SÈRIE 3

PAUTES PER ALS CORRECTORS

RECORDEU:

- Podeu valorar amb tants decimals com ho considereu convenient, però aconsellem no fer-ho amb més de dos decimals.

- Cal arrodonir a un decimal la nota final de l'examen, no les notes parcials.

- Cal traslladar la puntuació de cada pregunta a la casella **amb el número corresponent** de la primera pàgina de l'examen.

1.

a) Volem resoldre la inequació $f(x) \geq 0$. Resolem primer l'equació $f(x) = 0$. Obtenim:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-0{,}2)(-20)}}{2(-0{,}2)} = \frac{-5 \pm 3}{-0{,}4} = \begin{cases} x = 5 \\ x = 20 \end{cases}$$

Per la naturalesa del problema, la funció només té sentit per a valors de $x > 0$ (no està definida per a $x = 0$), i observem que els valors per als quals $f(x) \geq 0$, i en què, per tant, la fàbrica no té pèrdues, són els de l'interval $[5, 20]$.

b) Comencem calculant la derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{(-0{,}4x + 5) \cdot x - (-0{,}2\,x^2 + 5x - 20)}{x^2} = \frac{-0{,}2x^2 + 20}{x^2}$$

Si imposem que $f'(x) = 0$, obtenim que $x^2 = 100$, que té per solucions $x = 10$ i $x = -10$. Per la naturalesa del nostre problema, només té sentit el valor $x = 10$. Per tant, en el punt d'abscissa $x = 10$ hi ha un extrem relatiu de la funció. A l'interval $(5, 10)$ la funció és creixent perquè $f'(x)$ és positiva, mentre que a l'interval $(10, 20)$ és decreixent perquè la derivada és negativa. Per tant en $x = 10$ hi ha un màxim.

Per a $x = 10$ la funció pren el valor $f(10) = 1$. Per tant, per a $x = 10$ s'obté el benefici màxim i aquest benefici és de 1.000 €.

Criteris de correcció: a) Plantejament: 0,5 p. Càlculs: 0,25 p. Obtenir l'interval: 0,5 p. b) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció de l'abscissa del punt on s'assoleix el màxim: 0,25 p. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Obtenció dels beneficis màxims: 0,25 p.

2.

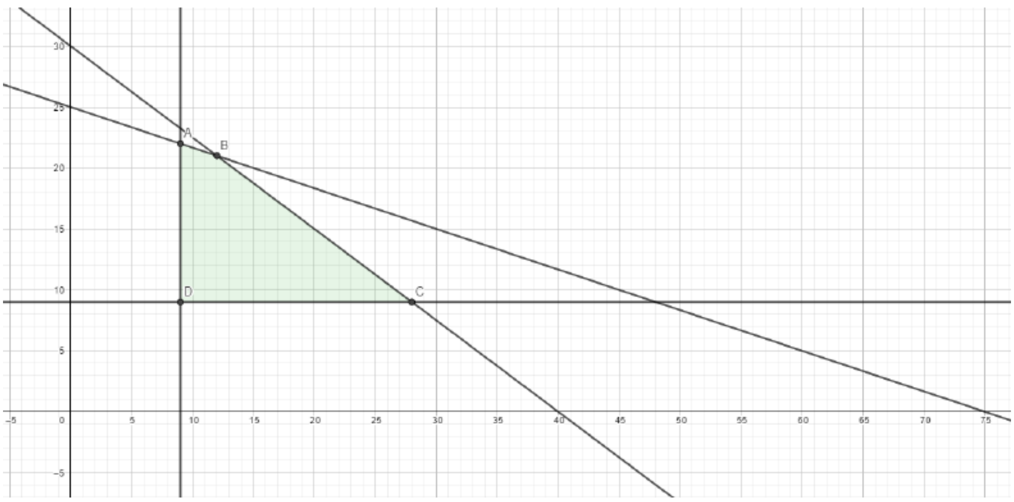
a) Denotem per x el nombre de capsetes del primer tipus, i per y, el nombre de capsetes del segon tipus. El sistema d'inequacions donat per les restriccions és:

$$\begin{cases} x \geq 9 \\ y \geq 9 \\ 3\,x + 4\,y \leq 120 \\ 2\,x + 6\,y \leq 150 \end{cases}$$

Podem simplificar una mica el sistema i treballar amb el sistema següent:

$$\begin{cases} x \geq 9 \\ y \geq 9 \\ 3\,x + 4\,y \leq 120 \\ x + 3\,y \leq 75 \end{cases}$$

La funció objectiu és $F(x, y) = x + y$, que ens dona el nombre total de capsetes, i la volem maximitzar. La regió factible serà:



b) Els vèrtexs de la regió factible són: $A = (9{,}22)$, $B = (12{,}21)$, $C = (28{,}9)$ i $D = (9{,}9)$. Avaluant la funció objectiu als quatre vèrtexs s'obté:

$F(A) = 31$, $F(B) = 33$, $F(C) = 37$ i $F(D) = 18$.

Deduïm, per tant, que per disposar del nombre màxim de capsetes possibles per obsequiar els clients hauran de fer-ne 28 del primer tipus i 9 del segon tipus. En aquest cas, veiem que s'utilitzen tots els panellets de pinyons, ja que $3 \cdot 28 + 4 \cdot 9 = 120$. Dels panellets de coco, en canvi, en fem servir $2 \cdot 28 + 6 \cdot 9 = 110$. Per tant sobren 40 panellets de coco.

Criteris de correcció: a) Càlcul de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de la regió factible: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. b) Obtenció dels vèrtexs: 0,5 p. Obtenció del punt en què s'assoleix el màxim de capsetes: 0,5 p. Obtenció del nombre de panellets que sobren: 0,25 p.

3.

a) Denotarem per x, y i z el nombre d'homes, dones i nens, respectivament, que han assistit a la festa. Obtenim el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x+y+z=20 \\ x+y=3z \\ y+1=x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=20 \\ x+y-3z=0 \\ x-y=1 \end{cases}$$

b) El resolem mitjançant el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \\ 0 & 2 & 1 & 19 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 2 & 1 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Els canvis que hem aplicat en el primer pas han estat $(F1, F2, F3) \rightarrow (F1, F1 - F2, F1 - F3)$. Mentre que en el segon pas hem fet $(F1, F2, F3) \rightarrow (F1, F3, \frac{F2}{4})$.

Deduïm, per tant, que $z = 5$, $2y = 19 - 5$, és a dir, $y = 7$ i, finalment, $x = 20 - 5 - 7$, és a dir, $x = 8$. Per tant, han assistit a la festa 8 homes, 7 dones i 5 nens.

Criteris de correcció: Plantejament del sistema: 0,25 p. cada equació. Resolució del sistema: 1 p. Obtenció de la solució final: 0,75 p.

4.

a) L'àrea del corral serà donada per l'expressió $A(x,y) = x \cdot y$.

Com que el perímetre està fixat i és de 40 metres, tenim que $2x + 2y = 40$. Aïllant d'aquesta expressió la variable y, obtenim que $y = 20 - x$, i substituint aquesta expressió en la funció àrea A, tenim que:

$$A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$$

b) Com que volem trobar un màxim de la funció $A(x)$, derivarem la funció $A(x)$ i la igualarem a 0.

$A'(x) = \ 20-2x$.

Imposem $A'(x) = 0$ i obtenim $x = 10$ metres. Observem que es tracta d'un màxim perquè la derivada és positiva per a valors inferiors a 10 i és negativa per a valors superiors. Per tant, l'amplària del corral d'àrea màxima és de $x = 10$ metres.

Sabem que la llargària ve donada per l'expressió $y = 20 - x$. Substituint la x per 10, obtenim que $y = 10$ metres.

Deduïm, per tant, que en realitat es tracta d'un quadrat de costat $x = 10$ metres i tindrà per àrea $A(10) = 100\ m^2$.

Criteris de correcció: a) Obtenció de la relació entre l'amplària x i la llargària y: 0,5 p. Obtenció de l'àrea en funció de x: 0,75 p. b) Càlcul de la derivada: 0,25 p. Càlcul del valor pel qual s'obté el màxim: 0,25 p. Comprovació que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Càlcul del valor de la llargària: 0,25 p. Càlcul de l'àrea màxima: 0,25 p.

5.

a) Comencem calculant les diferents potències de A:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

...

Per tant, deduïm que:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'altra banda, per comprovar si la matriu de l'enunciat és la inversa de la matriu A^n, multipliquem les dues matrius per veure si obtenim la matriu identitat:

$$A^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, efectivament, es tracta de la matriu inversa de A^n.

b) Per resoldre l'equació matricial, comencem aïllant la matriu X respectant les normes del producte de matrius:

$$A^{10}X - A^{20} = A \Longrightarrow A^{10}X = A + A^{20} \Longrightarrow X = (A^{10})^{-1}(A + A^{20}).$$

Utilitzant el que hem vist a l'apartat anterior, tenim, per tant, que:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 21 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Criteris de correcció: a) Obtenció de l'expressió de A^n: 0,75 p. Comprovació que es tracta de la matriu inversa de A^n: 0,5 p. b) Aïllar l'equació matricial: 0,5 p. Càlculs dels productes de matrius: 0,5 p. Obtenció de la solució final: 0,25 p.

6.

a) Comencem calculant la derivada $f'(x) = 12x^2 + 2ax$. Si en el punt d'abscissa $x = -1$ hi ha un extrem relatiu, sabem que la derivada en aquest punt ha de ser zero. Per tant $f'(-1) = 12(-1)^2 + 2a(-1) = 0 \quad \rightarrow \quad 12 - 2a = 0 \quad \rightarrow \quad a = 6$.

Per tant, obtenim que el paràmetre $a = 6$.

b) Tenim ara $f(x) = 4x^3 + 12x^2 - 2$. Comencem calculant la derivada: $f'(x) = 12x^2 + 24x = 12x(x+2)$. Si la igualem a zero obtenim dues solucions $x = -2$ i $x = 0$.

Per tant, tenim que:

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	funció creixent	màxim	funció decreixent	mínim	funció creixent

Observem que $f(-2) = 14$ i $f(0) = -2$.

Així doncs, la funció és creixent en els intervals $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ i és decreixent en l'interval $(-2,0)$. D'altra banda, té un màxim relatiu en el punt $(-2, 14)$ i un mínim relatiu en el punt $(0, -2)$.

Criteris de correcció: a) Si el plantejament del problema és correcte, encara que hi pugui haver errors de càlcul: 0,5 p. Càlculs: 0,5 p. Obtenció de la solució: 0,25 p. b) Càlcul de la derivada: 0,25 p. Càlcul dels intervals de creixement i decreixement: 0,5 p. Obtenció dels extrems relatius i classificació: 0,5 p.