Derivades

Sitio:	Cursos IOC - Batxillerat	Imprimido por:	Invitado
Curso:	Matemàtiques aplicades a les Ciències socials (autoformació IOC)	Día:	viernes, 11 de febrero de 2022, 21:17
Libro:	Derivades		

Selectivitat.io

Tabla de contenidos

Selectivitat.io

Resum

Pendent d'una recta

El pendent d'una recta és la **tangent de l'angle** que la recta forma amb l'eix positiu d'abscisses.

Equació d'una recta

L'equació d'una recta amb pendent m i que passa pel punt (x_0,y_0) és:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

Taxa de variació mitjana

La taxa de variació mitjana de la funció f entre a i b, amb a<b, és el quocient entre la variació de f(x) i la de x al interval [a,b]

$$TVM[a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Interpretació geomètrica:

és el pendent de la recta secant a la gràfica de la funció pels punts $(a, f(a))\ i\ (b, f(b))$

Derivada d'una funció en un punt

La derivada d'una funció en el punt d'abscissa x=a és

$$f'(a) = \lim_{x \to \infty} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Interpretació geomètrica:

és el pendent de la recta tangent a la gràfica de la funció en el punt $(a, f(a))$

Equació de la recta tangent

L'equació de la recta tangent a la gràfica de f en el punt $(a, f(a))$ és:

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

Selectivitat.io

Taxa de variació mitjana

Definició

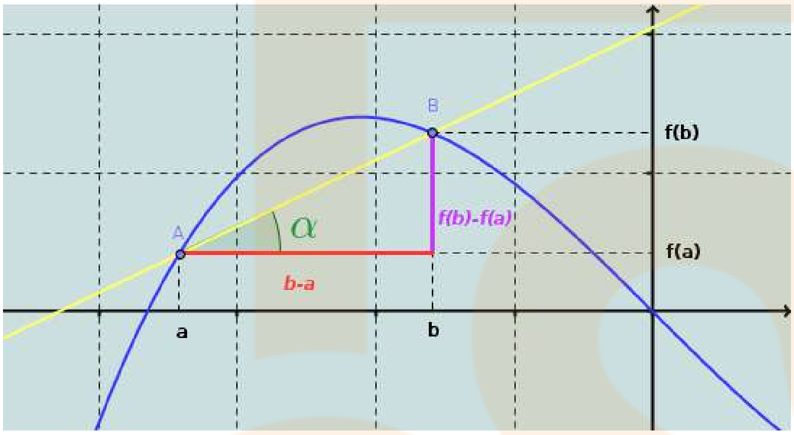
Sigui una funció f(x) i dos punts A=(a,f(a)) i B=(b,f(b)) de la seva gràfica

La taxa de variació mitjana d'una funció f(x) entre dos valors x=a i x=b (amb a<b) és:

$$\boxed{TVM[a,b]=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

Interpretació geomètrica

Si fem un gràfic de la situació veiem que TMV[a,b] és el pendent de la recta secant que passa pels punts A=(a,f(a)) i B=(b,f(b))



pendent de la recta secant

$$m=tg\ \alpha\ =\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Exemple

$$f(x)=\frac{1}{5}x^2-2x-1.$$

Volem calcular la taxa de variació mitjana entre els valors x= -2 i x=3

$$TVM[-2,3]=\frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)}$$

calculem $f(-2)$ *i* $f(3)$:

$$f(-2)=\frac{1}{5}\cdot 4-2(-2)-1=\frac{4}{5}+4-1=\frac{4}{5}+3=\frac{4}{5}+\frac{15}{5}=\frac{19}{5}$$

$$f(3)=\frac{1}{5}\cdot 9-6-1=\frac{9}{5}-7=\frac{9}{5}-\frac{35}{5}=-\frac{26}{5}$$

$$Aleshores\quad TVM[-2,3]=\frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)}=\frac{-\frac{26}{5}-\frac{19}{5}}{5}=\frac{-\frac{45}{5}}{5}=\boxed{\frac{-9}{5}}$$

Selectivitat.io

Derivada d'una funció en un punt

Definició

La derivada d'una funció en un punt de la funció d'abscissa x=a és

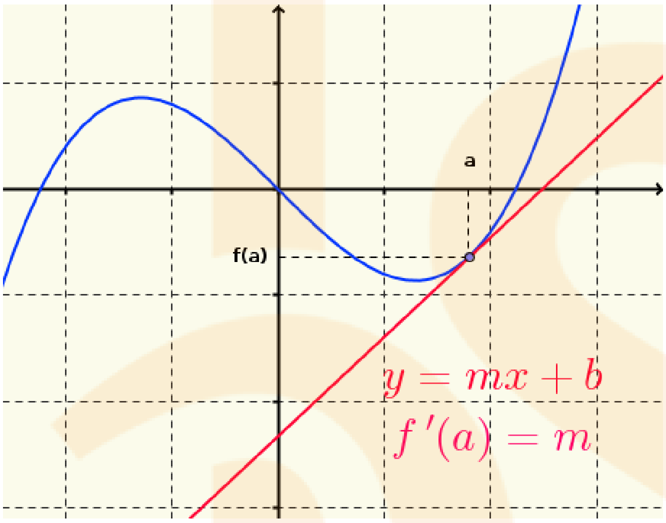
$$f'(a) = \lim_{x \to \infty} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Interpretació geomètrica

La derivada d'una funció en un punt de la funció d'abscissa x=a és **el pendent de la recta tangent a la gràfica en aquest punt.**

Imaginem una funció f(x) i un punt de la gràfica d'aquesta funció (a, f(a)) on hi hagi una única recta tangent. Sigui $y = mx + b$ l'equació d'aquesta recta tangent.

Aleshores $f'(a) = m$



Exemple:

$f(x) = -x^3 + x$

Trobeu el pendent de la recta tangent en el punt de la funció d'abscissa x=-1, i l'equació de la recta tangent

Punt

El punt és $(-1, f(-1))$

$$f(\mathbf{-1}) = -(-1)^3 + (-1) = -(-1) - 1 = 1 - 1 = \mathbf{0}$$

Selectivitat.io

Per tant, el punt és $\mathbf{(-1,0)}$

Pendent

Calculem $f\,'(x) = -3x^2 + 1$

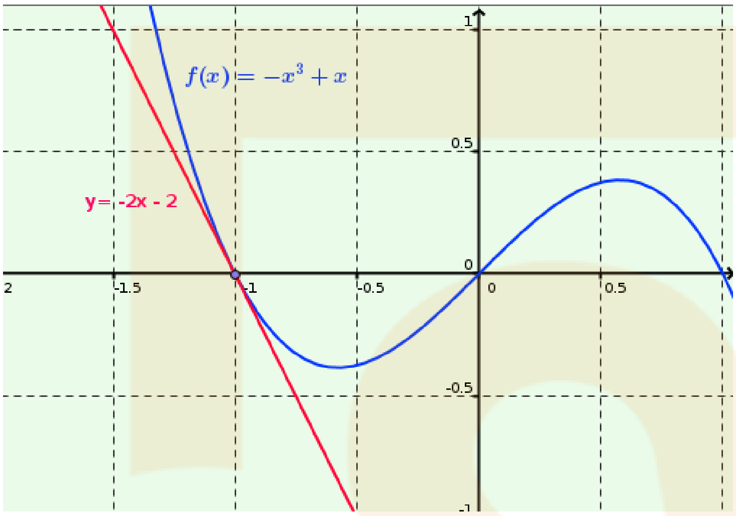
Avaluem la derivada en x=-1: $\boldsymbol{f\,'(-1)} = -3\cdot(-1)^2 + 1 = -3 + 1 = \boldsymbol{-2}$

Per tant , el pendent és **-2**

Equació de la recta tangent:

$$y - 0 = -2\cdot(x - (-1)$$
$$\boldsymbol{y = -2\cdot(x+1)}$$

O bé: $2x + y + 2 = 0$



Selectivitat.io

Fórmules de derivades

En aquest capítol, considerem els subcapítols:

- Derivades de funcions elementals

- Derivades de funcions compostes.

Són funcions elementals, per exemple: $f(x)=3x$, $f(x)=x^5$, $f(x)=e^x$, $f(x)=\ln x$, ...

Són funció compostes, per exemple: $f(x)=(3x+1)^5$, $f(x)=e^{3x}$, $f(x)=\ln(2x+1)$,.......

Selectivitat.io

Derivada de funcions elementals

Fórmules:

$f(x) = k \quad k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = kx \quad k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = k$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\ln a} \cdot \dfrac{1}{x}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = tg\ x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Aquí podeu veure uns quants exemples:

- Exemples derivades funcions elementals

Selectivitat.io

Derivada de funcions compostes

Per derivar una funció composta s'aplica la Regla de la cadena:

$$f(x) = u(v(x)) \quad \rightarrow \quad f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

però a la pràctica el que fem és aplicar les fórmules de derivades.

Fórmules:

$f(x) = k \quad k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = k \cdot u(x) \quad k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = k \cdot u'(x)$
$f(x) = (u(x))^n$	$f'(x) = n(u(x))^{n-1} \cdot u'(x)$
$f(x) = \sqrt{u(x)}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} \cdot u'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$f(x) = e^{u(x)}$	$f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$
$f(x) = a^{u(x)}$	$f'(x) = a^{u(x)} \cdot \ln a \cdot u'(x)$
$f(x) = \ln(u(x))$	$f'(x) = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$
$f(x) = \log_a(u(x))$	$f'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}$
$f(x) = \sin(u(x))$	$f'(x) = \cos(u(x)) \cdot u'(x)$
$f(x) = \cos(u(x))$	$f'(x) = -\sin(u(x)) \cdot u'(x)$
$f(x) = tg(u(x))$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}$

Aquí podeu veure uns quants exemples: _

Exemples derivades funcions compostes

Selectivitat.io

Funció derivada i operacions

Derivada de la suma.

$f(x) = g(x) + h(x) \;\rightarrow\; f'(x) = g'(x) + h'(x)$

Exemple.

$f(x) = e^{2x} + x^3 \;\rightarrow\; f(x) = 2 \cdot e^{2x} + 3x^2$

Derivada de la diferència.

$f(x) = g(x) - h(x) \;\rightarrow\; f'(x) = g'(x) - h'(x)$

Exemple.

$f(x) = 5x - \ln x \;\rightarrow\; f'(x) = 5 - \frac{1}{x}$

Derivada del producte

$f(x) = g(x) \cdot h(x) \;\rightarrow\; f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

Exemple.

$f(x) = x \cdot e^{3x} \;\rightarrow\; f(x) = 1 \cdot e^{3x} + x \cdot e^{3x} \cdot 3 = e^{3x}(1 + 3x)$

Derivada del quocient

$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \;\rightarrow\; f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}$

Exemple.

$f(x) = \frac{5x+2}{3x-1} \;\rightarrow\; f'(x) = \frac{5 \cdot (3x-1) - (5x+2) \cdot 3}{(3x-1)^2} = \frac{15x - 5 - 15x - 6}{(3x-1)^2} = \frac{-11}{(3x-1)^2}$

Selectivitat.io

Com calcular derivades?

a) Com calculem una derivada? Aplicant la fórmula que correspongui

Si mireu en algun llibre com fa el càlcul de derivades, podreu veure que fa algun exemple aplicant la definició de derivada. Però aquesta forma de calcular la derivada és molt poc pràctica. Nosaltres el càlcul de derivades ja sempre ho farem aplicant la fórmula que correspongui:

- 4.1. Derivada de funcions elementals
- 4.2. Derivada de funcions compostes
-

En aquest exemple 2 :

$f(x) = 3x - x^2$

que en el llibre ho fa amb la definició , ho farem directament: sabem (fórmula) que la derivada de 3x és 3 i la derivada de x^2 és 2x, per tant:

$f'(x) = 3 - 2x$

b) Quina fórmula haig d'aplicar? En general, les que s'indiquen en Derivada de funcions compostes

Exemple 1

Calculeu la derivada de

$$\boldsymbol{f(x) = (3x+1)^5}$$

hauré d'aplicar la fórmula:

$$\boldsymbol{f(x) = (u(x))^n \quad \rightarrow \quad f'(x) = n(u(x))^{n-1} \cdot u'(x)}$$

Per tant

$$f(x) = (3x+1)^5 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 5(3x+1)^4 \cdot \mathbf{3} = 15(3x+1)^4$$

un error freqüent és no afegir aquest 3 (que és la derivada de 3x+1) perquè mireu la fórmula

$$f(x) = x^n \quad \rightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

però en aquest cas no podem aplicar aquesta fórmula ja que la nostra funció no és del tipus $f(x)=x^n$

Exemple 2

Calculeu la derivada de

$$\boldsymbol{f(x) = \ln(1 - 3x^2)}$$

hauré d'aplicar la fórmula:

$$\boldsymbol{f(x) = \ln(u(x)) \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}}$$

Per tant

$$f(x) = \ln(1 - x^3) \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{-3x^2}{1 - x^3}$$

un error freqüent és no afegir en el numerador $-3x^2$ (que és la derivada de $1-x^3$). Aquest error ho feu perquè mireu la fórmula

$$f(x) = \ln x \ \rightarrow \ f'(x) = \frac{1}{x}$$

però en aquest cas no podem aplicar aquesta fórmula que només serveix per a f(x)=ln x

Vídeo

En aquest vídeo podeu veure alguns exemples de càlcul de derivades:

Selectivitat.io

Derivades d'arrels

Tingueu en compte que les fórmules

$$f(x)=\sqrt{x} \quad \to \quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x)=\sqrt{u(x)} \quad \to \quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{u(x)}}\cdot u'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

només són vàlides per a les arrels quadrades

Com fem la derivada d'una arrel no quadrada? Tenint en compte:

$\sqrt[n]{x}=x^{1/n}$

$\sqrt[n]{x^m}=x^{m/n}$

Exemples

- $y=\sqrt[5]{x} \to y=x^{1/5} \to y'=\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}=\frac{1}{5}x^{-4/5}=\frac{1}{5\cdot x^{4/5}}=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$
- $y=\sqrt[3]{x^2} \to y=x^{2/3} \to y'=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}x^{-1/3}=\frac{2}{3\cdot x^{1/3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$
- $y=\sqrt[3]{x^2+3x} \to y=(x^2+3x)^{1/3}$

$$y'=\frac{1}{3}(x^2+3x)^{\frac{1}{3}-1}\cdot(2x+3)=\frac{1}{3}(x^2+3x)^{-\frac{2}{3}}\cdot(2x+3)=\frac{2x+3}{3\sqrt[3]{(x^2+3x)^2}}$$

Selectivitat.io

Simplificar

a) A vegades podem **simplificar el càlcul** d'una derivada.

Veiem alguns exemples

Exemple 1

Derivada de $f(x)=3\cdot x^5$

- Ho podem veure com un producte i aplicar la fórmula de la derivada d'un producte

$$f'(x)=0\cdot x^5+3\cdot 5x^4=15x^4$$

- Aplicant que $f(x)=k\cdot u(x) \quad \to \quad f'(x)=k\cdot u'(x)$ on k és un nombre

$$f(x)=3\cdot x^5 \quad \to \quad f'(x)=3\cdot 5x^4=15x^4$$

Exemple 2

Derivada de $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$

Ho podem fer de dues maneres:

- Considerant que és un quocient:

$$f'(x)=\frac{0\cdot x^4-1\cdot 4x^3}{(x^4)^2}=\frac{-4x^3}{x^8}=\frac{-4}{x^5}$$

- Tenint en compte que $\dfrac{1}{x^n}=x^{-n}$:

$$f(x)=\frac{1}{x^4}=x^{-4} \quad \to \quad f'(x)=-4x^{-5}=\frac{-4}{x^5}$$

Com podeu veure aquesta segona forma és molt més pràctica.

b) Simplificar el resultat de la derivada

Veurem especialment el cas de la derivada d'un quocient de polinomis.

Exemple

Derivada de: $f(x)=\dfrac{5-2x}{1-x}$

La derivada és:

$$f'(x)=\frac{-2\cdot(1-x)-(5-2x)\cdot\mathbf{(-1)}}{(1-x)^2}=\frac{-2+2x+5-2x}{(1-x)^2}=\frac{3}{(1-x)^2}$$

Observacions:

· La derivada del denominador és -1 i per indicar que multiplica al numerador 5-2x hem de posar:

$(5-2x)\cdot\mathbf{(-1)}$

És incorrecte escriure $(5-2x)\cdot\mathbf{-1}$

En un producte , sempre que el segon factor sigui negatiu ho hem d'escriure entre parèntesis

Per exemple, és incorrecte $4\cdot -3$, s'ha d'escriure: $4\cdot(-3)$.

Es pot obviar el puntet (però no els parèntesis!): $4(-3)$

Sí és correcte escriure $-4\cdot 3$

Selectivitat.io

· Atenció amb el signe menys que afecta a tot el 2n terme del numerador: $-2\cdot(1-x)-(5-2x)\cdot(-1)$

(En aquest cas aquest signe $-$ contrarestarà el (-1) i en el numerador ens quedarà $-2\cdot(1-x)+5-2x$

· El denominador de la derivada $(1-x)^2$, en principi, no cal desenvolupar-lo.

Però si ens interessa desenvolupar-lo tindrem en compta que $(1-x)^2=1-2x+x^2$

Selectivitat.io