

Matemàtiques

Sèrie 1

Responen a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

1. Les pàgines d'un llibre han de tenir cada una 600 cm^2 de superfície, amb uns marges al voltant del text de 2 cm a la part inferior, 3 cm a la part superior i 2 cm a cada costat. Calculeu les dimensions de la pàgina que permeten la superfície impresa més gran possible.

[2 punts]

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real k :

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ x + k^2y + 3z = 2k \\ 3x + 7y + 7z = k - 3 \end{cases}$$

- a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre k .

[1 punt]

- b) Resoleu el sistema per al cas $k = -1$.

[1 punt]

3. Un dron es troba en el punt $P = (2, -3, 1)$ i volem dirigir-lo en línia recta fins al punt més proper del pla d'equació $\pi: 3x + 4z + 15 = 0$.

- a) Calculeu l'equació de la recta, en forma paramètrica, que ha de seguir el dron. Quina distància ha de recórrer fins a arribar al pla?

[1 punt]

- b) Trobeu les coordenades del punt del pla on arribarà el dron.

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància que hi ha d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla

d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

4. Considereu la funció $f(x) = \frac{2x^3 - 5x + 4}{1 - x}$.
- a) Calculeu-ne el domini i estudeu-ne la continuïtat. Té cap asímptota vertical?
[1 punt]
- b) Observeu que $f(-2) = -\frac{2}{3}$, $f(0) = 4$ i $f(2) = -10$. Raoneu si, a partir d'aquesta informació, podem deduir que l'interval $(-2, 0)$ conté un zero de la funció. Podem deduir-ho per a l'interval $(0, 2)$? Trobeu un interval determinat per dos enters consecutius que contingui, com a mínim, un zero d'aquesta funció.
[1 punt]
5. Sigui la matriu $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.
- a) Calculeu per a quins valors del paràmetre a se satisfà la igualtat $M^2 - M - 2I = 0$, en què I és la matriu identitat i 0 és la matriu nul·la, totes dues d'ordre 2.
[1 punt]
- b) Fent servir la igualtat de l'apartat anterior, trobeu una expressió general per a calcular la matriu inversa de la matriu M i, a continuació, calculeu la inversa de M per al cas $a = \sqrt{2}$.
[1 punt]
6. Considereu les funcions $f(x) = x^2$ i $g(x) = \frac{1}{x}$, i la recta $x = e$.
- a) Feu un esbós de la regió delimitada per les seves gràfiques i l'eix de les abscisses. Calculeu les coordenades del punt de tall de $y = f(x)$ amb $y = g(x)$.
[1 punt]
- b) Calculeu l'àrea de la regió descrita en l'apartat anterior.
[1 punt]



Institut
d'Estudis
Catalans

Matemàtiques

Sèrie 4

Responen a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

1. Volem construir un marc rectangular de fusta que delimiti una àrea de 2 m^2 . Sabem que el preu de la fusta és de $7,5 \text{ €/m}$ per als costats horitzontals i de $12,5 \text{ €/m}$ per als costats verticals. Determineu les dimensions que ha de tenir el rectangle perquè el cost total del marc sigui el mínim possible. Quin és aquest cost mínim?

[2 punts]

2. Siguin la recta $r: \begin{cases} x = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$ i el pla $\pi: x - z = 3$.

a) Calculeu l'equació paramètrica de la recta que és perpendicular al pla π i que el talla en el mateix punt en què el talla la recta r .

[1 punt]

b) Trobeu els punts de r que estan a una distància de $\sqrt{8}$ unitats del pla π .

[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància que hi ha d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al

pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

3. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real a :

$$\begin{cases} ax + 7y + 5z = 0 \\ x + ay + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre a .

[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al cas $a = 2$.

[1 punt]

4. Considereu la funció $f(x)$, que depèn dels paràmetres reals n i m i és definida per

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{4} + n & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \frac{3x}{2} + m & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- a) Calculeu els valors de n i m perquè la funció sigui contínua a tot el conjunt dels nombres reals.

[1 punt]

- b) Per al cas $n = -4$ i $m = -6$, calculeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica de $f(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = 4$.

[1 punt]

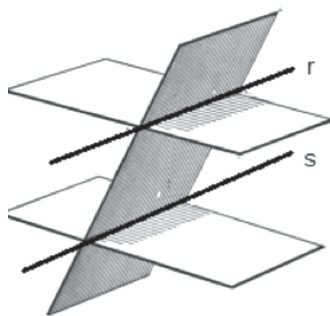
5. Considereu els plans $\pi_1: 2x + ay + z = 5$, $\pi_2: x + ay + z = 1$ i $\pi_3: 2x + (a + 1)y + (a + 1)z = 0$, en què a és un paràmetre real.

- a) Estudieu per a quins valors del paràmetre a els tres plans es tallen en un punt.

[1 punt]

- b) Comproveu que per al cas $a = 1$ la interpretació geomètrica del sistema format per les equacions dels tres plans és la que es mostra en la imatge següent:

[1 punt]



6. Sabem que una funció $f(x)$ és contínua i derivable a tots els nombres reals, que té com a segona derivada $f''(x) = 6x$ i que la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 1$ és horitzontal.

- a) Determineu l'abscissa dels punts d'inflexió de la funció f i els intervals de concavitat i convexitat. Justifiqueu que la funció f té un mínim relatiu en $x = 1$.

[1 punt]

- b) Sabent, a més, que la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 1$ és $y = 5$, calculeu l'expressió de la funció f .

[1 punt]