Càlcul de primitives

Calculeu:

a) $\int \sqrt[5]{x^3}\,dx = \int x^{\frac{3}{5}}dx = \frac{1}{\frac{3}{5}+1}x^{\frac{3}{5}+1} + C = \frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}} + c = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + c$

b) $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)dx$, utilitzant les propietats de la integral:

$$\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)dx = \int\frac{1}{x}dx + \int\frac{1}{x^3}dx = \ln x + \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \ln x - \frac{1}{2x^2} + C$$

c) $\int x^2 e^{x^3}dx$

Tenint en compte que $\int e^u du = e^u + C \Rightarrow \int x^2 e^{x^3}dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 e^{x^3}dx = \frac{1}{3}e^{x^3} + C$

d) $\int_0^{\pi}\cos^3 x dx =$

Tenint en compte que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow$

$$\int \cos^3 x du = \int \cos x\left(1-\sin^2 x\right)du = \int \cos x\, du - \int \cos x \sin^2 x\, du = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

$$\int_0^{\pi}\cos^3 x dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\Big|_0^{\pi} = \sin\pi - \frac{1}{3}\sin^3\pi - \left(\sin 0 - \frac{1}{3}\sin^3 0\right) = \boxed{0}$$

Calculeu $\int\sqrt{16-x^2}\,dx$ **utilitzant el mètode de canvi de variables amb el canvi x= 4 sin t**

Si x= 4 sin t $\Rightarrow$dx = 4 cos t dt i 16 -x^2 = 16 - 16 sin^2 t = 16(1- sin^2 t) =16 cos^2 t $\Rightarrow$

$$\int\sqrt{16-x^2}\,dx = \int\sqrt{16\cos^2 t}\;4\cos t\,dt = 16\int\cos^2 t\,dt =$$

Tenint en compte que $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$, la expressió anterior es transforma en

$$16\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt = 8\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C = 8t + 4\sin 2t + C =$$

Desfent els canvis: $t = \arcsin\frac{x}{4}$ i $\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\frac{x}{4}\frac{1}{4}\sqrt{16-x^2}$, tenim:

$$\int\sqrt{16-x^2}\,dx = 8\arcsin\frac{x}{4} + \frac{x}{2}\sqrt{16-x^2} + C$$

Calculeu $\int 2\,x\cos\,x\,dx$

Apliquem la fórmula de la derivació per parts

$$\int 2\,x\cos\,x\,dx = \left\{\begin{matrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x\end{matrix}\right\} = 2(x\sin x - \int \sin x\,dx) = 2x\sin x + 2\cos x + C$$

c) $\int xe^{-3x}dx$

Apliquem la fórmula de la derivació per parts

$$\int xe^{-3x}dx == \begin{Bmatrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-3x}dx \Rightarrow v = \frac{-1}{3}e^{-3x} \end{Bmatrix} = x\left(\frac{-1}{3}e^{-3x}\right) - \int \frac{-1}{3}e^{-3x}\,dx = \frac{-x}{3}e^{-3x} + \frac{1}{9}e^{-3x} + C$$

Calculeu $\int \frac{4x+3}{x^2-6x-7}dx$

Descomponem el denominador en factors: $x^2-6x-7=(x+1)(x-7)$

Escrivim el integrant com a suma de dos fraccions simples:

$$\frac{4x+3}{x^2-6x-7} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-7} = \frac{A(x-7)+B(x+1)}{x^2-6x-7} \Rightarrow$$ igualant els numeradors que:

$$\begin{cases} \text{Si } x = -1 \Rightarrow 4\cdot(-1)+3 = -8A \Rightarrow A = 1/8 \\ \text{Si } x = 7 \Rightarrow 4\cdot 7+3 = 8B \Rightarrow B = 31/8 \end{cases}$$ i per tant,

$$\int \frac{4x+3}{x^2-6x-7}dx = \frac{1}{8}\ln|x+1| + \frac{31}{8}\ln|x-7| + C$$

Aplicació de la integral

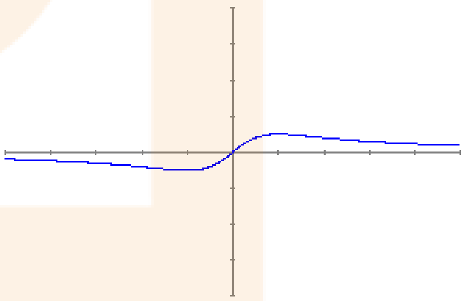
Tenim la funció següent: $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

a/ Representeu-la gràficament i calculeu-ne els màxims, els mínims i l'asímptota horitzontal.

b/ Calculeu l'àrea de la regió del pla compresa entre el gràfic de la funció, l'eix d'abscisses i les rectes x=0 i x=1.

a) $f(x) = \frac{x}{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0 \Rightarrow$ y=0 és asímptota horitzontal



$f'(x) = 0 \Rightarrow 1-x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

	(-∞,-1)	-1	(-1,1)	1	(1,+∞)
f'(x)	–		+		–
f(x)	Decreix	Mínim	Creix	Màxim	Decreix

Mínim en (-1, 0.5) i Màxim en (1,0.5)

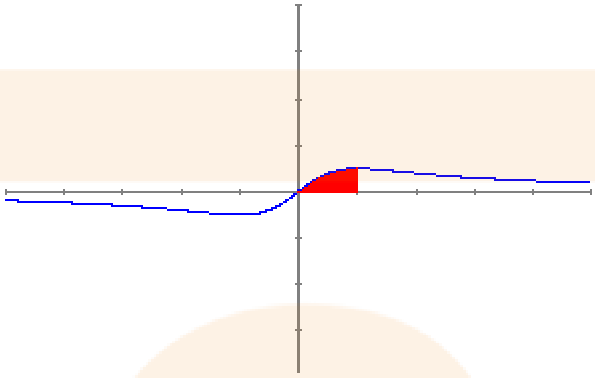
b/

$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$ La resolem per canvi de variable:

$1+x^2 = t$

$2x\,dx = dt \qquad \Rightarrow x\,dx = dt/2$

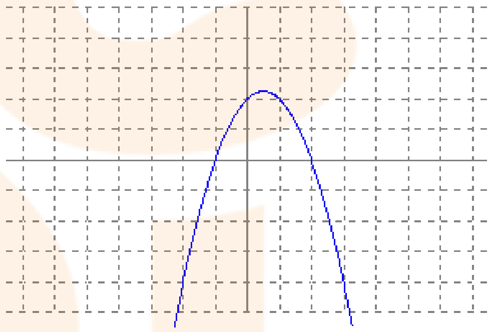
$$\int_0^1 \frac{dt}{2t} = (\frac{1}{2}\ln t)_{x=0}^{x=1} = (\frac{1}{2}\ln(1+x^2))_0^1 = \frac{1}{2}(\ln(1+1)-\ln(1)) = \frac{\ln(2)}{2}$$



Integral definida entre 0, 1 = 0.34655

Calculeu l'àrea limitada per la gràfica de la funció y=-x²+x+2 i l'eix de les x entre els punts 1 i 2.

Hem de trobar els punts de tall:



$-x^2+x+2=0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} = \qquad x = -1 \quad \text{i } x = 2$$

. O sigui que no hi han punts de tall entre els extrems d'integració. Això fa que per trobar l'àrea poguem calcular directament la integral definida.

$$\int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)dx = (\frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x)_{-1}^{2} = 4{,}5$$

El problema no ho demana, però pot ésser instructiu veure el dibuix de la gràfica d'aquesta funció.

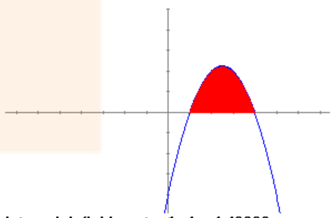
Trobeu els punt on és positiva la funció y=-x²+5x-4. Calculeu l'àrea compresa entre la gràfica d'aquesta funció i l'eix de les x en els punts calculats anteriorment.

Es tracta d'una paràbola amb les banyes cap avall. Cal trobar els punts de tall i calcular la integral definida entre aquests punts de la funció.

Punts de tall: $-x^2+5x-4=0 \qquad x=1 \qquad x=4$

$$\int_1^4 (-x^2 + 5x - 4)dx = (\frac{-x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x)_1^4 = 4{,}5$$

El problema no ho demana, però pot ésser instructiu veure el dibuix de la gràfica d'aquesta funció.



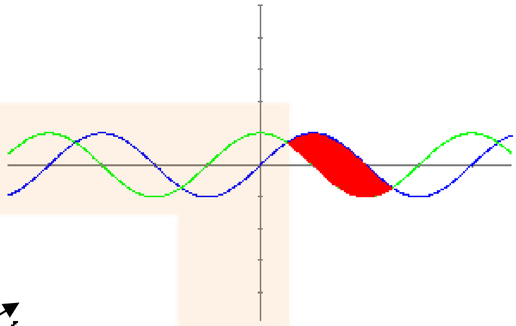
Integral definida entre 1, 4 = 4.49969

Trobeu l'àrea compresa entre les gràfiques de les funcions sin x i cos x en l'interval $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$

Per trobar l'àrea entre dues funcions el que hem de fer primer és trobar els punt de tall entre les dues funcions. Si entre els extrems d'integració no hi ha cap punt de tall l'àrea serà el valor absolut de la integral definida entre els dos extrems d'integració d'una funció menys l'altre. En el cas de que hi havés punts de tall entre mig, caldria calcular la mateixa integral definida, però per cada tros i fer la suma dels valors absoluts.

Hem de resoldre la equació: sin(x) = cos(x)

Si ho dividim tot per cos(x) ens queda: tan(x) = 1
Els angles que la seva tangent val 1 són 45 i 270 que expressats en radiants són $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$. Això fa que no hi hagi cap punt de tall entre els dos extrems d'integració (per casualitat, o perquè el profe que ha posat l'examen ho ha fet expressament) i per calcular l'àrea només hem de calcular la integral definida entre els dos extrems d'una funció menys l'altre i quedar-nos amb el valor absolut.



Àrea entre 0.785398, 3.95 = 2.828498

$$\int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\cos x - sinx)dx = (sinx + \cos x)_{\pi/4}^{5\pi/4} \approx 2{,}8$$

Dibuixem la gràfica i veiem que hem calculat.

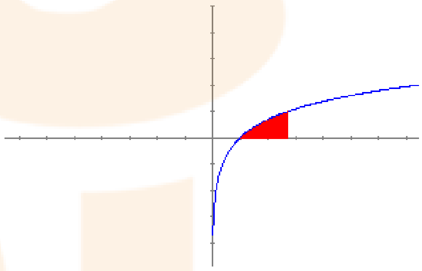
Deriveu la funció f(x) = x ln x - x utilitzeu el resultat per calcular: $\int_1^e \ln x dx$

f'(x) = ln x + x/x -1 = ln x

Veiem que la derivada de la funció *x.ln(x)-x* és precisament *ln(x)*. Això fa que *x.ln(x)-x* sigui una primitiva de *ln(x)*. Llavors calcular el que ens demanen és senzill, només cal aplicar directament el teorema fonamental del càlcul.

$$\int_1^e \ln x dx = (x\ln x - x)_1^e = (e\ln e - e) - (1\ln 1 - 1) = 1$$

Dibuixem la gràfica i veiem que hem calculat.



Integral definida entre 1, 2.725 = 1

Calculeu la primitiva de $y = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x}$ **que s'anul.la per a x=1**

Si fem prèviament la divisió el problema se simplifica

$$y = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x} = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x}$$

$$\int (x^2 - x + 1 - \frac{1}{x})dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln x + c$$

De totes aquestes funcions cal trobar el valor de *c* que fa que per *x=1* la funció s'anul.li.

Substituim la *x* per 1 i resolem la equació.

$$\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 1 - \ln 1 + c = 0 \qquad c = -5/6$$

La funció demanada és

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln x - \frac{5}{6}$$