

Matemàtiques

Sèrie 5

Responen a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

1. Considereu les rectes $y = x$ i $y = 2x$, i la paràbola $y = x^2$.
 - a) Calculeu els punts d'intersecció entre les gràfiques de les diferents funcions i feu un esbós de la regió delimitada per les gràfiques.
[1 punt]
 - b) Calculeu l'àrea de la regió de l'apartat anterior.
[1 punt]

2. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 3a & 1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

- a) Trobeu els valors del paràmetre a per als quals la matriu és invertible.
[1 punt]
- b) Discutiu la posició relativa dels plans $\pi_1: x + (a-1)z = 0$, $\pi_2: x + ay + z = 1$ i $\pi_3: 4x + 3ay + z = 3$ en funció dels valors del paràmetre a .
[1 punt]

3. Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) Calculeu $A \cdot B$ i $B \cdot A$.
[1 punt]
- b) Justifiqueu que si el producte de dues matrius quadrades no nul·les té per resultat la matriu nul·la, aleshores el determinant de totes dues matrius ha de ser zero.
[1 punt]

4. Considereu la funció $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica en aquells punts en què la recta tangent és horitzontal.

[1 punt]

b) Calculeu les coordenades del punt de la gràfica de la funció $f(x)$ en què el pendent de la recta tangent és màxim.

[1 punt]

5. Siguin P , Q i R els punts d'intersecció del pla d'equació $x + 4y + 2z = 4$ amb els tres eixos de coordenades OX , OY i OZ , respectivament.

a) Calculeu els punts P , Q i R , i el perímetre del triangle de vèrtexs P , Q i R .

[1 punt]

b) Calculeu l'àrea del triangle de vèrtexs P , Q i R .

[1 punt]

NOTA: Per a calcular l'àrea del triangle definit pels vectors $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ podeu fer servir

l'expressió $S = \frac{1}{2} \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$, en què $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ és el producte vectorial dels vectors $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$.

6. Considereu la funció $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

a) Calculeu el domini de la funció f , els punts de tall de la gràfica de f amb els eixos de coordenades, i els intervals de creixement i decreixement de f .

[1 punt]

b) Calculeu l'àrea de la regió del pla determinada per la gràfica de la funció f , les rectes $x = 1$ i $x = e$, i l'eix de les abscisses.

[1 punt]



Institut
d'Estudis
Catalans