1. **Calculeu la derivada de les següents funcions:**

a) $f(x) = x^3 - 3x$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

b) $f(x) = x^5 \cdot e^x$

Hem d'aplicar la fórmula per derivar un producte:

$$f'(x) = \left(x^5\right)' \cdot e^x + x^5 \cdot \left(e^x\right)'$$

$$f'(x) = 5x^4 e^x + x^5 e^x = x^4 e^x (5 + x)$$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Hem d'aplicar la fórmula per derivar l'arrel quadrada d'una funció
Recordeu:

Si $f(x) = \sqrt{u(x)}$ llavors $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 1)'}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

d) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 1}$

Hem d'aplicar la fórmula per derivar un quocient:

$$f'(x) = \frac{(2x - 1)' \cdot (x - 1) - (2x - 1) \cdot (x - 1)'}{(x - 1)^2} = \frac{2 \cdot (x - 1) - (2x - 1) \cdot 1}{(x - 1)^2} = \frac{2x - 2 - 2x + 1}{(x - 1)^2} = \frac{-1}{(x - 1)^2}$$

Problemes de rectes tangents a una funció en un punt

2. Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)=x^2-3x+2$ en el punt de la funció d'abscissa -2

L'equació de la recta tangent en el punt (a, f(a)) és **y-f(a)=f'(a)(x-a)**

Per trobar la recta tangent necessitem el seu pendent i les coordenades del punt quan x=-2.

Del punt sabem que la seva abscissa és x= -2, la segona coordenada del punt és f(-2). Per tant : punt: (-2, 12)

El pendent de la recta tangent és m= $f'(-2)$

$f'(x)=2x-3$

$f'(-2)=-7$

Per tant l'equació de la recta tangent és: $y-12=-7(x-(-2))$

$y-12=-7x-14$

També es podria expressar: $7x+y=-2$

3. Troba l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)=\dfrac{x}{x-4}$ en el punt de la funció d'abscissa 2.

De la mateixa forma que en l'exercici anterior, necessitem saber les coordenades del punt i el pendent

Punt: (2, f(2)), per tant (2, -1)

El pendent de la recta tangent és m= $f'(2)$

$$f'(x)=\frac{(x)'\cdot(x-4)-x\cdot(x-4)'}{(x-4)^2}=\frac{x-4-x\cdot 1}{(x-4)^2}=\frac{-4}{(x-4)^2}$$

$$f'(2)=\frac{-4}{4}=-1$$

Per tant l'equació de la recta tangent és: $y-(-1)=-1(x-2)$

També es podria expressar com: $x+y=1$

4. Calculeu els punts en els quals la recta tangent a la funció $f(x)=\frac{x-2}{x+2}$ **és paral·lela a la recta y=x, i trobeu l'equació de les rectes tangents en aquests punts.**

Recordeu:
Dos rectes són tangents si tenen el mateix pendent.
El pendent d' una recta y=mx+n és m

La recta y=x té pendent 1
Per tant si volem que la recta tangent sigui paral·lela a aquesta recta, volem que el pendent de la recta tangent , f '(x) , sigui 1.

Calculem f '(x)

$$f'(x)=\frac{(x-2)'\cdot(x+2)-(x-2)\cdot(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{1\cdot(x+2)-(x-2)\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{x+2-x+2}{(x+2)^2}=\frac{4}{(x+2)^2}$$

Volem trobar en quins valors de x és compleix f '(x) = 1

Per tant hem de resoldre l'equació: $\frac{4}{(x+2)^2}=1$

$$\frac{4}{(x+2)^2}=1$$
$$4=(x+2)^2$$
$$4=x^2+4x+4$$
$$0=x^2+4x$$
$$0=x(x+4)$$

Les solucions d'aquesta equació són 0 i -4

Per a x=0 el punt de la funció és (0,-1) (per trobar la coordenada y substituïm 0 en la funció)
Recordem que el pendent és 1
Per tant, la recta tangent en aquest punt és: $y-(-1)=1(x-0)$
O bé : $y+1=x$
$x-y=1$

Per a x=-4 el punt de la funció és (-4,3) (per trobar la coordenada y substituïm -4 en la funció)
Recordem que el pendent és 1
Per tant, la recta tangent en aquest punt és: $y-3=1(x-(-4))$
O bé : $y-3=x+4$
$x-y=-7$