SÈRIE 2

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

Criteris generals per a la correcció:

1. En tots els casos la resolució que fa l'estudiant s'ha de poder seguir i comprendre els passos que fa. **Aquelles respostes, parcials o totals, que no estiguin desenvolupades o no es pugui seguir com s'ha arribat a donar la resolució seran puntuades amb 0 punts.**

2. La resolució proposada és, en alguns casos, una de les possibles i no és, en principi, única. Per tant, **sempre que l'enunciat ho permeti, en el cas que l'estudiant respongui amb una resolució alternativa totalment correcta se li assignarà el total de puntuació de l'apartat.** Si la resposta és parcial la puntuació obtinguda serà proporcional a la part corresponent de la puntuació total.

3. En alguns casos, la solució final pot admetre **expressions equivalents**. En aquests casos la puntuació serà la totalitat de la puntuació de l'apartat.

4. Tots els exercicis, apartats i passos dins d'un apartat es valoraran amb múltiples de 0,25 punts.

5. **Penalització per errades de càlcul o transcripció:**

- Si l'errada que es comet no té més transcendència, aleshores NO es descomptarà res de la puntuació parcial de l'apartat.
- En el cas que l'errada condueixi a derivacions paral·leles de l'enunciat, es valorarà i puntuarà el desenvolupament i coherència de la resolució resultant, i només s'aplicarà una penalització final de 0,25 punts.
- En cas que l'errada condueixi a no tenir sentit alguna de les qüestions que es demanen, aleshores la puntuació màxima de l'apartat serà de 0,75 punts.
- Si la resolució d'un apartat conté dues errades la puntuació de l'apartat serà l'acumulada fins al moment previ al cometre la segona errada.

1. Considereu el pla $\pi: x + y + z = 1$ i la recta r que passa pels punts $P = (0, 0, 6)$ i $Q = (1, 2, 3)$.

a) Estudieu la posició relativa de la recta r i el pla π.
[1 punt]

b) Calculeu la distància entre la recta r i el pla π.
[1 punt]

Nota: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0, \mathrm{z}_0)$ al pla d'equació $\mathrm{Ax} + \mathrm{By} + \mathrm{Cz} + \mathrm{D} = 0$ amb l'expressió $\frac{|\mathrm{Ax}_0+\mathrm{By}_0+\mathrm{Cz}_0+\mathrm{D}|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}}$.

Resolució:

a)

El producte escalar entre el vector normal al pla $\vec{n} = (1, 1, 1)$ i el vector $\overrightarrow{PQ} = (1, 2, -3)$ és 1 + 2 – 3 = 0, per tant, la recta és paral·lela al pla o hi està continguda. Només cal veure que el punt P o el punt Q no estan en el pla per concloure que són paral·lels.

L'estudi d'aquesta posició relativa es pot fer d'altres maneres:

- Passant la recta a forma general es facilita l'estudi del sistema format per les tres equacions, que condueix a veure el paral·lelisme entre la recta i el pla.
- Passant la recta a forma paramètrica, la intersecció amb el pla mostra que no hi ha solució, fet que mostra el paral·lelisme entre la recta i el pla.

b) Atès que la recta i el pla són paral·lels, per a calcular la distància entre ambdós n'hi ha prou a considerar un punt de la recta i calcular la seva distància al pla. Un punt de la recta és, per exemple, el punt $P = (0,0,6)$, i la distància demanada és:

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = d(P = (0,0,6), \pi: x + y + z - 1 = 0) =$$
$$= \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 6 - 1|}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3} = 2{,}887\ u}$$

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts pel vector normal al pla.
0,25 punts pel vector director de la recta.
0,25 punts pel producte escalar i concloure el paral·lelisme.
0,25 punts pel paral·lelisme estricte.

b)
0,25 punts per la formulació a partir d'un punt de la recta.
0,5 punts per la correcta aplicació de la fórmula.
0,25 punts pel càlcul final (sigui racionalitzat o no o amb expressió decimal).

2. Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Comproveu que satisfan la igualtat $A^2 - \frac{1}{2}A \cdot B = I$, en què I és la matriu identitat d'ordre 3.
[1 punt]

b) Fent servir la igualtat anterior, trobeu la matriu inversa d'A: A^{-1}.
[1 punt]

Resolució:

a) Només cal fer les operacions.

$$A^2 - \frac{1}{2}A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Traient factor comú *A* per l'esquerra: $A \cdot \left(A - \frac{1}{2}B\right) = I$, així que $A^{-1} = A - \frac{1}{2}B$.

Operant, deduïm que $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 3/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}}$.

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts pel càlcul d'A^2.
0,25 punts pel càlcul d'AB
0,5 punts pel càlcul final.

b)
0,25 punts per la descomposició factorial.
0,25 punts per identificar la inversa.
0,5 punts pel càlcul final (factoritzat o no).

3. Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + ay = 2a \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre real *a*.
[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al cas *a* = 2.
[1 punt]

Resolució:

a)

La matriu de coeficients i l'ampliada, A i A', són les següents:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2a \end{matrix} \end{array}\right)}_{A'}$$

Calculem quan det(A) = 0

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \end{vmatrix}$ = 2*a* – 4, que s'anul·la només per *a* = 2. Així doncs, tenim dos casos:

$\boxed{\text{CAS } a = 2}$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{matrix} \end{array}\right)}_{A'}$$

S'observa que les dues primeres columnes són iguals. Per tant, tots els menors que les incloguin valdran zero. A més, el determinant

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$ també val zero, per tant, rang(A') < 3. Com que el menor d'A $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, aleshores rang($A$) = rang($A'$) = 2 < 3 nombre d'incògnites i, per tant, $\boxed{\text{és un SCI amb 1 (=3-2) grau de llibertat.}}$

$\boxed{\text{CAS } a \neq 2.}$ rang(A) = rang(A') = 3 = nombre d'incògnites. Per tant, $\boxed{\text{és un SCD.}}$

b) Per al cas a = 2 sabem que es tracta d'un sistema compatible indeterminat amb una incògnita lliure i equivalent a

$$\left.\begin{aligned} x \quad - z &= 1 - y \\ x \qquad &= 2 - y \end{aligned}\right\}$$

Per tant, si agafem la incògnita y com a paràmetre, obtenim $x = 2\text{-}y$ i $z = x + y - 1 = 2 - y + y - 1 = 1$. Així la solució és de la forma $\boxed{(2 - y, y, 1)}$ per a qualsevol valor del paràmetre o variable y.

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts pel plantejament matricial.
0,25 punts pel determinant de la matriu associada i el valor crític.
0,25 punts pel cas $a = 2$.
0,25 punts pel cas $a \neq 2$.

b)
0,25 punts per al sistema reduït.
0,25 punts per l'expressió d'una primera incògnita.
0,25 punts per l'expressió de la segona incògnita.
0,25 punts per l'expressió general del SCI (tant si es deixa la x com la y com a paràmetre o incògnita lliure).

4. De les funcions $f(x)$, $f'(x)$, $g(x)$ i $g'(x)$, en coneixem els valors següents:

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	2	1
1	0	-6

x	$g(x)$	$g'(x)$
0	1	1
1	3	3

a) De la funció $f(x)$ sabem també que el pendent de la recta tangent a un punt d'abscissa x és $4x^3 - 9x^2 - 2x + 1$. Trobeu $f(x)$.
[1 punt]

b) Calculeu $(g \circ f)'(1)$.
[1 punt]

Resolució:

a)

De l'enunciat tenim que $4x^3-9x^2-2x+1$ és la funció derivada de $f(x)$. Per tant, $f(x)$ serà una primitiva de $4x^3-9x^2-2x+1$.
Calculem el conjunt de primitives de $4x^3-9x^2-2x+1$:

$$\int(4x^3-9x^2-2x+1)\,dx = x^4-3x^3-x^2+x+C$$

Sabem que $f(0) = 2$ (o que $f(1) = 0$). Per tant,

$f(0)=C=2$ i la funció buscada és $f(x)=x^4-3x^3-x^2+x+2$

Observació: L'exercici es puntuarà com a correcte tant si es fa servir només un dels dos punts (x=0 o x=1) per a determinar la constant C com si es fan servir els dos (cercant una certa coherència de les dades de l'enunciat).

b)

Aplicant la regla de la cadena per a la derivada d'una composició de funcions tenim:

$$(g\circ f)'(1)=g'(f(1))\cdot f'(1)$$

Per les taules de valors sabem que $f(1)=0$, que $f'(1) = -6$ i que $g'(0)=1$. Llavors,

$$(g\circ f)'(1)=g'(f(1))\cdot f'(1)=g'(0)\cdot f'(1)=1\cdot(-6)=-6.$$

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts per identificar que ens donen f'.
0,25 punts per l'expressió general de la primitiva.
0,25 punts pel valor de la constant d'integració.
0,25 punts per l'expressió final de $f(x)$.

b)
0,25 punts per la formulació de la regla de la cadena.
0,25 punts per $f'(1)$.
0,25 punts per $g'(0)$.
0,25 punts pel càlcul final.

5. A R^3, siguin la recta $r: \begin{cases} x - z = 2 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$ i el punt $P = (0,1,-1)$.

a) Calculeu l'equació general (és a dir, la que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla π perpendicular a la recta r i que passa pel punt P.
[1 punt]

b) Calculeu el punt simètric del punt P respecte del pla $x + y + z = -3$.
[1 punt]

Resolució:

a) π perpendicular a r té per vector normal el vector director de r : $\vec{n} = \overrightarrow{v_r} =$
$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (2,-1,2)$. I si ha de passar per $P(0,1,-1)$ $\rightarrow \pi: 2x - y + 2z = D$ $\rightarrow$
$-1 - 2 = D$ $\rightarrow D = -3$ $\rightarrow$ $\boxed{\pi: 2x - y + 2z = -3}$

b) Hem de calcular primer la recta perpendicular al pla $x + y + z = -3$ i que passa per P. El vector normal del pla, (1,1,1), serà el vector director de la recta i, per tant, la recta serà $(x, y, z) = (t, 1 + t, -1 + t)$.

Caldrà buscar ara el punt d'intersecció de la recta $(x, y, z) = (t, 1 + t, -1 + t)$ amb el pla $x + y + z = -3$.

Si substituïm un punt genèric de la recta en el pla obtenim:

$$t + 1 + t - 1 + t = -3$$
$$3t = -3$$
$$t = -1$$

Per tant, el punt intersecció és $Q = (-1,0,-2)$ i el punt simètric serà

$$P' = P + 2 \cdot \overrightarrow{PQ} = (0,1,-1) + 2 \cdot (-1,-1,-1) = \boxed{(-2,-1,-3)}$$

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts pel càlcul del vector normal al pla.
0,25 punts per la forma d'equació del pla.
0,25 punts per l'obtenció de D.
0,25 punts per l'equació general del pla.

b)
0,25 punts per l'equació de la recta perpendicular.
0,25 punts pel punt intersecció de la recta i el pla.
0,25 punts per la formulació del punt simètric.
0,25 punts pel càlcul final.

6. Sigui la funció $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

a) Calculeu una primitiva de la funció $f(x)$.
[1 punt]

b) Calculeu l'àrea limitada per la funció $f(x)$ i l'eix de les abscisses entre les abscisses $x = 0$ i $x = \frac{\pi}{4}$.
[1 punt]

Resolució:

a)

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{-dt}{t^2} = -\int t^{-2} dt = \frac{1}{t} + C = \boxed{\frac{1}{\cos x} + C}$$

La primitiva es quasi immediata o podem assajar el canvi de variable $\cos x = t$

$\cos x = t$
$-\sin x \, dx = dt$
$\sin x \, dx = -dt$

Observació: Com que a l'enunciat es demana "una" primitiva, l'exercici es donarà per ben resolt amb o sense la constant d'integració.

b) La funció sinus és positiva a l'interval $[0, \frac{\pi}{2}]$. Atès que el denominador de la funció està elevat al quadrat, és també positiu en tot l'interval. La funció és, per tant, positiva i l'àrea demanada és:

$$\text{Àrea} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \left[\!\left[\frac{1}{\cos x}\right]\!\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{\sqrt{2}/2} - 1 =$$

$$\boxed{\frac{2}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-2}{2} = 0{,}414\ u^2}$$

Pautes de correcció:

a)
0,25 punts per la formulació del canvi de variable.
0,25 punts per l'aplicació del canvi de variable.
0,25 punts per la integral directa (amb o sense la constant d'integració).
0,25 punts per desfer el canvi de variable.

b)
0,25 punts per la positivitat de l'integrand i el plantejament de la integral.
0,25 punts per la primitiva.
0,25 punts per l'aplicació de la regla de Barrow.
0,25 punts pel càlcul final (en qualsevol de les formes indicades).