

Unitat 7: aplicació derivades.

2.1 recta tangent a una corba

- eq. recta tangent $\rightarrow y = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_m (x - x_0)$
- eq. de la corba $\rightarrow y = f(x)$
- punt d'abscissa $\rightarrow y = x_0$
- ordenada del punt $\rightarrow f(x_0)$
- pendent de la recta $\rightarrow m = f'(x_0)$

Ex: Donada la corba $\rightarrow y = x^3 - 3x^2 + 4$ que passa per $x_0 = 3$
troba l'equació de la recta tangent.

1. $3^3 - 3 \cdot 3^2 + 4 = 4 \rightarrow$ coordenada al punt (3,4)
2. $f'(x) = 3x^2 - 6x \parallel f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 = 9$
3. $y = 4 + 9(x-3) \rightarrow$ Eq. recta tangent.

p. 173 ex 1(a)

a) $y = \frac{5x^3 + 7x^2 - 16x}{x-2} \rightarrow x_0 = 3$

1. $\frac{5 \cdot 3^3 + 7 \cdot 3^2 - 16 \cdot 3}{3-2} \rightarrow \boxed{150}$

2. $\frac{10 \cdot 3^2 - 23 \cdot 3^2 - 28 \cdot 3 + 32}{(3-2)^2} \rightarrow \boxed{11}$

3. $y = x_0 + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

$y = 150 + 11 \cdot (x - 3) \rightarrow \boxed{11x + 117}$

APLICACIÓ DE LES DERIVADES

2.º tangents a una corba coneixent el pendent:

$$\text{ex: } y = x^3 - 3x^2 + 4 \quad \text{corba}$$

$$m_{\text{pendent}} = 9$$

1. derivada pendent:

$$y' = 3x^2 - 6x$$

2. igualar pendent:

$$3x^2 - 6x = 9 \quad // \quad 3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$\frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 3 \cdot (-9)}}{2 \cdot 3} \rightarrow \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} \rightarrow \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

3. imatge x.

$$f(3) \quad y = x^3 - 3x^2 + 4$$

$$f(3) \quad y = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 4 \rightarrow 4$$

$$f(-1) \quad y = x^3 - 3x^2 + 4$$

$$f(-1) \quad y = -1^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 4 \rightarrow 0$$

4. Substitució:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y(3,4) = 4 + 9 \cdot (x - 3) \rightarrow 4 + 9x - 27 \rightarrow \boxed{9x - 23}$$

$$y(-1,0) = 0 + 9(x + 1) \rightarrow \boxed{9x + 9}$$

APLICACIÓ DE LES DERIVADES

2.3 Tangent a una corba des d'un punt exterior.

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 \rightarrow f(c) = c^2 - 2c + 1$$

$$P = (1, -1) \rightarrow T(c, f(c))$$

$$y = f(c) + f'(c)(x - c)$$

1. derivada $f'(x)$

$$f'(x) = 2x - 2 \rightarrow \text{és pendent.}$$

$$m = \frac{y_0 - f(c)}{x_0 - c} = \frac{-1 - (c^2 - 2c + 1)}{1 - c} = \frac{-1 - c^2 + 2c - 1}{1 - c} = \frac{-c^2 + 2c - 2}{1 - c}$$

igualar a la derivada de f .

2. resoltem:

$$-1 - c^2 + 2c - 2 = (1 - c)(2c - 2)$$

$$-c^2 + 2c - 3 = 2c - 2 - 2c + 2$$

$$-c^2 + 2c - 3 = -1 - 1 + 2$$

$$-c^2 + 2c = 0$$

$$c(c - 2) = 0$$

$$c = 0$$

3. Substituïm a la funció

$$c = 0$$

$$f(c) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 1 \rightarrow 1$$

$$f'(c) = -2 \quad (\text{a totes en derivada de } f'(c))$$

$$y = 1 - 2(x - 0) = 1 - 2x$$

$$c = 2$$

$$f(c) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 \rightarrow 1$$

$$f'(c) = 2$$

$$y = 1 + 2 \cdot (x - 2) = 1 + 2x - 4 \rightarrow \boxed{2x - 3}$$

2.4 tangent a una corba a partir recta paral·lela.

ex:

$$y = x^2 - 6x + 3 \text{ eq. corba}$$

$$\text{recta paral·lela} \rightarrow 4x - 2y + 1 = 0$$

tenir en compte:
dues rectes paral·leles
tenen = pendent.

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

1. trobar pendent de la recta paral·lela:

o Aïllar la y. $\rightarrow 4x - 2y + 1 = 0$

$$\therefore 4x + 1 = 2y$$

$$\frac{4x + 1}{2} = y \rightarrow \text{resoldre //}$$

$$\frac{2x + \frac{1}{2}}{1} \rightarrow \text{el pendent és el coeficient de la } x \text{ en aquest cas.}$$

$$m = 2$$

2. derivem la funció corba i igualam al pendent.

$$y = x^2 - 6x + 3 = y' = 2x - 6$$

$$f'(x) = 2x - 6 = 2$$

$$x_0 = \frac{6 + 2}{2} = 4 \rightarrow \text{punt } x_0$$

3. trobar imatge $f'(x_0)$

$$f(x_0) = x^2 - 6x + 3 \rightarrow 4^2 - 6 \cdot 4 + 3 = -5$$

4. subs a la recta tangent.

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$y = -5 + 2(x - 4) = -5 + 2x - 8 = 2x - 13$$

APLICACIÓ DE LES DERIVADES

Relació amb el signe de la derivada:

$f(x)$ creixent i creixent $x_0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) \geq 0$

$f(x)$ creixent i decreixent en $x_0 \rightarrow f'(x_0) \leq 0$

Creixent o decreixent en x_0 a partir del signe $f'(x_0)$

$f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ és creixent en x_0 .

$f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$ és decreixent en x_0 .

Exemple:

Estudia el creixement i el decreixement de la funció:

$$y = x^3 - 6x^2 + 5$$

1. La primera derivada:

$$y' = 3x^2 - 12x$$

2. Busca punts que fa que sigui 0:

$$y' = 0 = 3x^2 - 12x$$

3. Treure factor comú:

$y' = 0 = 3x^2 - 12x$ (se divide todo entre lo que puedes sacar.)

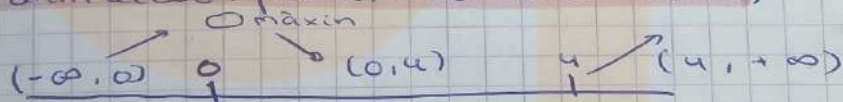
$$3x(x - 4) = 0 \begin{cases} 3x = 0 \rightarrow x = \frac{0}{3} \rightarrow 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \\ x - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x=4} \end{cases}$$

4. Busquem punts d'inflexió: (mirant no a la cresta)

$$x < 0$$

$$0 < x < 4$$

$$x > 4$$



5. Agafem trams i canviem a la primera derivada:

$$x < 0 \rightarrow y' \rightarrow 3 \cdot (-1)^2 - 12 \cdot (-1) \rightarrow 3 + 12 \text{ això és } > 0 \text{ creixent}$$

és creixent:

$$0 < x < 4 \rightarrow y' \rightarrow 3 \cdot (1)^2 - 12 \cdot (1) \rightarrow -9 < 0 \rightarrow \text{decreixent}$$

$$x > 4 \rightarrow y' \rightarrow 3 \cdot (5)^2 - 12 \cdot (5) \rightarrow 60 > 4 \rightarrow \text{creixent}$$

APLICACIÓ DE LES DERIVADES



Exemple: Estudia el creixement, decreixement, màxims, mínims, concavetat i punts inflexió:

$$g(x) = x^3 - 6x^2 + 9$$

1. Mira els punts domini

Polinomial (tot \mathbb{R})

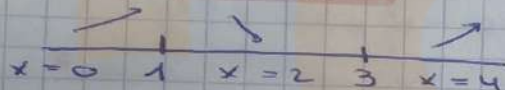
2. Estudia creix i decreix = $g'(x)$

$$p(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$$

3. Equació segon grau:

$$x = 3 \quad x = 1$$

4. Fa la recta:



5. Subst. en g i derivada:

$$\left. \begin{array}{l} g'(0) = 3 \cdot 0 - 12 \cdot 0 + 9 = 9 \\ g'(2) = 3 \cdot (2)^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3 \\ g'(4) = 3 \cdot (4)^2 - 12 \cdot (4) + 9 = 9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} g(x) \text{ creixent} \\ (-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \\ g(x) \text{ decreixent} \\ (1, 3) \end{array}$$

6. Calcular màxim i mínim

$$\text{Màxim} (1, g'(1) = 3^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 = 4) \Rightarrow (1, 4)$$

Sols absissa
a $g(x)$.

Aleshores $P(1, 4)$

$$\text{Mínim} (3, g(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 0) \Rightarrow (3, 0)$$

7. Busca la concavetat $\Rightarrow p''(x)$

$$p(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$p''(x) = 6x - 12 = 0$$

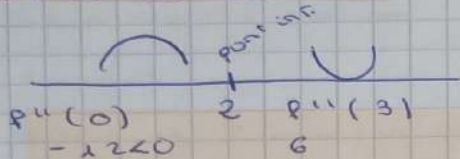
8. Dillo x :

$$6x - 12 = 0 \quad // \quad x = \frac{12}{6} = 2$$



APLICACIÓ DE LES DERIVADES

9. Fea el dibuix!



Substituir a Fea $p'''(x)$
en $p''(x)$

10. Per saber punt inflexió s'obté en F_x original

$$(2, f(2)) \Rightarrow (2, 2)$$

p. 179

$$6. y = 3x^4 - 8x^3 + 5$$

$$y' = 12x^3 - 24x^2$$

$$y'' = 36x^2 - 48x$$

1. Igualar a 0

$$y'' = 36x^2 - 48x = 0$$

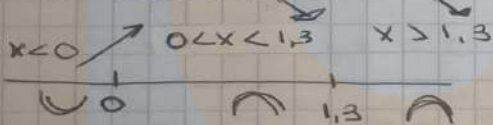
2. eq. en grau:

$$\frac{48 \pm \sqrt{48^2 - 4 \cdot 36 \cdot 0}}{2 \cdot 36} =$$

$$x(36x - 48) \begin{cases} x = 0 \\ 36x - 48 = 0 \\ x = \frac{48}{36} = 1.3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 \\ 4/3 = 1.3 \end{cases}$$

3. Fea dibuix



$$f(-1) \rightarrow$$

$$3 \cdot (-1)^4 - 8 \cdot (-1)^3 + 5 = -3 + 8 + 5 = 10$$

$$f(1) \rightarrow 3 \cdot (1)^4 - 8 \cdot (1)^3 + 5 = 8 - 8 = 0$$

$$f(2) \rightarrow 3 \cdot (2)^4 - 8 \cdot (2)^3 + 5 = 48 - 64 + 5 = -11$$

4. Punt inflexió:

$$(0, f(0)) \rightarrow (0, 5)$$

$$(1.3, f(2)) \rightarrow (4/3, -11)$$