Dubtes freqüents Àlgebra

Sitio:	Cursos IOC - Batxillerat	Imprimido por:	Invitado
Curso:	Matemàtiques (autoformació IOC)	Día:	viernes, 11 de febrero de 2022, 21:09
Libro:	Dubtes freqüents Àlgebra		

Descripción

.

Tabla de contenidos

MATRIUS

- Multiplicació de matrius
- Rang d'una matriu
- Error freqüent (i greu) en el càlcul de rangs
- Sistemes matricials
- Esglaonar matrius (cas general)

DETERMINANTS

- Determinants d'ordre >3
- Adjunt d'un element d'una matriu

SISTEMES D'EQUACIONS

- Solucions d'un sistema compatible indeterminat
- Canvi de files o de columnes en la matriu associada a un sistema d'equacions lineals

MATRIUS

.

Multiplicació de matrius

La condició per tal que dues matrius es puguin multiplicar és que el nombre de columnas de la primera matriu sigui igual al nombre de files de la segona matriu.

O sigui, per poder fer el producte **A·B**, la condició és:

nombre de columnas de A = nombre de files de B

A és de dimensió **m** x **k**
B és de dimensió **k** x **n**
=> A*B és de dimensió **m** x **n**

Per tant, per exemple, si multipliquem una matriu **3**x**3** per una **3**x**2**, ens dóna una matriu **3**x**2**

Exemple

Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

podem fer el producte A·B (serà una matriu de dimensió 2x3) però no podem fer el producte B·A

Rang d'una matriu

El rang d'una matriu és el nombre de files (o columnes) independents que té la matriu.

I que vol dir que les files siguin independents?

Si, per exemple, tenim la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$

Veiem que la fila 3 la podem obtenir combinant les altres dues files:

F3 = $3F_1$ - F_2

Es diu que la fila 3 és combinació lineal de la fila 1 i la fila 2. O també es diu que la fila 2 és depenent de la 1 i la 2.

Llavors el rang d'aquesta matriu serà 2 ja que hi ha 2 files independents.

A vegades es pot veure a ull, però normalment el que fem és esglaonar la matriu (amb combinacions lineals de les files fer zeros sota la diagonal) i llavors per veure el rang:

El rang d'una matriu esglaonada és el nombre de files no nul·les.

Fem transformacions elementals per esglaonar la matriu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2f_1+f_2 \\ f_3-f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix} \quad f_3+f_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, com que queden dues files no nul·les, **el rang és 2**

El mètode de calcular el rang és general per qualsevol matriu sigui de l'ordre que sigui.

El procediemt és fer transformacions elementals pe esglaonar la matriu (obtenir zeros sota la diagonal) i contar el nombre de files no nul·les.

(també es pot fer veient els menors complementaris d'ordre més gran diferent de zero, però considero que en general és un mètode amb més dificultat)

Per exemple:

rang de la matriu $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & \mathbf{2} & 4 & 3 \\ 0 & 4 & -6 & -3 \\ 0 & 4 & -6 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{-14} & -9 \\ 0 & 0 & -14 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -14 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(he marcat en blau el que es diuen "els pivots", amb els que "fem zeros" les files de sota)

Aquesta matriu té rang 3

Altre exemple:

rang de la matriu $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & -6 & -3 \\ 0 & 4 & -6 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -14 & -9 \\ 0 & 0 & -14 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -14 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Ara fent un canvi de fila ja tindrem la matriu esglaonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -14 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -14 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rang de la matriu és 4

Error freqüent (i greu) en el càlcul de rangs

Quan es calcula el rang d'una matriu sovint es comet un error greu. És referent a les transformacions elementals en una matriu. Recordeu que les transformacions elementals conserven el rang de la matriu. L'error és fer això:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 8 \\ 0 & -5 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \quad \begin{matrix} \\ F_2 - F_3 \\ F_3 - F_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ **NO!**

Això no és correcte perquè els passos s'han de fer d'un en un. És a dir, si en la segona fila fem F2-F3, ens quedarà:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 8 \\ 0 & -5 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \quad F_2 - F_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

I encara que ara en aquesta nova matriu féssim la tercera fila menys la segona, no se'ns anul·laria. Per tant el que s'ha de fer és esglaonar la matriu pas a pas.És a dir, quan tenim

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 8 \\ 0 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

les dues primeres files les deixem i ara "fem un zero" combinant la tercera amb la 2a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 8 \\ 0 & -5 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \quad \begin{matrix} \\ \\ F_3 - F_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i, per tant, el **rang de la matriu és 2**.

De la mateixa manera no és correcte, per exemple, aquest pas (o alguna cosa similar):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \quad \begin{matrix} \\ F_2 - F_3 \\ F_3 - F_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$ **NO!**

(si això es pogués fer sempre podríem arribar a rang 1 !)

Sistemes matricials

Podeu mirar l'exercici 37 i 39 del llibre. Simplement fixeu-vos que amb matrius treballem de manera semblant que amb números:

Exemples:

A + X = B => X = B- A

X + A = B => X = A + B

A - X = B => -X= B - A => X = -B + A

fixeu-vos que -B s'btindrà canviant de signe tots els element de B

I per exemple, 5A és la matriu que s'obté de multiplicar tots els elements per 5

$$3X+B=C \;\Rightarrow\; 3X=C-B \;\Rightarrow\; X=\frac{1}{3}(C-B)$$

El cas que sí canvia una mica és quan tenim A·X = B o X·A=B, aquest cas és millor fer-ho plantejant un sistema.

Fixeu-vos que en matrius no tenim l'operació quocient de matrius. No podem fer A/B

Si la matriu A té inversa (és a dir, té el mateix nombre de files que de columnes i el seu determinant no és nul) ho podem fer amb la inversa de la matriu A:

a) AX = B

multiplicar per l'esquerra (això és important!) tota l'equació per la inversa de A:

$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B$

Com que $A^{-1}\cdot A$= I (matriu identitat):

$\mathbf{X = A^{-1}\cdot B}$

b) XA = B

multiplicar per la dreta tota l'equació per la inversa de A

$XA\cdot A^{-1}= B\cdot A^{-1}$

Com que $A\cdot A^{-1}$= I (matriu identitat):

$\mathbf{X = B\cdot A^{-1}}$

Si la matriu A no té inversa obligatòriament ho hem de fer plantejant un sistema d'equacions.

Esglaonar matrius (cas general)

Exemple d'esglaonament d'una matriu fem transformacions elementals.

Recordem que les transformacions elementals en una matriu són aquestes (i només aquestes):

- Intercanviar files. Per exemple $f_1 \leftrightarrow f_2$

- Multiplicar una fila per un nombre diferent de zero. Per exemple $f_1 \rightarrow 3f_1$

- Sumar a una fila altra fila multiplicada per. Per exemple $f_2 \rightarrow f_2 + 3f_1$

Fem transformacions elementals, la matriu canvia però obtenim matrius equivalents que vol dir que tenen el mateix rang.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ -2f_1+3f_2 \\ 5f_1+3f_3 \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 11 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ f_2+f_3 \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

El rang d'aquesta matriu és 3 ja que en la matriu esglaonada (zeros sota la diagonal), ens queden 3 files no nul·les.

DETERMINANTS

.

Determinants d'ordre >3

Encara que pràcticament ens limitarem als determinants d'ordre 2 i als d'ordre 3 (per Sarrus), explicarem com calcular determinants de qualsevol ordre.

Els determinants d'una matriu d'ordre més gran que 3 els hem de fer desenvolupant el determinant per una fila o columna.

El determinant és la suma dels productes dels elements d'una fila o columna multiplicada pels seus adjunts corresponents.

Exemple:

Calcular el determinant d ela matriu

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2 & 0\\ -5 & -1 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}\mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2}\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2 & 0\\ -5 & -1 & 3 & 4\end{vmatrix}$$

Desenvolupem, per exemple, per la primera fila.

Hem d'agafar els menors complementaris de cada element de la primera fila:

Menor complementari de l'element a_{11} = **-2** $m_{11}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 4\end{vmatrix}=17$

Menor complementari de l'element a_{12} = **0** $m_{12}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 0\\ -5 & 3 & 4\end{vmatrix}=15$

Menor complementari de l'element a_{13} = **1** $m_{13}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ -5 & -1 & 4\end{vmatrix}=-18$

Menor complementari de l'element a_{14} = **2** $m_{14}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ -5 & -1 & 3\end{vmatrix}=-31$

Ara, formem els adjunts, que simplement és igual al menor complementari o canviat de signe.

Es fa canvi de signe o no segons la regla de signes alternats $\begin{vmatrix}+ & - & + & -\\ - & + & - & +\\ + & - & + & -\\ - & + & - & +\end{vmatrix}$

O sigui, els menors complementaris dels element de la primera fila són:

$\mathbf{M_{11} = m_{11} = 17}$

$\mathbf{M_{12} = - m_{12} = -15}$

$\mathbf{M_{13} = m_{13} = -18}$

$\mathbf{M_{14} = - m_{13} = - (-31) = 31}$

I ara ja simplement:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ -5 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -2M_{11} + 0 \cdot M_{12} + 1 \cdot M_{13} + 2 \cdot M_{14} = -2 \cdot 17 + 0 \cdot (-15) + 1 \cdot (-18) + 2 \cdot 31 = 10$$

Observacions:

- Aquest determinant ho hem calculat desenvolupant per la primera fila. Ho podríem haver fet amb qualsevol fila o columna (com a exercici ho podeu fer amb altra fila o columna i comprovar que us dóna el mateix).

- Aquest mètode serveix per calcular qualsevol determinant. també els d'ordre 3 però normalment els fem per Sarrus.

- Fixeu-vos en l'exerici que l'adjunt M_{12} no calia calcular-lo, ja que multipliquem per l'element 0. Això ens indica que serà més senzill (de càlcul) si agafem una fila o columna que tingui zeros (si la hi ha).

Adjunt d'un element d'una matriu

Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcularem l'adjunt de l'element a_{21} = -2

Primer calculem el seu menor complementari.

El menor complementari de l'element a_{21} = -2 (és l'element de la fila 2 y columna 1) és el determinant de la matriu eliminant la seva fila (la 2) y la seva columna (la 1).

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & 3 & 1 \\ \cancel{-2} & \cancel{0} & \cancel{-1} \\ \cancel{7} & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

M_{21} = $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 9-5=4$

i segons la regla de signes $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

li toca canvi de signe per obtenir l'adjunt.

Per tant, l'adjunt de l'element a_{21} = -2 és - 4

Un altre exemple amb una matriu quadrada d'ordre 2:

En la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

lPer exemple, calcularem adjunt de l'element a_{21} = -1

Eliminem la fila (la segona) i columna (la primera) d'aquest element: ens queda **2**.

I ara segons la regla de canvi de signe $\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$, ens diu que hem de canviar de signe.

Per tant l'adjunt de l'element a_{21} = -1 és -2

SISTEMES D'EQUACIONS

.

Solucions d'un sistema compatible indeterminat

Farem un exemple de discussió i resolució de sistema compatible indeterminat.

El sistema és:

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y+7z=1 \\ x-5y+2z=8 \\ -2x+10y-4z=-16 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & 2 & 8 \\ -2 & 10 & -4 & -16 \end{array}\right)$$

fixeu-vos que podem intercanviar les dues primeres files (per tal de que el primer element sigui un 1) i fins i tot podem dividir per 2 la tercera fila. D'aquesta manera tenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & 8 \\ 3 & -2 & 7 & 1 \\ -2 & 10 & -4 & -16 \end{array}\right)$$

esglaonant:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & 8 \\ 3 & -2 & 7 & 1 \\ -2 & 10 & -4 & -16 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & 8 \\ 0 & 13 & 1 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Discussió (classificació):

(Teorema Rouché-Fröbenius)

rang matriu coeficients = rang matriu ampliada = **2** => compatible

rang = 2 < nombre d'incògnites = **3 => compatible indeterminat**

les infinites solucions es poden expressar en funció d'**1** paràmetre (ja que la diferència entre el nombre d'incògnites i el rang és 1)

Solució:

Començant per la 2a equació:

13y + z = -23

agafarem y com el paràmetre λ

13y + z = -23 => z = -13λ - 23

substituint en la 1a equació x -5y +2z =8 queda:

x - 5λ + 2(-13λ - 23) = 8 => x - 5λ - 26λ - 46 = 8 =>

x = 54 + 41λ

Per tant les solucions són

$$\begin{cases} \mathbf{x = 54 + 41\lambda} \\ \mathbf{y = \lambda} \\ \mathbf{z = -13\lambda - 23} \end{cases} \qquad \forall \lambda \in \mathrm{IR}$$

($\forall \lambda \in \mathbb{R}$ es llegeix com "per a tot λ pertanyent als reals", vol dir simplement que λ pot ser qualsevol nombre real)

o bé les podem expressar com:

$$\mathbf{(54 + 41\lambda,\ \ \lambda,\ \ -13\lambda - 23)}$$

Canvi de files o de columnes en la matriu associada a un sistema d'equacions lineals

En la matriu associada a un sistema podem canviar l'ordre de les files sense cap repercussió (ja que l'ordre de les equacions en un sistema és irrellevant, si canviem d'ordre les equacions obtenim un sistema equivalent, és a dir, amb les mateixes solucions).

Si ens interessa també podem canviar l'ordre de les columnes però al fer això hem de pensar que estem canviat les incògnites que hi ha en cada columna. Vull dir, si per exemple tenim el sistema d'equacions:

$$\left.\begin{array}{l} 5x+y+z=1 \\ 3x+2y+z=-2 \\ 2x+y=1 \end{array}\right\}$$

La seva matriu associada és:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & |\ 1 \\ 3 & 2 & 1 & |-2 \\ 2 & 1 & 0 & |\ 1 \end{pmatrix}$$

Si volem fer un intercanvi de les columnes 1 i 3 ja que pensem que d'aquesta manera ens és més fàcil esglaonar la matriu, el podem fer però tenint en compte que ara en la 1a columna tindrem els coeficients de la z, i en la 3a columna els de la x (ho hem de recordar al acabar d'esglaonar):

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & |\ 1 \\ 3 & 2 & 1 & |-2 \\ 2 & 1 & 0 & |\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & |\ 1 \\ 1 & 2 & 3 & |-2 \\ 0 & 1 & 2 & |\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & |\ 1 \\ 0 & 1 & -2 & |-3 \\ 0 & 1 & 2 & |\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & |\ 1 \\ 0 & 1 & -2 & |-3 \\ 0 & 0 & 4 & |\ 4 \end{pmatrix}$$

ara al resoldre el sistema començant per l'última fila (recordem que amb el canvi fet en la 3a columna tenim les x), tenim:

$$4x=4 \quad \to \quad x=1$$

en la 2a fila tenim:

$$y-2x=-3 \quad \to \quad y=2x-3=2-3=-1$$

i finalment substituint en la 1a fila:

$$z+y+5x=1 \quad \to z=1-y-5x=1-(-1)-5\cdot 1=2-5=-3$$

Observació: el canvi de columnes es pot fer entre columnes de la matriu de coeficients, no amb la columna dels termes independents de la matriu ampliada.