(x) = x \cdot \sin(x)$. Calculeu la primitiva de la funció f que passa pel punt $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ (unitats en radians).

[2 punts]

5. Sigui A una matriu quadrada que compleix que $A^3 = I$, en què I és la matriu identitat,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Demostreu que la matriu A té inversa i que $A^{-1} = A^2$.

[1 punt]

- b) En el cas de $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, calculeu si hi ha cap valor del paràmetre a per al qual $A^3 = I$.

[1 punt]

6. Siguin a \mathbb{R}^3 el punt $P = (2, 3, 3)$ i la recta $r: (x, y, z) = (1, 2, 3) + t(1, 1, 1)$.

- a) Calculeu l'equació paramètrica del pla que passa pel punt P i conté la recta r .

[1 punt]

- b) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que passa pel punt P i és perpendicular a la recta r .

[1 punt]



Institut
d'Estudis
Catalans