

Conceptes bàsics Anàlisi II

Sitio: **Cursos IOC - Batxillerat**

Imprimido por: Invitado

Curso: Matemàtiques (autoformació IOC)

Día: viernes, 11 de febrero de 2022, 21:11

Libro: Conceptes bàsics Anàlisi II

Tabla de contenidos

1. APLICACIONES DE LES DERIVADES

- 1.1. Aplicacions de les derivades. Optimització
- 1.2. Exemple 2
- 1.3. Exemple 3
- 1.4. Exemple 4 PAU
- 1.5. Exemple 5
- 1.6. Trobar "a" i "b" per tal que la funció compleixi requisits
- 1.7. Trobar "a" i "b" per tal que la funció compleixi requisits

2. INTEGRALS. APLICACIONES

- 3. Introducció a la integració
- 4. Concepte de integració.
- 5. Taula integrals immediates
- 6. Integral indefinida. Primitives
- 7. Propietats de les integrals
- 8. Com aplicar les propietats anteriors
- 9. Funcions que es poden reduir a potències
- 10. Integració per canvi de variable.
- 11. Mètode integració per parts
- 12. Com sabem en la integració per parts qui és u i qui dv
- 13. Integrals on hi ha un logaritme
- 14. Integrals definides
- 15. Càlcul d'integrals definides
- 16. Concepte d'integral definida
- 17. Càlcul d'àrees sota una corba
- 18. Exemple 2. Àrea sota una corba
- 19. Exemple 3. Integral definida
- 20. Càlcul àrea entre dos corbes
- 21. Càlcul àrea entre dos corbes. Exemple 2
- 22. Aplicacions en altres camps del coneixement
- 23. Dossier amb exercicis resolts
- 24. Exercicis PAU
- 25. Exercicis PAU

APLICACIONS DE LES DERIVADES



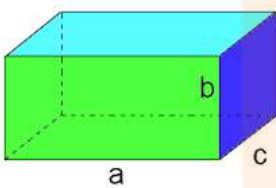
Optimitzar és trobar el màxim o el mínim d'una funció sotmesa a certes condicions imposades.

Per resoldre un problema d'optimització seguirem aquests passos:

- Identificar les variables del problema.
- Escriure algebraicament la funció que s'ha d'optimitzar
- Escriure algebraicament la relació entre les variables
- Aïllar de la relació anterior una variable i substituir en la funció. Cal aconseguir que la funció sigui d'una única variable.
- Trobar els extrems (màxims i mínims) de la funció, resolent l'equació $f'(x) = 0$
- Comprovar si són màxims o mínims
- Analitzar la coherència de la solució dins del context de l'enunciat

Exemple 1

Aquest dipòsit en forma d'ortoeidre, té un volum de 72 m^3 i la llargada (a) és el doble que l'amplada (c). Deduir les dimensions del dipòsit per tal que la superfície sigui mínima



- Identificar les variables del problema.

a= llarg

b= ample

c= altura

- Escriure algebraicament la funció que s'ha d'optimitzar

$$\text{Àrea}(A) = 2 \text{ bases} + 4 \text{ cares laterals} = a \cdot c + a \cdot c + b \cdot c + b \cdot c + a \cdot b + a \cdot b = 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c + 2 \cdot a \cdot b$$

- Escriure algebraicament la relació entre les variables

$$V = \text{llarg} \cdot \text{ample} \cdot \text{altura} = a \cdot b \cdot c$$

$$72 = a \cdot b \cdot c$$

A més la llargada (a) és el doble que l'amplada (c)

$$a = 2 \cdot c$$

De les dues equacions obtenim :

$$72 = 2c \cdot b \cdot c = 2bc^2$$

null

- Aïllar de la relació anterior una variable i substituir en la funció.

$$A = 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c + 2 \cdot a \cdot b = 2 \cdot (2c) \cdot c + 2 \cdot b \cdot c + 2 \cdot (2c) \cdot b = 4c^2 + 2 \cdot b \cdot c + 4bc = 4c^2 + 6 \cdot b \cdot c$$

$$A = 4c^2 + 6 \left(\frac{36}{c^2} \right) c$$

$$A = 4c^2 + \frac{216}{c}$$

- Trobar els extrems (màxims i mínims) de la funció, resolent l'equació $f'(x) = 0$

$$A' = 8c + \left(\frac{-216}{c^2} \right)$$

$$A' = 8c - \frac{216}{c^2} = 0$$

$$8c^3 = 216$$

$$c^3 = \frac{216}{8}$$

$$c^3 = \frac{216}{8}$$

$$c^3 = 27$$

$$c = \sqrt[3]{27} = 3$$

- Comprovar si són màxims o mínims

Es pot comprovar de dos formes.

En aquest exercici comprovarem en la segona derivada.

Si $f''(\text{punt}) > 0 \rightarrow$ el punt és mínim

Si $f''(\text{punt}) < 0 \rightarrow$ el punt és màxim

En el nostre cas, calcularem la segona derivada

$$A'' = 8 + \frac{432}{c^3}$$

$$A''(3) = 8 + \frac{432}{3^4} > 0$$

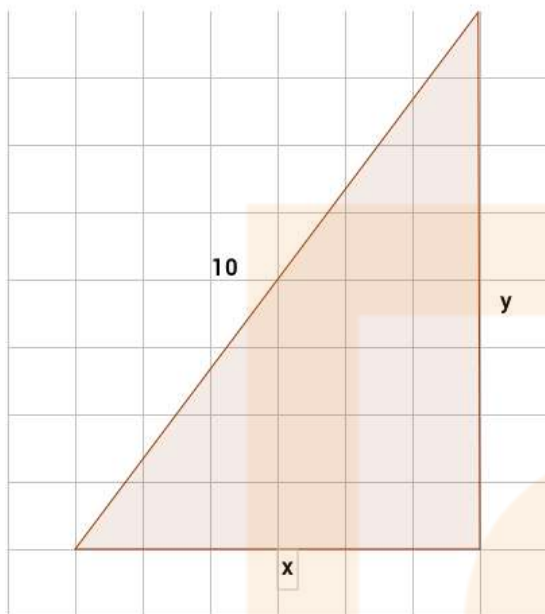
Per tant en $c = 3$ la funció presenta un mínim

- Analitza

El resultat té sentit ja que hem obtingut un ortoedre de dimensions $c = 3$ cm, $a = 6$ cm i $b = 36/c^2 = 36/9 = 4$ cm

Exemple 2

De tots els triangles rectangles d'hipotenusa 10 cm, trobeu la longitud dels catets del triangle que té perímetre màxim. Comproveu que la solució trobada correspon realment al de perímetre màxim.



- Identificar les variables del problema.

x = catet (base del triangle) y = catet (altura del triangle)

- Escriure algebraicament la funció que s'ha d'optimitzar

Perímetre màxim. Per tant la funció a maximitzar és el perímetre.

P = Perímetre = Suma de tots els costats = $x + y + 10$

- Escriure algebraicament la relació entre les variables

La relació entre les variables és el Teorema de Pitàgores: $x^2 + y^2 = 10^2$

- Aïllar de la relació anterior una variable i substituir en la funció. Cal aconseguir que la funció sigui d'una única variable.

$$y = \sqrt{10^2 - x^2}$$

$$P = x + \sqrt{100 - x^2} + 10$$

- Trobar els extrems (màxims i mínims) de la funció, resolent l'equació $f'(x) = 0$

Cal derivar la funció $P(x)$ d'una variable

$$P'(x) = 1 + \frac{-2x}{2 \cdot \sqrt{100 - x^2}} + 0 \quad \Rightarrow \quad P'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$P'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{x}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{100 - x^2} &= x & \Rightarrow \text{Elevant al quadrat: } (\sqrt{100 - x^2})^2 &= (x)^2 \\ 100 - x^2 &= x^2 & \Rightarrow 2 \cdot x^2 &= 100 \end{aligned}$$

$$x = \pm\sqrt{50} = \pm 5\sqrt{2} \approx \pm 7.07 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{100 - x^2} = \pm\sqrt{50} \approx \pm 7.07$$

- Comprovar si són màxims o mínims

Els valors negatius no els tindrem en compte donat que no poden correspondre a la mida dels catets d'un triangle rectangle.

$$f''(x) = 0 - \frac{1 \cdot \sqrt{100-x^2} - x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}}}{(\sqrt{100-x^2})^2}$$

$$f''(x) = - \frac{\sqrt{100-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{100-x^2}}}{(\sqrt{100-x^2})^2} = - \frac{\sqrt{100-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{100-x^2}}}{100-x^2}$$

$$\text{Hem d'estudiar el signe de } f''(7,07) = - \frac{\sqrt{100-50} + \frac{50}{\sqrt{100-50}}}{100-50} = - \frac{\sqrt{50} + \frac{50}{\sqrt{50}}}{50} < 0$$

Per tant en $x=7,07$ la funció té un màxim.

- Analitzar la coherència de la solució dins dels context de l'enunciat

$$\text{El resultat } x = \pm\sqrt{50} = \pm 5\sqrt{2} \approx \pm 7.07 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{100-x^2} = \pm\sqrt{50} \approx \pm 7.07$$

tenen sentit en el context del problema. Observeu que el triangle de màxim perímetre és el triangle isòsceles, que té el dos catets iguals.

Les vendes anuals S d'un nou producte s'expressen segons aquesta fórmula: $S = \frac{5000 t^2}{8 + t^2}$ on $0 \leq t \leq 3$ i $t = \text{expressat en anys}$

a) Completa la taula següent

x	0.5	1	1.5	2	2.5	3
S						

b) En quin moment concret les vendes van ser les màximes?

Resposta

$$S(0,5) = \frac{5000 \cdot (0,5)^2}{8 + (0,5)^2} = 151 \text{ articles venuts}$$

$$S(1) = \frac{5000 \cdot (1)^2}{8 + (1)^2} = 555 \text{ articles venuts}$$

$$S(1,5) = \frac{5000 \cdot (1,5)^2}{8 + (1,5)^2} = 1097 \text{ articles venuts}$$

$$S(2) = \frac{5000 \cdot (2)^2}{8 + (2)^2} = 1666 \text{ articles venuts}$$

$$S(2,5) = \frac{5000 \cdot (2,5)^2}{8 + (2,5)^2} = 2192 \text{ articles venuts}$$

$$S(3) = \frac{5000 \cdot (3)^2}{8 + (3)^2} = 2647 \text{ articles venuts}$$

Ja es veu que a mida que va passant el temps, va creixent el nombre d'articles venuts. En l'interval $[0,3]$ sembla que el màxim s'obtindrà en $x=3$

Estudiem la derivada per saber si hi ha un extrem en l'interval $[0,3]$. Si no hi ha cap extrem, vol dir que el mínim i màxim de la funció serà o en $x=0$ o en $x=3$

$$S'(x) = \frac{(10000 t) \cdot (8 + t^2) - (5000 t^2) \cdot (2t)}{(8 + t^2)^2} = \frac{80000 t + 10000 t^3 - 10000 t^3}{(8 + t^2)^2}$$

$$S'(x) = \frac{80000 t}{(8 + t^2)^2}$$

$$S'(x) = 0$$

$$\frac{80000 t}{(8 + t^2)^2} = 0 \Rightarrow t = 0$$

Veiem que si hi ha un extrem (màxim o mínim) relatiu ha d'estar en $x=0$

$S(0) = 0$ articles. Correspon al mínim

El màxim per tant està en $x=3$.

Exercici 1.

Aquesta expressió $f(x) = 500 - \frac{x^2}{8000}$ relaciona x = nombre d'unitats venudes d'un producte, i $f(x)$ el preu en euros de cada unitat.

Se sap que la fabricació té unes despeses fixes de 100 000 euros i unes despeses variables de 100 euros per unitat fabricada.

- Trobeu la funció $B(x)$ que expressi el benefici obtingut per la venda de " x " unitats. Els Beneficis s'obtenen de restar els ingressos menys les despeses.
- Calculeu el nombre d'unitats que cal fabricar per obtenir el màxim de beneficis.
- Quin és el preu per unitat òptim?

Recordeu els passos:

- Identificar les variables del problema.
 - Escriure algebraicament la funció que s'ha d'optimitzar
 - Escriure algebraicament la relació entre les variables
 - Aïllar de la relació anterior una variable i substituir en la funció. Cal aconseguir que la funció sigui d'una única variable.
 - Trobar els extrems (màxims i mínims) de la funció, resolent l'equació $f'(x) = 0$
 - Comprovar si són màxims o mínims
 - Analitzar la coherència de la solució dins del context de l'enunciat
- Pas 1. Identificar les variables x =nombre d'unitats venudes d'un producte. Només hi ha una variable.
 - Pas 2. Escriure algebraicament la funció que s'ha d'optimitzar. Observeu que la funció $f(x)$ no és la funció a optimitzar. S'ha d'optimitzar el benefici

$$B(x) = \text{Ingressos} - \text{Despeses} = x \cdot \left[500 - \frac{x^2}{8000} \right] - [100000 + 100x]$$

Els ingressos es calculen multiplicant les unitats pel preu de cada unitat

Les despeses són els 100000 euros més 100 euros per cada unitat fabricada

- Pas 3 i Pas 4 no s'han de fer, ja que només hi ha una variable
- Pas 5 Trobar els extrems de la funció $B(x)$

$$B(x) = x \cdot \left[500 - \frac{x^2}{8000} \right] - [100000 + 100x] = 500x - \frac{x^3}{8000} - 100000 - 100x = 400x - \frac{x^3}{8000} - 100000$$

Es deriva aquesta funció:

$$B'(x) = 400 - \frac{3x^2}{8000}$$

S'igual a zero

$$B'(x) = 400 - \frac{3x^2}{8000} = 0 \Rightarrow 0 = 400 - \frac{3x^2}{8000} \Rightarrow -400 = -\frac{3x^2}{8000} \Rightarrow -3200000 = -3x^2 \Rightarrow \frac{3200000}{3} = x^2$$

$$x = \pm 1032$$

Només la solució positiva té sentit

- Pas 6 Comprovar si són és màxim o mínim. Podem usar la segona derivada.

$$B''(x) = \frac{-6x}{8000}$$

$$B''(1032) = \frac{-6(1032)}{8000} = - \text{ per tant és màxim}$$

- Analitzem la coherència del resultat. Encara que s'han obtingut dos resultats només el resultat positiu té sentit.

Resposta: S'ha obtingut que **cal fabricar 1032 unitats** del producte per tal que el benefici sigui màxim. I el preu per unitat serà

$$f(1032) = \left(500 - \frac{1032^2}{8000} \right) = 366,87 \text{ euros}$$



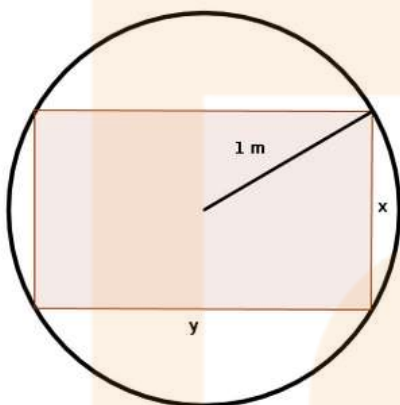
Exercici :

Trobeu les dimensions del rectangle inscrit en un cercle de radi 1m, que tingui l'àrea màxima.

Per tal de donar resposta us adjuntem la figura que il·lustra la situació.

També explicitem els passos a seguir:

- a) Assigneu incògnites. En aquesta cas ja les hem explicat en el gràfic.
- b) Escriviu l'àrea del rectangle en funció de "x" i "y"
- c) Escriviu la relació entre les incògnites x, y, usant el Teorema de Pitàgores.
- d) Aïlleu "y" (es podria aïllar l'altra incògnita)
- e) Escriviu ara, l'àrea del rectangle en funció de només la incògnita "x"
- f) Calculeu el màxim, derivant la funció (d'una sola variable) obtinguda en l'apartat anterior.

**Resolució:**

a) x = alçada del rectangle i y = base del rectangle

b) Àrea del rectangle = $x \cdot y$

c) Relació entre " x " i " y " i la diagonal del cercle, tenint en compte que es pot aplicar el Teorema de Pitàgores, donat que la base, l'altura i la diagonal formen un triangle rectangle--> $x^2 + y^2 = 2^2$

$$\begin{aligned} \text{d) } y^2 &= 4 - x^2 \\ y &= \sqrt{4 - x^2} \end{aligned}$$

$$\text{e) } \text{Àrea rectangle} = x \cdot y = x \cdot \sqrt{4 - x^2}$$

$$A = x \cdot \sqrt{4 - x^2}$$

$$A' = 1 \cdot \sqrt{4 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2 \cdot \sqrt{4 - x^2}} = \sqrt{4 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$$

Cal resoldre l'equació $A' = 0$

$$\text{f) } \sqrt{4 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{4 - x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} \Rightarrow$$

$$(\sqrt{4 - x^2})(\sqrt{4 - x^2}) = x^2 \Rightarrow 4 - x^2 = x^2 \Rightarrow 4 = 2x^2 \Rightarrow$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

Els valor negatiu no es pot tenir en compte com a mesura d'un costat d'un rectangle

$$x = \sqrt{2}$$

A partir d'aquest valor de " x " calculem el valor d' " y "

$$y = \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}$$

Establirem intervals i estudiarem el signe de la derivada i el creixement de la funció per saber si "x" és màxim o mínim

valor x	$(0, \sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}, +\infty)$
signe A'	$A'(1) = +$		$A'(2) = -$
creixement de la funció A	creixent	màxim	decreixent

Per tant en $x = \sqrt{2}$ la funció té un màxim

Solució : **El rectangle d'àrea màxima que es pot inscriure en el cercle de radi 1, és un QUADRAT de costat $\sqrt{2}$**



Exercici:

Trobar els valors de "a" i "b" per tal que la funció $f(x)$ passi pels punts A(0,2) i B(2,0) i en A tingui un màxim : $f(x) = (b-x) \cdot e^{ax}$

Resolució:

Cal traduir les condicions del problema a equacions

a) $f(x)$ passa per A $\rightarrow f(0)=2 \rightarrow f(0) = (b-0) \cdot e^{a \cdot (0)} = (b) \cdot e^{(0)} = \boxed{b=2}$

b) $f(x)$ passa per B $\rightarrow f(2)=0 \rightarrow f(2) = (b-2) \cdot e^{a \cdot (2)} = (2-2) \cdot e^{(2a)} = \boxed{0=0}$

c) $f(x)$ té un màxim en A $\rightarrow f'(0)=0 \rightarrow$

$$f'(x) = (-1) \cdot e^{ax} + (b-x) \cdot e^{ax} \cdot a$$

$$f'(0) = (-1) \cdot e^0 + (2-0) \cdot e^0 \cdot a = -1 + 2a = 0 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

Us proposem un exercici que va aparèixer en les proves de selectivitat de l'any 2018.

Sigui $f(x) = x^3 - ax^2 + bx + c$

Calculeu els valors dels paràmetres: **a**, **b** i **c** per tal que la funció **f(x)** compleixi aquests requisits:

- Tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x=1$
- La recta tangent a la funció $f(x)$ en $x=0$ sigui la recta $y = x + 3$

Resolució:

S'ha de traduir les condicions del problema a equacions.

1a. condició. $f(x)$ ha de tenir un extrem relatiu en $x=1$. Això vol dir que **$f'(1) = 0$**

2a. condició. La recta tangent a la funció en $x=0$ és la recta $y = x + 3$. Aquí hi ha dues equacions amagades. **$f'(0) = 1$ i $f(0) = 3$** .

Aquí cal veure que el pendent de la recta tangent coincideix amb la derivada en el punt **$x=0$** . La recta tangent té pendent $m=1$ per tant $f'(0)=m=1$. Per una altra banda si $x=0$ el valor de y en la recta és $y=0+3=3$, per tant el punt on coincideixen la recta tangent i la funció $f(x)$ és en el punt $(0,3)$

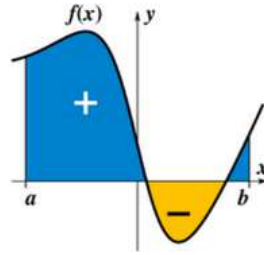
Ara només queda resoldre el sistema format per aquestes tres equacions:

$$f(x) = x^3 - ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2ax + b$$

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f'(0) = 1 \\ f(0) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 3(1)^2 - 2a(1) + b = 0 \\ f'(0) = 3(0)^2 - 2a(0) + b = 1 \\ f(0) = 0^3 - a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - b = 3 \\ b = 1 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 3 \end{cases}} \Rightarrow \text{Aquests són els valors dels paràmetres}$$



Introducció a la integració



La **derivació** i la **integració** són dos procediments matemàtics molt potents i útils en la resolució d'una infinitat de problemes. Aquests dos procediments són la base del **Càlcul infinitesimal**.

La integració permet calcular àrees i volums de cossos geomètrics i resoldre problemes d'altres àmbits, com ara l'Economia i la Física.

En aquest recurs trobareu un resum dels conceptes bàsics sobre integració i exemples d'aplicació.

S'explica com:

- Calcular la funció primitiva d'una funció
- Calcular integrals immediates i quasiimmediates
- Calcular integrals pels mètodes d'integració de substitució i parts
- Calcular integrals de funcions racionals senzilles
- Calcular integrals definides
- Calcular àrea de la regió del pla compresa entre dos funcions
- La integral permet resoldre situacions de la vida real.

Concepte de integració.

La integració.

La integració es pot definir com el procés invers a la derivació. Així doncs **calcular la integral d'una funció $f(x)$ és trobar una altra funció $g(x)$ de forma que $g'(x) = f(x)$**

L'expressió: es llegeix com **la integral de la funció $f(x)$ respecte la variable x .**

Per calcular integrals, cal saber bé derivar, i tenir interioritzades les derivades de les funcions més usuals

Exemple

$$\int 1 \cdot dx = x + k$$

Posem aquesta K, que vol dir que qualsevol nombre va bé.

Dit d'una altra forma :

$$\int 1 \cdot dx = x + 1$$

$$\int 1 \cdot dx = x + 30$$

$$\int 1 \cdot dx = x - 0,5$$

Observeu que si derivem la funció $g(x) = x + k$ obtenim $g'(x) = 1$

Per tant es compleix la idea de que fer la integral de $f(x)$ és buscar una funció $g(x)$ que al derivar-la dona $g'(x) = f(x)$

Exemple

$$\int x \cdot dx = \frac{x^2}{2} + k$$

Observeu que si derivem la funció $g(x) = \frac{x^2}{2} + k$ obtenim $g'(x) = x$

Exemple

$$\int x^2 \cdot dx = \frac{x^3}{3} + k$$

Observeu que si derivem la funció $g(x) = \frac{x^3}{3} + k$ obtenim $g'(x) = x^2$

Exemple

$$\int x^3 \cdot dx = \frac{x^4}{4} + k$$

Observeu que si derivem la funció $g(x) = \frac{x^4}{4} + k$ obtenim $g'(x) = x^3$



Taula integrals immediates

Taula d'integrals immediates

Aquesta taula permet calcular les integrals immediates. La taula es construeix a partir de la [taula de derivades](#).

Primitives immediates

$\int 0 \cdot dx = C = \text{constant} = n^{\circ} \text{ real}$		$\int 1 \cdot dx = x + C$	
$\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C ; \text{ si } n \neq -1$		$\int u^n \cdot u' \cdot dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C ; \text{ si } n \neq -1$	
$\int \frac{1}{x} \cdot dx = \text{Ln} x + C$		$\int \frac{u'}{u} \cdot dx = \text{Ln} u + C$	
$\int e^x \cdot dx = e^x + C$		$\int e^u \cdot u' \cdot dx = e^u + C$	
$\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\text{Ln}(a)} + C$		$\int a^u \cdot u' \cdot dx = \frac{a^u}{\text{Ln}(a)} + C$	

Primitives immediates

Primitives immediates trigonomètriques

$\int \sin(x) \cdot dx = -\cos(x) + C$		$\int u' \cdot \sin(u) \cdot dx = -\cos(u) + C$	
$\int \cos(x) \cdot dx = \sin(x) + C$		$\int u' \cdot \cos(u) \cdot dx = \sin(u) + C$	
$\int \frac{1}{\cos^2(x)} \cdot dx = \text{tang}(x) + C$		$\int \frac{u'}{\cos^2(u)} \cdot dx = \text{tang}(u) + C$	
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \arcsin(x) + C$		$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \cdot dx = \arcsin(u) + C$	
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \arccos(x) + C$		$\int \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} \cdot dx = \arccos(u) + C$	
$\int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \text{arctang}(x) + C$		$\int \frac{u'}{1+u^2} \cdot dx = \text{arctang}(u) + C$	

Primitives immediates trigonomètriques

Integral indefinida. Primitives

Integral indefinida. Primitiva. Diferències entre els dos conceptes.

La primitiva d'una funció és una única. La integral indefinida són moltes.

- Una funció $F(x)$ és una **primitiva** d'una funció $f(x)$ quan $F'(x)=f(x)$
- **Integral indefinida** d'una funció $f(x)$ és el conjunt de totes les primitives de $f(x)$

Per exemple les funcions $G(x)=x^2+1$, $H(x)=x^2$, $J(x)=x^2+\frac{2}{3}$ i $K(x)=x^2-\sqrt{2}$ són primitives de la funció $f(x)=2x$ ja que al derivar-les ens dona $f(x)$:

$$(x^2+1)' = 2x$$

$$(x^2)' = 2x$$

$$\left(x^2 + \frac{2}{3}\right)' = 2x$$

$$(x^2 - \sqrt{2})' = 2x$$

Però hi ha moltíssimes més funcions que són primitives de $f(x)$. Qualsevol funció que sigui del tipus $F(x)=x^2+C$ on C pot ser qualsevol nombre real ($C \in \mathbb{R}$) serà una primitiva.

Al conjunt de totes les primitives de la funció $f(x)$ l'anomenem integral indefinida i es representa $\int f(x) dx$

Per tant el conjunt de totes les primitives de la funció $f(x)=2x$ bé representat per la integral definida $\int 2x dx$

Exemple

Solució

Propietats de les integrals

Quines propietats puc aplicar en el càlcul d'integrals i quines no?

Les úniques propietats que són vàlides i per tant podem utilitzar són :

1. $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$
2. $\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
3. $\int f(x) - g(x) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$

En cap cas són vàlides les igualtats :

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \frac{\int f(x) dx}{\int g(x) dx}$$
$$\int f(x) \cdot g(x) dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$$

Com aplicar les propietats anteriors

Com puc aplicar les propietats anteriors?

Propietat 1:

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$$

Utilitat 1: quan un nombre que està multiplicant a tota la funció ens interessa que no estigui dins la integral ja que $\int f(x) dx$ la coneixem

Exemples :

$$\int 3x^5 dx = 3 \cdot \int x^5 dx = 3 \cdot \frac{x^6}{6} + C = \frac{1}{2}x^6 + C$$

$$\int 2\cos x dx = 2 \cdot \int \cos x dx = 2 \sin x + C$$

$$\int \frac{5}{x} dx = \int 5 \cdot \frac{1}{x} dx = 5 \cdot \int \frac{1}{x} dx = 5 \ln x + C$$

$$\int 10xe^{x^2} dx = \int 5 \cdot 2xe^{x^2} dx = 5 \cdot \int 2xe^{x^2} dx = 5e^{x^2} + C$$

Utilitat 2: quan ens interessaria que hi hagi un nombre que està multiplicant a tota la funció perquè sapiguem resoldre la integral

Exemples :

$$\int \cos(5x) dx = \int \frac{5}{5} \cos(5x) dx = \frac{1}{5} \sin(5x) + C$$

En aquest cas ens interessava tenir un "5" dins de la integral ja que sabem que: $(\sin(5x))' = 5 \cdot \cos(5x)$

$$\int \frac{1}{2x-6} dx = \int \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{2x-6} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2}{2x-6} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2}{2x-6} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln(2x-6) + C$$

En aquest exemple ens interessava tenir un "2" dins de la integral ja que sabem que: $(\ln(2x-6))' = \frac{2}{2x-6}$

$$\int x^2 \cdot e^{x^3} dx = \int \frac{3}{3} \cdot x^2 \cdot e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int 3 \cdot x^2 \cdot e^{x^3} dx = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$$

En aquest exemple ens interessava tenir un "3" dins de la integral ja que: $(e^{x^3})' = e^{x^3} \cdot 3x^2$

Propietat 2 i 3:

$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

Utilitat: quan sabem resoldre la integral per separat de cada funció

Exemples :

$$\int e^x + \sin x dx = \int e^x dx + \int \sin x dx = e^x + (-\cos x) + C = e^x - \cos x + C$$

$$\int \frac{1}{x} - 2xe^{x^2} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int 2xe^{x^2} dx = \ln x - e^{x^2} + C$$

I ara acabem amb exemples que combinen les tres propietats

Exemples :

$$\int 4e^x - 5\sin x dx = 4 \cdot \int e^x dx - 5 \int \sin x dx = 4e^x - 5(-\cos x) + C = 4e^x + 5\cos x + C$$

$$\begin{aligned} \int \frac{6}{x} - xe^{x^2} dx &= \int \frac{6}{x} dx - \int xe^{x^2} dx = 6 \cdot \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{2}{2} xe^{x^2} dx = 6 \ln x - \frac{1}{2} \int 2xe^{x^2} dx = \\ &= 6 \ln x - \frac{1}{2} e^{x^2} + C \end{aligned}$$



Funcions que es poden reduir a potències

Com puc fer més fàcil el càlcul d'algunes integrals?

Hi ha funcions que abans de integrar-les és millor que fem un petit retoc en la seva expressió. Aquest és el cas d'una funció que la seva expressió es pot reduir a una sola potència o a suma o resta de potències.

Si tenim expressada la funció de la manera $f(x) = x^n$ sempre serà més fàcil ja que $\int x^n dx = \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C & \text{si } n \neq -1 \\ \ln x + C & \text{si } n = -1 \end{cases}$

Exemple 1:

Imagina que hem d'integrar la funció $f(x) = \frac{x^5}{\sqrt[4]{x^3}}$.

Fixem-nos que $f(x) = \frac{x^5}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{x^5}{x^{\frac{3}{4}}} = x^{5 - \frac{3}{4}} = x^{\frac{17}{4}}$

Aleshores $\int \frac{x^5}{\sqrt[4]{x^3}} dx = \int x^{\frac{17}{4}} dx = \frac{x^{\frac{17}{4}+1}}{\frac{17}{4}+1} + C = \frac{x^{\frac{21}{4}}}{\frac{21}{4}} + C = \frac{4}{21} \sqrt[4]{x^{21}} + C$

Exemple 2:

Ens demanen $\int \frac{2}{x^4} - \sqrt[5]{x^2} - 3x^2 + \frac{1}{\sqrt[6]{x}} dx$.

La manera més senzilla de fer aquesta integral és primer arreglant l'expressió de la funció abans d'integrar

$\frac{2}{x^4} - \sqrt[5]{x^2} - 3x^2 + \frac{1}{\sqrt[6]{x}} = 2x^{-4} - x^{\frac{2}{5}} - 3x^2 + x^{-\frac{1}{6}}$

Ara resollem ja la integral

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{x^4} - \sqrt[5]{x^2} - 3x^2 + \frac{1}{\sqrt[6]{x}} dx &= \int 2x^{-4} - x^{\frac{2}{5}} - 3x^2 + x^{-\frac{1}{6}} dx = 2 \cdot \frac{x^{-4+1}}{-4+1} - \frac{x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} - 3 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^{-\frac{1}{6}+1}}{-\frac{1}{6}+1} + C = \\ &= -\frac{2}{3}x^{-3} - \frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} - x^3 + \frac{x^{\frac{5}{6}}}{\frac{5}{6}} + C = -\frac{2}{3x^3} - \frac{5}{7}\sqrt[5]{x^7} - x^3 + \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + C \end{aligned}$$

Exemple 3:

També podem utilitzar aquesta tècnica per integrar funcions racionals quan el denominador estigui format per un sol monomi

És per exemple el cas de la funció $g(x) = \frac{2x^4 - 4x + 1}{x^2}$.

Primer separem l'expressió en tants trossos com termes té el numerador i després reduïm cada tros a una potència

$g(x) = \frac{2x^4 - 4x + 1}{x^2} = \frac{2x^4}{x^2} - \frac{4x}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 2x^2 - 4x^{-1} + x^{-2}$

Ara resollem ja la integral

$$\int \frac{2x^4 - 4x + 1}{x^2} dx = \int 2x^2 - 4x^{-1} + x^{-2} dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \ln x + \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{2}{3}x^3 - 4\ln x - \frac{1}{x} + C$$

Integració per canvi de variable.

Exemple 1.

$$\int \frac{50}{\sqrt{1+2x}} dx$$

$$u = \sqrt{1+2x} \Rightarrow u^2 = 1+2x \Rightarrow \frac{u^2-1}{2} = x$$

$$\text{derivem aquesta última expressió : } x = \frac{u^2-1}{2}$$

$$1 \cdot dx = \frac{2u}{2} \cdot du$$

$$dx = u \cdot du$$

Ara substituïm en la integral inicial :

$$\int \frac{50}{\sqrt{1+2x}} dx = \int \frac{50}{u} \cdot u \cdot du = \int 50 \cdot du = 50 \int 1 \cdot du = 50 \cdot [u] = 50 \cdot \sqrt{1+2x} + k$$

Observeu que aquesta integral es podria plantejar com quasi immediata, obtenint el mateix resultat.

Mètode integració per parts

Mètode d'integració per parts

És un mètode molt útil en la integració de funcions que són el producte (multiplicació) d'altres funcions. Consisteix en separar la funció a integrar en dues parts. Una part s'anomenarà u i l'altra dv . I s'aplicarà la següent fórmula:

El càlcul de la integral d'una funció formada pel producte (multiplicació) de dues funcions **no** es pot fer integrant cada una de les funcions per separat. Això és degut a que la derivada del producte de dues funcions no és la derivada de cada una de les funcions. Una forma d'integrar el producte de dues funcions és usar el mètode d'integració per parts.

Mètode

Encara que és un mètode simple cal aplicar-lo correctament. Observeu que després d'aplicar el mètode d'integració per parts, cal resoldre una segona integral, que necessàriament ha de ser més fàcil que la primera i si no és així, és que s'han triat incorrectament les parts.

Passos a seguir:

1. L'integrand (funció inicial) ha de ser producte (multiplicació) de dues funcions (factors).
2. Un dels factors serà u i l'altra dv .
3. S'ha de calcular du derivant l'expressió u .
4. S'ha de calcular v integrant dv .
5. S'ha d'aplicar la fórmula.
6. S'ha de resoldre la integral que queda.

Exemple

Solució

Com sabem en la integració per parts qui és u i qui dv

En la integració per parts com sabem quin dels dos membres és u i quin és dv ? u és sempre el primer?

No és sempre u el primer factor. L'ordre no determina l'elecció. Normalment procedim de la següent manera:

- Si els dos factors que s'estan multiplicant els se integrar i un dels dos és un polinomi, llavors agafem com a u el polinomi. D'aquesta manera en la integral que queda surt el grau rebaixat i per tant una integral més senzilla. per exemple:

$$\int e^x \cdot (x^2 + 3) dx = e^x \cdot (x^2 + 3) - \int 2xe^x dx$$

$$\begin{cases} u = x^2 + 3 \rightarrow du = 2x \\ dv = e^x \rightarrow v = e^x \end{cases}$$

Ara tornarem a fer el mateix amb la integral que ens queda que com veus és del mateix estil però on el polinomi és d'un grau menor

$$\int e^x \cdot (x^2 + 3) dx = e^x \cdot (x^2 + 3) - \int 2xe^x dx = e^x \cdot (x^2 + 3) - \left[2xe^x - \int 2e^x dx \right] = e^x \cdot (x^2 + 3) - 2xe^x + 2e^x + K =$$

$$\begin{cases} u = x^2 + 3 \rightarrow du = 2x \\ dv = e^x \rightarrow v = e^x \end{cases} \quad \begin{cases} u = 2x \rightarrow du = 2 \\ dv = e^x \rightarrow v = e^x \end{cases}$$

$$e^x(x^2 + 3 - 2x + 2) + K = \boxed{e^x(x^2 - 2x + 5) + K}$$

- Si sols sabem integrar un dels dos factors llavors, aquest és dv . Per exemple

$$\int x \cdot \ln x \cdot dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2}x^2 \cdot dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \int \frac{1}{2}x \cdot dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + K = \boxed{\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + K}$$

$$\begin{cases} u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} \\ dv = x \rightarrow v = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

- De vegades no en sap integrar cap i sols hi ha un factor. En aquest cas afegim la funció 1 multiplicant i aquesta serà la funció a derivar. Per exemple

$$\int \ln x \cdot dx = \int 1 \cdot \ln x \cdot dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = x \cdot \ln x - \int 1 \cdot dx = \boxed{x \cdot \ln x - x + K}$$

$$\begin{cases} u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} \\ dv = 1 \rightarrow v = x \end{cases}$$

- Si se sap integrar les dues funcions, en principi s'ha de provar de les dues maneres i escollir la que doni lloc a una integral més senzilla.

Integrals on hi ha un logaritme

Si quan busquem la primitiva d'una funció en aquesta hi ha un $\ln x$ (logaritme neperià de x) aquest té alguna integral indefinida immediata? Com es resol?

No hi ha un mètode directe. Depèn de la integral si és quasi immediata o si es fa per canvi de variable, o per parts o altres mètodes que no estudiarem en aquest curs.

Abans heu vist un exemple que contenia un logaritme i que s'ha resolt per parts. Ara us mostrem un exemple on aplicarem canvi de variable i integral quasi-immediata.

Exemple:

$$\int \frac{\ln^2(2x+1)}{2x+1} dx$$

Com a integral quasi-immediata:

Fixeu-vos que si s'arregla l'expressió de la funció a integrar s'adequa a aplicar que $\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + k$

$$\int \frac{\ln^2(2x+1)}{2x+1} dx = \int \frac{2}{2} \cdot [\ln(2x+1)]^2 \cdot \frac{1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int [\ln(2x+1)]^2 \cdot \frac{2}{2x+1} dx$$

Hem inserit un 2 que necessitava ja que $(\ln(2x+1))' = \frac{1}{2x+1} \cdot 2 = \frac{2}{2x+1}$.

De fet s'ha multiplicat per 1 = 2/2 I PER TANT queda igual .

Ara ja podem finalitzar la integral

$$\int \frac{\ln^2(2x+1)}{2x+1} dx = \int \frac{2}{2} \cdot [\ln(2x+1)]^2 \cdot \frac{1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int [\ln(2x+1)]^2 \cdot \frac{2}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{[\ln(2x+1)]^3}{3} + K = \boxed{\frac{[\ln(2x+1)]^3}{6} + K}$$

Per canvi de variable:

$$\int \frac{\ln^2(2x+1)}{2x+1} dx = \int \frac{t^2}{\cancel{(2x+1)}} \cdot \frac{(2x+1)}{2} \cdot dt = \int \frac{1}{2} t^2 dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^3}{3} + K = \frac{1}{6} t^3 + K = \boxed{\frac{1}{6} [\ln(2x+1)]^3 + K}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \ln(2x+1) \\ dt = \frac{2}{2x+1} \cdot dx \rightarrow dx = \frac{2x+1}{2} \cdot dt \end{array} \right\}$$

Integrals definides

- Càlcul d'integrals definides
- Concepte d'integral definida
- Càlcul d'àrees sota una corba



Càlcul d'integrals definides

Com es calcula una integral definida?

Si $f(x)$ és contínua en $[a,b]$ i $G(x)$ és una primitiva seva, aleshores:

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

Exemple 1:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 x^2 - 4 dx &= \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_{-1}^2 = \frac{8}{3} - 8 - \left(-\frac{1}{3} - 4(-1) \right) = \frac{8}{3} - 8 + \frac{1}{3} - 4 = \\ &= \frac{8}{3} + \frac{1}{3} - 12 = \frac{9}{3} - 12 = 3 - 12 = \boxed{-9} \end{aligned}$$

Exemple 2:

$$\int_{-1}^0 x e^{x^2-3} dx$$

Primer busquem una primitiva de la funció.

Observem que $(e^{x^2-3})' = e^{x^2-3} \cdot 2x = 2xe^{x^2-3}$ i per tant és una integral immediata

$$\int x e^{x^2-3} dx = \int \frac{2}{2} \cdot x e^{x^2-3} dx = \frac{1}{2} \cdot \int 2x e^{x^2-3} dx = \frac{1}{2} e^{x^2-3} + C$$

Ara ja podem resoldre la integral definida

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 x e^{x^2-3} dx &= \left[\frac{1}{2} e^{x^2-3} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{2} e^{-3} - \frac{1}{2} e^{-2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^3} - \frac{1}{e^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^3} - \frac{e}{e^3} \right) = \boxed{\frac{1-e}{2e^3}} \end{aligned}$$

Exemple 3:

$$\int_{-1}^2 \frac{x}{3x^2+5} dx$$

Primer busquem una primitiva de la funció.

Observem que $(\ln(3x^2+5))' = \frac{1}{3x^2+5} \cdot 6x = \frac{6x}{3x^2+5}$ i per tant és una integral immediata

$$\int \frac{x}{3x^2+5} dx = \int \frac{6}{6} \cdot \frac{x}{3x^2+5} dx = \frac{1}{6} \cdot \int \frac{6x}{3x^2+5} dx = \frac{1}{6} \cdot \ln(3x^2+5) + C$$

Ara ja podem resoldre la integral definida

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \frac{x}{3x^2+5} dx &= \left[\frac{1}{6} \ln(3x^2+5) \right]_{-1}^2 = \frac{1}{6} \ln(17) - \frac{1}{6} \ln(8) = \frac{1}{6} (\ln(17) - \ln(8)) = \\ &= \frac{1}{6} \ln\left(\frac{17}{8}\right) = \boxed{\frac{1}{6} \ln\left(\frac{17}{8}\right)} \end{aligned}$$

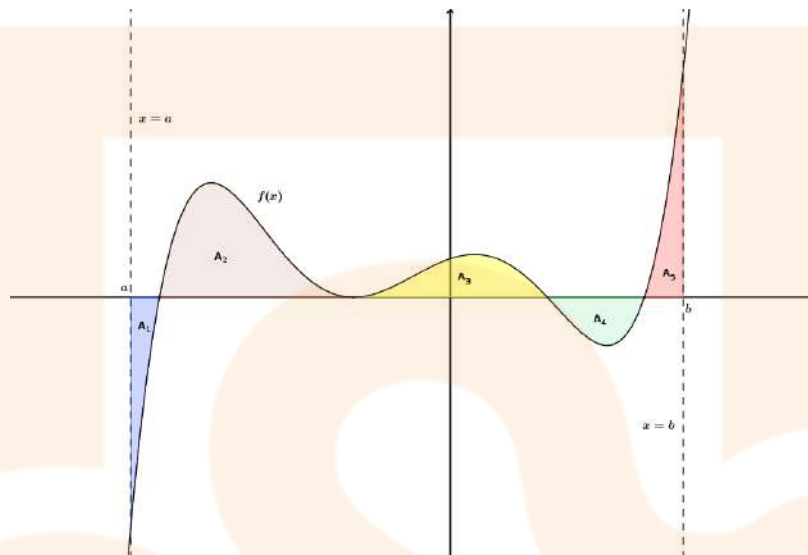
Concepte d'integral definida

Què representa fer una integral definida?

La integral definida $\int_a^b f(x) dx$ representa fer una suma i restes d'àrees compreses entre la gràfica de la funció, l'eix d'abscisses i les rectes $x=a$ i $x=b$, tenint en compte que si l'àrea queda per sota de l'eix de les X és resta i si queda per sobre es suma

Per exemple si tenim una funció la gràfica de la qual és la de sota, tindríem que

$$\int_a^b f(x) dx = -A_1 + A_2 + A_3 - A_4 + A_5$$



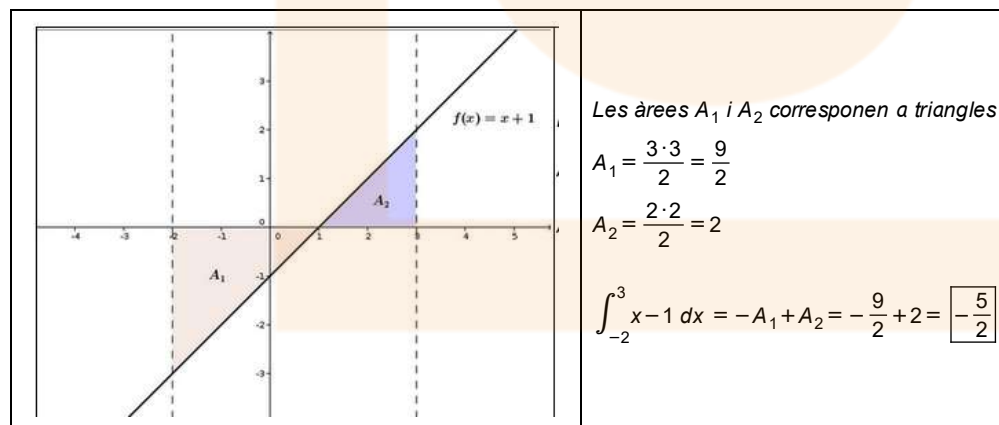
Comprovem això amb un exemple concret

Exemple 1:

Calculem primer la integral definida de la funció $f(x)=x-1$ amb límits d'integració $x=-2$ i $x=3$ (per la regla de Barrow)

$$\int_{-2}^3 x-1 dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_{-2}^3 = \frac{9}{2} - 3 - (2 - 2) = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$$

Ara comprovem aquest resultat amb el càlcul de la suma o resta d'àrees



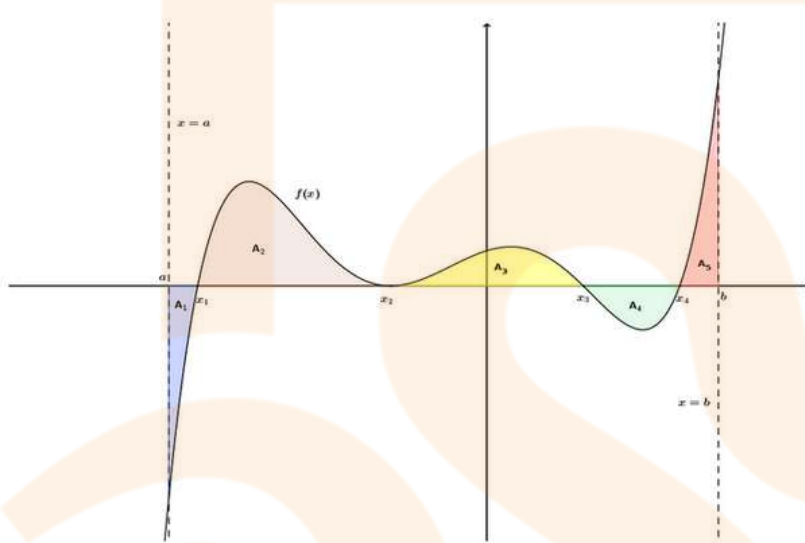
Càlcul d'àrees sota una corba

Com trobar l'àrea compresa entre la gràfica d'una funció, l'eix OX i dues abscisses?

Per trobar una àrea compresa entre la gràfica d'una funció $f(x)$, l'eix d'abscisses i les rectes $x=a$ i $x=b$ cal seguir els passos

1. Trobar els punts de tall de la gràfica de la funció amb l'eix d'abscisses resolent l'equació $f(x)=0$
2. Seleccionar d'entre els punts de tall obtinguts, aquells que es trobin en l'interval $[a,b]$. Imaginem que aquests són x_1, x_2, x_3 i x_4
3. L'interval $[a,b]$ queda dividit en altres intervals si col·loquem els valors anteriors : $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, $[x_3, x_4]$ i $[x_4, b]$
4. Per a cada interval trobat hem d'esbrinar si la gràfica de la funció queda per sobre l'eix OX o per sota
5. En funció de si l'àrea obtinguda queda per sobre o per sota caldrà agafar la integral definida o canviar-li el signe.

Per exemple en el cas:



$$\begin{aligned} \text{Àrea total} &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = \\ &= -\int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx - \int_{x_3}^{x_4} f(x) dx + \int_{x_4}^b f(x) dx \end{aligned}$$

Exemple 1 :

Anem a trobar l'àrea compresa entre la gràfica de la funció $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$, l'eix d'abscisses i les rectes $x = -2$ i $x = 1,5$

1. $f(x)=0 \rightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \rightarrow x = -1, x = 1$ i $x = 2$
2. Dels valors obtinguts agafem els valors $x = -1$ i $x = 1$
3. L'interval $[-2, 1,5]$ queda dividit en 3 intervals: $[-2, -1]$, $[-1, 1]$ i $[1, 1,5]$ i per tant tindrem 3 àrees també: A_1, A_2 i A_3
4. Per a cada interval trobat hem d'esbrinar si la gràfica de la funció queda per sobre l'eix OX o per sota. Per això busquem la imatge d'un valor de cada interval:
 - $f(-1,5) = -4,38 \rightarrow f(x)$ és negativa en l'interval $[-2, -1]$
 - $f(-0,5) = 1,88 \rightarrow f(x)$ és positiva en l'interval $[-1, 1]$
 - $f(1,25) = -0,42 \rightarrow f(x)$ és negativa en l'interval $[1, 1,5]$

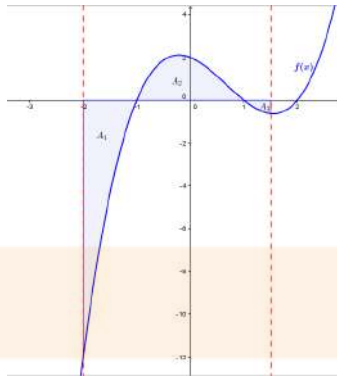
5. Calculem el valor de les diferents àrees i finalment les sumem: Per fer els càlculs el més exacte possible posarem $1,5 = 3/2$

$$A_1 = -\int_{-2}^{-1} f(x) dx = -\int_{-2}^{-1} (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx = -\left[\frac{x^4}{4} - 2 \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{-1} = -\left[\frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{(-1)}{3} - \frac{1}{2} - 2 \cdot \left(4 - 2 \cdot \frac{(-8)}{3} - 2 - 4\right)\right] = \frac{59}{12} \text{ unitats}^2$$

$$A_2 = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2 \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^1 = \left[\frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(\frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{(-1)}{3} - \frac{1}{2} - 2\right)\right] = \frac{8}{3} \text{ unitats}^2$$

$$A_3 = -\int_1^{1,5} f(x) dx = -\int_1^{\frac{3}{2}} (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx = -\left[\frac{x^4}{4} - 2 \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^{\frac{3}{2}} = -\left[\frac{81}{64} - 2 \cdot \frac{27}{24} - \frac{9}{8} + 3 - \left(\frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right)\right] = \frac{37}{192} \text{ unitats}^2$$

$$\text{Àrea total} = A_1 + A_2 + A_3 = - \int_{-2}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^{11} f(x) dx - \int_1^{1.5} f(x) dx = \frac{59}{12} + \frac{8}{3} + \frac{37}{192} = \frac{1493}{192} u^2$$



Exemple 2. Àrea sota una corba

Exercici:

Calculeu l'àrea del recinte entre la corba $f(x) = x^4 - x^2$ i l'eix d'abscisses (eix OX)

Resolució:

Per trobar una àrea compresa entre la gràfica d'una funció $f(x)$, i l'eix d'abscisses, cal seguir els passos

1. Trobar els punts de tall de la gràfica de la funció amb l'eix d'abscisses resolent l'equació $f(x)=0$
2. Suposem que els punts de tall corresponen a x_1, x_2, x_3 i x_4
3. Els intervals on treballarem seran: $[x_1, x_2], [x_2, x_3], [x_3, x_4]$
4. Per a cada interval trobat hem d'esbrinar si la gràfica de la funció queda per sobre l'eix OX o per sota
5. En funció de si l'àrea obtinguda queda per sobre o per sota caldrà agafar la integral definida o canviar-li el signe.

Anem a trobar l'àrea compresa entre la gràfica de la funció $f(x) = x^4 - x^2$, i l'eix d'abscisses.

1. $f(x) = 0 \rightarrow x^4 - x^2 = 0 \rightarrow \boxed{x = -1}, \boxed{x = 1} \text{ i } \boxed{x = 0}$

2. Els 2 intervals, en els que treballarem són: $[-1, 0]$, $[0, 1]$ i per tant tindrem 2 àrees també: A_1, A_2

3. Per a cada interval trobat hem d'esbrinar si la gràfica de la funció queda per sobre l'eix OX o per sota. Per això busquem la imatge d'un valor de cada interval:

- $f(-0,5) = \text{negatiu} \rightarrow f(x)$ és negativa en l'interval $[-1, 0]$
- $f(0) = 0$
- $f(0,5) = \text{negatiu} \rightarrow f(x)$ és negativa en l'interval $(0, 1]$

$$\text{Àrea} = y = \int x^4 - x^2$$

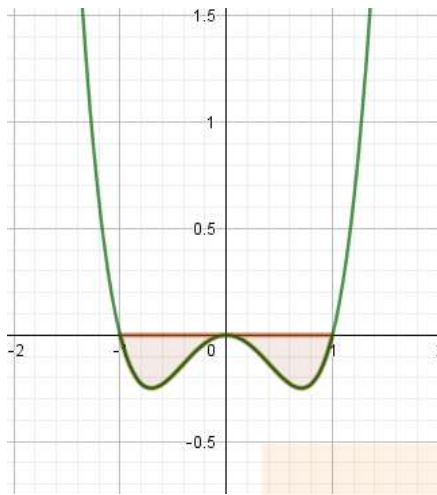
$$A_1 = \int_{-1}^0 (x^4 - x^2) dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 = \left[\frac{0^5}{5} - \frac{0^3}{3} \right] - \left[\frac{(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^3}{3} \right] = \frac{-2}{15}$$

Com és una àrea cal prendre el resultat en valor absolut. Per tant $A_1 = \frac{2}{15}$

$$A_2 = \int_0^1 (x^4 - x^2) dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \left[\frac{(1)^5}{5} - \frac{(1)^3}{3} \right] - \left[\frac{0^5}{5} - \frac{0^3}{3} \right] = \frac{-2}{15}$$

Com és una àrea cal prendre el resultat en valor absolut. Per tant $A_2 = \frac{2}{15}$

$$\text{Àrea total} = |A_1| + |A_2| = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \boxed{\frac{4}{15}}$$



Exemple 3. Integral definida

4. a) Calculeu $\int x \cdot \sin x \, dx$ (podeu aplicar la integració per parts)

b) Calculeu l'àrea limitada per la funció $f(x) = \frac{1}{x}$, l'eix OX i les rectes verticals $x=1$ i $x=e$

a)

$$\int x \sin x \, dx = \begin{cases} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin x \, dx & \Rightarrow v = -\cos x \end{cases} = -x \cos x - \int -\cos x \, dx = \boxed{-x \cos x + \sin x + C}$$

b)

Com que la funció és contínua en l'interval $[1, e]$ i no té cap zero en aquest interval:

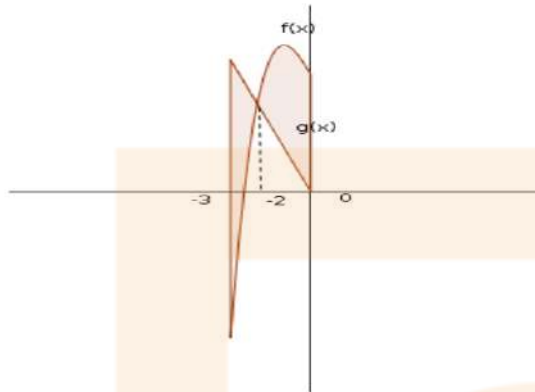
$$\int_1^e \frac{1}{x} \, dx = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = \boxed{1}$$

Càlcul àrea entre dos corbes

Exemple

Calcula l'àrea limitada per les corbes $f(x)=x^3-3x+8$, $g(x)=-3x$ i les verticals $x=-3$ i $x=0$

l'àrea a calcular és



El primer pas que s'ha de fer és trobar els **punts d'intersecció entre les dues corbes**, resolent el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} y = x^3 - 3x + 8 \\ y = -3x \end{cases}$$

$$x^3 - 3x + 8 = -3x$$

$$x^3 + 8 = 0$$

$$x^3 = -8$$

$$x = \sqrt[3]{-8} = -2$$

Àrea = [Àrea compresa entre les dues funcions i $x=-3$ i $x=-2$] + [Àrea compresa entre les dues funcions i $x=-2$ i $x=0$]

Recordant que un àrea ha de ser sempre positiva.

$$Àrea = \left| \int_{-3}^{-2} f(x) - g(x) dx \right| + \left| \int_{-2}^0 f(x) - g(x) dx \right| = \left| \int_{-3}^{-2} (x^3 + 8) dx \right| + \left| \int_{-2}^0 (x^3 + 8) dx \right| = \frac{81}{4}$$

Troba en cada cas l'àrea compresa entre:

b) $y = x^2$ i $y^2 = x$.

Per tant, aquests seran els nostres límits d'integració.

II. S'obté la funció diferència:

$$y = (-x^2 + 5) - (x^2 - 5) = -2x^2 + 10$$

III. Busquem la seva primitiva:

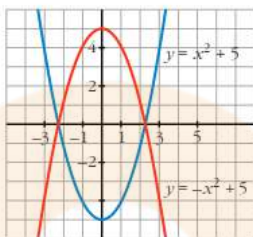
$$G(x) = \int (-2x^2 + 10) dx = \frac{-2x^3}{3} + 10x$$

$$\text{IV. } G(-\sqrt{5}) = \frac{-20}{3}\sqrt{5}, \quad G(\sqrt{5}) = \frac{20}{3}\sqrt{5}$$

$$\text{V. } G(\sqrt{5}) - G(-\sqrt{5}) = \frac{20}{3}\sqrt{5} + \frac{20}{3}\sqrt{5} = \frac{40}{3}\sqrt{5}$$

L'àrea buscada és: $\frac{40}{3}\sqrt{5} \text{ u}^2$.

(S'inclou la gràfica, tot i que és innecessària per obtenir l'àrea.)



b) $y = x^2$ Punts de tall $x^2 = \sqrt{x}$

$$y = \sqrt{x} \qquad x^4 = x$$

$$x^4 - x = 0$$

$x = 0$

$x = 1$

L'arrel en el tram $(0, 1)$ va per sobre de la paràbola:

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) \, dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Aplicacions en altres camps del coneixement

Aplicació en el medi ambient

S'anomena "**cabal**" a la velocitat que porta l'aigua d'un riu. En general, el cabal va en funció dels mesos de l'any. A l'hivern els rius porten més aigua que a l'estiu.

La quantitat d'aigua que passa per un riu durant un període de temps és igual a l'àrea compresa entre la corba, l'eix X i l'interval de temps corresponent.

En aquest exemple imaginem que el cabal de riu segueix aquesta funció:

$$f(t) = 3 + 2 \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

on :

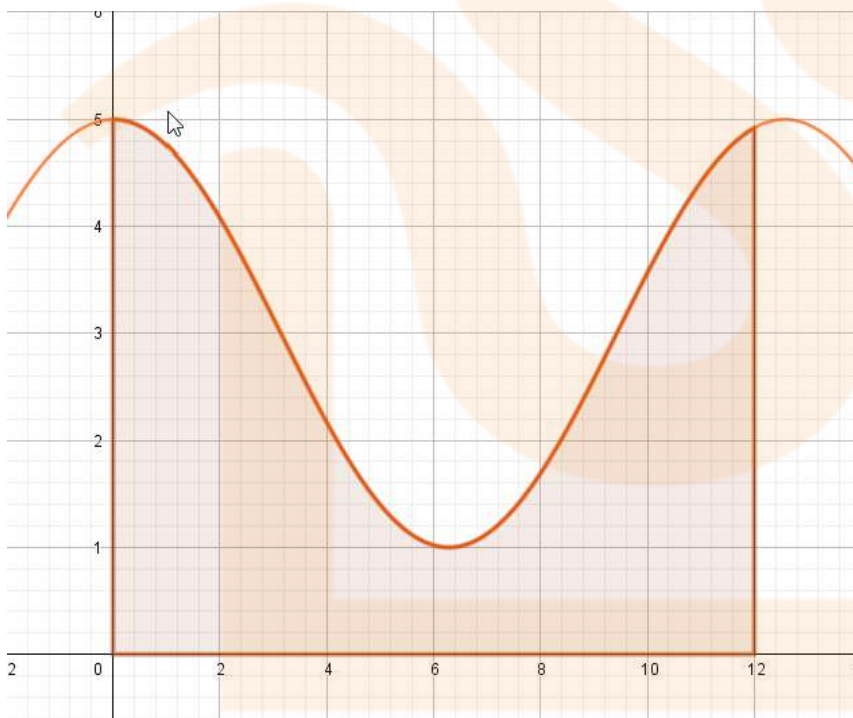
$f(t)$ ve donat en milers de hectolitres per segon i

t ve donat en mesos

Quina quantitat d'aigua passa pel riu durant 1 any?

Resposta:

La gràfica de la funció $f(t)$ és aquesta:



Trobar el cabal del riu al llarg de tot l'any, significa calcular l'àrea sota aquesta corba. Per tant cal integrar la funció donada.

$$\text{Cabal anual} = \int_0^{12} f(t) \cdot dt = \int_0^{12} \left(3 + 2 \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right) \cdot dt$$

a) Primer cal calcular la integral indefinida (sense tenir en compte els límits d'integració)

b) Després substituir la funció obtinguda en els límits d'integració

c) Restar els valors i veure si té sentit el resultat.

a)

$$\begin{aligned}\int f(t) \cdot dt &= \int \left(3 + 2 \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right) \cdot dt = \int 3 \cdot dt + \int 2 \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt = 3t + 2 \int \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt = \\ &= 3t + 2 \cdot 2 \cdot \int \frac{1}{2} \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt = 3t + 4 \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right)\end{aligned}$$

b)

$$\int_0^{12} f(t) \cdot dt = \int_0^{12} \left(3 + 2 \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right) \cdot dt = \left[3t + 4 \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right]_0^{12}$$

c) Restem F(12)-F(0)

$$\begin{aligned}\int_0^{12} f(t) \cdot dt &= \int_0^{12} \left(3 + 2 \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right) \cdot dt = \left[3 \cdot 12 + 4 \cdot \sin \frac{12}{2} \right] - \left[3 \cdot 0 + 4 \cdot \sin \frac{0}{2} \right] = \\ &= 36 + 4 \cdot \sin(6) - 0 - 4 \cdot \sin(0) = 36 + (-1.117) = 34.88 \text{ milers de hl/s}\end{aligned}$$

usant la calculadora, i recordant que els angles estan en "rad" i no en graus

Per tal de tenir una idea de la quantitat d'aigua 34.88 milers de hl per segon = 34880 hl/s = 3 488 000 l/s (litres per cada segon, durant 1 any) Guau !

Dossier amb exercicis resolts

Matemàtiques II – Bloc 2 – Batxillerat

1/4

Càlcul de primitives

Calculeu:

a) $\int \sqrt[5]{x} dx = \int x^{\frac{1}{5}} dx = \frac{1}{\frac{1}{5}+1} x^{\frac{1}{5}+1} + C = \frac{5}{8} x^{\frac{6}{5}} + C = \frac{5}{8} \sqrt[5]{x^6} + C$

b) $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$, utilitzant les propietats de la integral:

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x^2} dx = \ln x + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \ln x - \frac{1}{2x} + C$$

c) $\int x^2 e^x dx$

Tenint en compte que $\int e^x du = e^x + C \Rightarrow \int x^2 e^x dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 e^x dx = \frac{1}{3} e^x + C$

d) $\int_0^{\pi} \cos^3 x dx =$

Tenint en compte que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow$

$$\int \cos^3 x dx = \int \cos x (1 - \sin^2 x) dx = \int \cos x dx - \int \cos x \sin^2 x dx = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

$$\int_0^{\pi} \cos^3 x dx = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x \Big|_0^{\pi} = \sin \pi - \frac{1}{3} \sin^3 \pi - \left(\sin 0 - \frac{1}{3} \sin^3 0 \right) = [0]$$

Calculeu $\int \sqrt{16-x^2} dx$ utilitzant el mètode de canvi de variables amb el canvi $x=4 \sin t$

Si $x=4 \sin t \Rightarrow dx=4 \cos t dt$ i $16-x^2=16-16 \sin^2 t=16(1-\sin^2 t)=16 \cos^2 t \Rightarrow$

$$\int \sqrt{16-x^2} dx = \int \sqrt{16 \cos^2 t} 4 \cos t dt = 16 \int \cos^2 t dt =$$

Tenint en compte que $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$, la expressió anterior es transforma en

$$16 \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = 8 \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + C = 8t + 4 \sin 2t + C =$$

Desfent els canvis: $t = \arcsin \frac{x}{4}$ i $\sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \frac{x}{4} \frac{1}{4} \sqrt{16-x^2}$, tenim:

$$\int \sqrt{16-x^2} dx = 8 \arcsin \frac{x}{4} + \frac{x}{2} \sqrt{16-x^2} + C$$

Calculeu $\int 2x \cos x dx$

Apliquem la fórmula de la derivació per parts

$$\int 2x \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} u=x \Rightarrow du=dx \\ dv=\cos x dx \Rightarrow v=\sin x \end{array} \right\} = 2(x \sin x - \int \sin x dx) = 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

Pàgina 1 de 4

Exercicis PAU

Exercici

Sigui la funció $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$, calculeu:

- a) La primitiva de la funció $f(x)$
- b) L'àrea limitada per la funció $f(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x=0$ i $x=\frac{\pi}{4}$.

Recordeu els passos:

- Integrar la funció, pel mètode que es trobi més oportú.
- Aplicar la Regla de Barrow per calcular la integral definida.
- Analitzar la coherència de la solució. Recordeu que les àrees no poden ser negatives i en aquests casos cal fer el valor absolut de la solució.

Resolució:

a) Aquesta integral es pot fer pel mètode del canvi de variable.

Podeu provar diversos canvis, però el que millor funciona és:

$$t = \cos(x)$$

$$dt = -\sin(x) \cdot dx \Rightarrow \text{aïllem } dx \Rightarrow \frac{dt}{-\sin(x)} = dx$$

Apliquem el canvi a la integral:

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} \cdot dx = \int \frac{\cancel{\sin(x)}}{t^2} \cdot \frac{dt}{-\cancel{\sin(x)}} = \int \frac{1}{-t^2} \cdot dt = \int -t^{-2} \cdot dt = \frac{-t^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{-\cos^{-1}(x)}{-1} + C = \boxed{\frac{1}{\cos(x)} + C}$$

b) La funció $\sin(x)$ i la funció $\cos^2(x)$ són positives en l'interval $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, per tant no talla l'eix OX, i per això l'àrea correspon a aquesta integral definida:

$$\text{Àrea} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} \cdot dx = \left[\frac{1}{\cos(x)} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} - \frac{1}{\cos(0)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{1}{1} = \boxed{0,414 \text{ u}^2}$$

Exercicis PAU

Exercici 1.

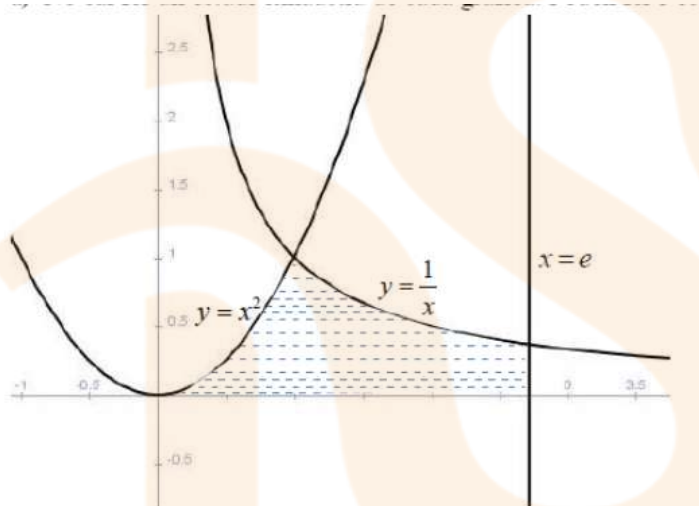
Considereu les funcions: $f(x) = x^2$ i $g(x) = \frac{1}{x}$ i la recta $x = e$

- a) Feu un esbós de la regió limitada per les seves gràfiques i l'eix de les abscisses i la recta $x=e$. Calculeu el punt de tall entre les dues funcions.
b) Calculeu l'àrea de la regió descrita en l'apartat anterior.

Recordeu els passos:

- Trobar els punts de tall entre les gràfiques de $f(x)$ i $g(x)$.
- Integrar la funció $f(x)$ i la funció $g(x)$.
- Aplicar la Regla de Barrow per calcular la integral definida entre els valors trobats.
- Analitzar la coherència de la solució dins del context de l'enunciat.

a) L'esbós de la gràfica és:



Es calcula el punt de tall entre les dues funcions. En servirà per calcular l'àrea.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{x} \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \text{Punt de tall } (1,1)$$

b) L'àrea és la suma de dues àrees:

$$\begin{aligned} \text{Àrea} &= \int_0^1 f(x) \cdot dx + \int_1^e g(x) \cdot dx = \int_0^1 x^2 \cdot dx + \int_1^e \frac{1}{x} \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[\ln(x) \right]_1^e \\ \text{Àrea} &= \frac{1}{3} + \ln(e) - \ln(1) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$