Unitat 7: aplicació derivades.

7.1 recta tangent a una corba

- eq. recta tangent → $y = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{m}(x - x_0)$
- eq. de la corba → $y = f(x)$
- punt d'abscissa → $y = x_0$
- ordenada del punt → $f(x_0)$
- pendent de la recta → $m = f'(x_0)$

ex: Donada la corba → $y = x^3 - 3x^2 + 4$ que passa per $x_0 = 3$

troba l'equació de la recta tangent.

1. $3^3 - 3 \cdot 3^2 + 4 = 4$ → coordenada al punt $(3,4)$
2. $f'(x) = 3^2 - 6x$ // $f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 = 9$
3. $y = 4 + 9(x-3)$ → Eq. recta tangent.

p. 175 ex 1(a)

a) $y = \dfrac{5x^3 + 7x^2 - 16x}{x-2}$ → $x_0 = 3$

1. $\dfrac{5 \cdot 3^3 + 7 \cdot 3^2 - 16 \cdot 3}{3-2}$ → $\boxed{150}$
2. $\dfrac{10 \cdot 3^2 - 23 \cdot 3^2 - 28 \cdot 3 + 32}{(3-2)^2}$ → $\boxed{11}$
3. $y = x_0 + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

$y = 150 + 11 \cdot (x - 3)$ → $\boxed{11x + 117}$

7.2 tangent a una corba coneixent el pendent!

ex: $y = x^3 - 3x^2 + 4$ corba

$m_{pendent} = 9$

1. derivada funció:

$y' = 3x^2 - 6x$

2. igualar pendent.

$3x^2 - 6x = 9 \; // \; 3x^2 - 6x - 9 = 0$

$\frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 3 \cdot (-9}}{2 \cdot 3} \rightarrow \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} 3 \\ -1 \end{array} \right.$

3. imatge x.

$f(3)\; y = x^3 - 3x^2 + 4$

$f(3)\; y = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 4 \rightarrow 4$

$f(-1)\; y = x^3 - 3x^2 + 4$

$f(-1)\; y = -1^3 - 3 \cdot -1^2 + 4 \rightarrow 0$

4. Substituïm:

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$y(3,4) = 4 + 9 \cdot (x - 3) \rightarrow 4 + 9x - 27 \rightarrow \boxed{9x - 23}$

$y(-1,0) = 0 + 9(x + 1) \rightarrow \boxed{9x + 9}$

7.3 tangent a una corba des d'un punt exterior.

$f(x) = x^2 - 2x + 1 \rightarrow f(c) = c^2 - 2c + 1$

$P = (1, -1) \rightarrow T(c, fc)$

$y = f(c) + f'(c)(x - c)$

1. derivada $f(x)$

$f'(x) = 2x - 2 \rightarrow$ la pendent.

$$m = \frac{y_0 - f(c)}{x_0 - c} = \frac{-1 - (c^2 - 2c + 1)}{1 - c} = 2c - 2$$

Punt.

Igualar a la derivada de fc.

2. resolem:

$-1 - c^2 + 2c - 1 = (1 - c)(2c - 2)$

$-\cancel{c^2} + 2\cancel{c^2} + \cancel{2c} - \cancel{2c} - 2c = -1 - 1 + 2$

$c^2 - 2c = 0$

$c(c - 2) = 0$

$c(c - 2)$

$c = 0$; $c = 2$

3. substituim a la funció

$c = 0$

$f_{c=0} = 0^2 - 2 \cdot 0 + 1 \rightarrow 1$

$f'(0) = -2$ (la buscas en derivada de $f'c$)

$y = 1 - 2(x - 0) = 1 - 2x$

$c = 2$

$fc = 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 \rightarrow 1$

$f'c = 2$

$y = 1 + 2 \cdot (x - 2) = 1 + 2x - 4 \rightarrow \boxed{2x - 3}$

7.4 tangent a una corba a partir recta paral·lela.

ex:

$y = x^2 - 6x + 3$ eq. corba

recta parel·la → $4x - 2y + 1 = 0$

tenir en compte:
dues rectes paral·leles tenen = pendent.

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

1. trobar pendent de la recta paral·lela:

∘ Aïllar la y. → $4x - 2y + 1 = 0$

$4x + 1 = 2y$

$\frac{4x + 1}{2} = y$ ⟶ resultat //

$2x + \frac{1}{2}$ → el pendent és el coeficient de la x en aquest cas 2.

$m = 2$

2 derivem la funció corba i igualar al pendent.

$y = x^2 - 6x + 3 = y' = 2x - 6$

$f(x) = 2x - 6 = 2$

$x_0 = \frac{6 + 2}{2}$ $\boxed{4}$ → Punt x_0

3. trobar imatge $f'(x_0)$)

$f(x_0) = x^2 - 6x + 3$ → $4^2 - 6 \cdot 4 + 3 = -5$

4. subs a la recta tangent.

$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

$y = -5 + 2(x - 4) = -5 + 2x - 8 = 2x - 13$

Relació amb el signe de la derivada:

f(x) derivable i creixent $\lim x_0 \rightarrow \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$

f(x) derivable i decreixent en $x_0 \rightarrow f'(x_0) \leq 0$

Criteri de creixement en x_0 a partir del signe $f'(x_0)$

$f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ és creixent en x_0.

$f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$ és decreixent en x_0.

Exemple:

- Estudia el creixement i el decreixement de la funció:

$y = x^3 - 6x^2 + 5$

1. La primera derivada:

$y' = 3x^2 - 12x$

2. buscar punts que fa que sigui 0:

$y' = 0 = 3x^2 - 12x$

3. treure factor comú:

$y' = 0 = 3x^2 - 12x$ (se divide todo entre lo que puedes sacar.

$3x(x-4) = 0$ → $3x = 0 \rightarrow x = \frac{0}{3} \rightarrow 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$; → $x - 4$ // $\boxed{x = 4}$

4. Busquem punts d'inflecció: (mirant-ho a la recta)

$x < 0$

$0 < x < 4$

$x > 4$

$(-\infty, 0)$ ↗ 0 (màxim) ↘ $(0, 4)$ 4 ↗ $(4, +\infty)$

5. Agafem trams i cambien a la primera derivada:

$x < 0 \rightarrow y' \rightarrow 3 \cdot (-1)^2 - 12 \cdot (-1) \rightarrow 3 + 12$ això és > 0 aleshores és creixent.

$0 < x < 4 \rightarrow y' \rightarrow 3 \cdot (1)^2 - 12 \cdot (1) \rightarrow -9 < 0 \rightarrow$ decreixent

$x > 4 \rightarrow y' \rightarrow 3 \cdot (5)^2 - 12 \cdot (5) \rightarrow 60 > 4 \rightarrow$ creixent exemple: Estudia el creixement, decreixement, màxims, mínims, curvatura i punts inflexió:

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9$

1. Mirar punts domini

Polinomica (tot R)

2. Estudiar creix i decreix $= f'(x)$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$

3. Equació segon grau:

$x = 3$ $x = +1$

4. Fer la recta:

↗ ↘ ↗

$x = 0$ 1 $x = 2$ 3 $x = 4$

5. Subst. en la 1 derivada:

$f'0 = 3 \cdot 0 - 12 \cdot 0 + 9 = 9$

$f'2 = 3 \cdot (2)^2 - 12 \cdot 2 + 9 =$

$f'4 = 3(4)^2 - 12 \cdot (4) + 9$

$f(x)$ creixent $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$

$f(x)$ decreixent $(1, 3)$

6. Calcular màxim i mínim

Màxim $(1, f'(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 = 4) \Rightarrow (1, 4)$

Subs absissa a fx.

Aleshores $P(1, 4)$

Mínim $(3, f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 0) \rightarrow (3, 0)$

7. Buscar curvatura $\Rightarrow f''(x)$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f''(x) = 6x - 12 = 0$

8. Aillo x:

$6x - 12 = 0$ // $x = \frac{12}{6} = 2$

9. Fer el dibuix:

Substituir 0 fer $f'''(x)$ en $f''(x)$

punt inf.

$f''(0)$ 2 $f''(3)$

$-12<0$ 6

10. Per saber punt inflexió subs en fx original

$(2, f(2) \Rightarrow (2, 2)$

P. 179

6. $y = 3x^4 - 8x^3 + 5$

$y' = 12x^3 - 24x^2$

$y'' = 36x^2 - 48x$

1. igualar a 0

$y'' = 36x^2 - 48x = 0$

$x(36x - 48) \begin{cases} x = 0 \\ 36x - 48 = \quad x = \frac{48}{36} = 1{,}3 \end{cases}$

2. eq. 2n grau:

$$\frac{48 \pm \sqrt{48^2 - 4 \cdot 36 \cdot 0}}{2 \cdot 36} = \begin{cases} 0 \\ 4/3 = 1.3 \end{cases}$$

3. Fer dibuix

$x<0$ $0<x<1{,}3$ $x>1{,}3$

0   1,3

$f(-1) \rightarrow$

$3 \cdot (-1)^4 - 8 \cdot (-1)^3 + 5 = -3 + 8 + 5 = 10$

$f(1) \rightarrow 3 \cdot (1)^4 - 8 \cdot (1)^3 + 5 = 8 - 8 = 0$

$f(2) \rightarrow 3 \cdot (2)^4 - 8 \cdot (2)^3 + 5 = 48 - 64 + 5 = -11$

4. Punt inflexió:

$(0, f(0) \rightarrow (0, 5)$

$(1{,}3, f(2) \rightarrow (4/3, -11)$